Instituto Politécnico de Bragança
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Análise Matemática I – 2003/04

Ficha Prática nº 4

Estudo da continuidade de funções reais de variável real.

1. Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando devidamente a sua opção.

a) Se f é uma função contínua então $D_f = IR$;

b) Se $D_f = IR$ então f é uma função contínua;

c) Se $D_f = IR - \{1\}$ então f não é uma função contínua;

d) Se f é uma função contínua então f é injectiva;

e) Se f é uma função injectiva então f é contínua;

2. Seja $f : R \to R$ a função definida por $f(x) = xe^{1-|x|}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

a) f é ímpar e contínua em *IR*;

b) f é par e contínua em *IR*;

c) f é ímpar, descontínua no ponto *0* e contínua em $\mathrm{IR} \setminus \{0\}$;

d) f é contínua em $\mathrm{IR} \setminus \{0\}$ e $f(x) \geq 0$, $\forall x \in IR$;

3. Seja $f : IR \to IR$ a função definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. A função f é :

a) periódica

b) par

c) ímpar

d) contínua em *IR*

e) as afirmações feitas nas alíneas anteriores são todas falsas

4. Investigue a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$ em *x=0*

b) $f(x)=\begin{cases} \ln(x+2), & x \geq -1 \\ -x-1 \quad , & x < -1 \end{cases}$ em *x=-1*

5. Considere a função contínua $f:[-1,+\infty[\to IR$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} c \times arcsen(x)+1 & se \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x}{x+1} & se \quad x > 1 \end{cases}$$

onde ***c*** é uma constante real e $-\frac{\pi}{2} \leq arcsen(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Qual o valor de ***c***?

a) $-\frac{1}{\pi}$ **b)** $-\pi$ **c)** $-\frac{2}{\pi}$ **d)** -1

6. Calcule *p* de modo que a função *f* seja contínua

$$f(x)=\begin{cases} x^2+px+2 & , \quad x \neq 3 \\ 3 & , \quad x = 3 \end{cases}$$

7. Para um certo valor de k positivo, é contínua a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \ln(x+k) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 2

8. Seja $f: \ IR \ \to \ IR$ uma função periódica com período $T > 0$ e contínua em IR.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) f tem máximo e mínimo.

b) f pode não ter máximo.

c) f pode não ter máximo nem mínimo.

d) f pode não ter mínimo.

9. Seja h a função, de domínio IR, definida por

$$h(x)=\begin{cases} 1+e^{x} & \text{se} \quad x<0 \\ 2 & \text{se} \quad x=0 \\ 3x+2 & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função h, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

a) É contínua.

b) É contínua à esquerda e descontínua à direita.

c) É contínua à direita e descontínua à esquerda.

d) É descontínua à esquerda e à direita.

10. Considere a função g, de domínio IR, definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{se} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x=0 \\ \dfrac{sen(x)}{2x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função g quanto à continuidade no ponto 0 (deve indicar, justificando, se a função é contínua nesse ponto e, no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda ou à direita, nesse mesmo ponto).

12. De uma função f, contínua no intervalo [1,3], sabe-se que $f(1)=7$ e $f(3)=4$. Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

a) A função f tem pelo menos um zero no intervalo [1,3]

b) A função f não tem zeros no intervalo [1,3]

c) A equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo [1,3]

d) A equação $f(x)=5$ não tem solução no intervalo [1,3]

13. Considere uma função real de variável real, f, monótona num intervalo fechado $[a,b]$ onde $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

a) A equação $f(x)=0$ tem uma solução em $[a,b]$.

b) A equação $f(x)=0$ tem infinitas soluções em $[a,b]$.

c) A equação $f(x)=0$ não tem solução em $[a,b]$.

d) Nada se pode concluir acerca do número de soluções da equação $f(x)=0$ em $[a,b]$.

14. Considere a função

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & se \quad x\in[0,1[\\ x+2 & se \quad x\in[1,2] \end{cases}$$

Explique porque é que o teorema de Bolzano não garante a existência de um elemento $x\in[0,2]$ que verifique $f(x)=2$.

15. Considere a função h, real de variável real, definida por

$$h(x)=\begin{cases} 2x+\arccos(x) & \textbf{se} \quad \mathbf{0}\le x<1 \\ 2 & \textbf{se} \quad x=1 \\ \dfrac{x+5}{3} & \textbf{se} \quad \mathbf{1}<x\le 4 \end{cases}$$

a) Mostre que h é contínua em todo o seu domínio.

b) Aplicando o teorema de Bolzano, mostre que: $\exists \quad c\in[0,4]: h(c)=c$.

16. Considere a função $f: \quad IR \quad \to \quad IR$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}(1+\ln x) & se \quad x>0 \\ (k+1)(x^3-x+2) & se \quad x\le 0 \end{cases}$$

a) Determine o valor do parâmetro k de modo que a função f seja contínua em todo o seu domínio.

b) Considere $k=0$. Justifique a existência de pelo menos um zero da função f no intervalo $[-2,-1]$.

17. Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando devidamente a sua opção.

a) Se $f: I\to IR$ é contínua e I é um intervalo, então f é limitada.

b) Se $f: I\to IR$ é contínua e I é um intervalo fechado, então f é limitada.