Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Instituto Politécnico de Bragança

Análise Matemática I – Recurso (EE, EI, EM)

Duração da prova: *2h 30m* **Data:** 26/02/2004

Observações:

- **Desligue o telemóvel.**
- A cotação da prova é de 20 valores.
- Todas as respostas devem ser devidamente justificadas.
- O uso de calculadora é expressamente proibido.
- **Responda a cada Grupo de perguntas em folhas de exame separadas.**

Grupo I

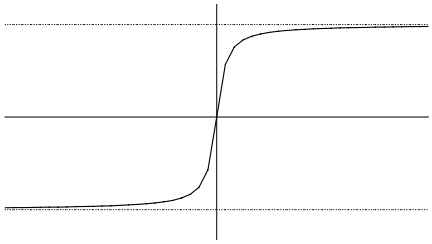
1. Seja *h* uma função real de variável real, definida por $h(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(x^2\right)$.

a) (*0,5 val.*) Determine o domínio de *h*.

b) (*1 val.*) Analise *h* quanto à injectividade. O que pode concluir quanto à existência de função inversa de *h*.

c) (*1 val.*) Considerando *h* definida em $[0,1]$, caracterize a inversa desta função (indicando $D_{h^{-1}}$, $D'_{h^{-1}}$ e a sua expressão analítica).

2. A figura seguinte é parte da representação gráfica da função $arctg(x)$.



Seja $k \in IR$, considere a função *f* definida por $f(x) = \begin{cases} arctg\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ k & , x = 0 \end{cases}$.

a) (*0,5 val.*) Mostre que *f* é contínua em $IR \setminus \{0\}$.

b) (*0,75 val.*) Determine o valor de *k* de modo que *f* seja contínua à direita em $x = 0$.

c) (*0,75 val.*) Analise a existência de $f'(0)$.

d) (*0,75 val.*) Mostre que $f'(x) = \frac{-1}{x^2+1}$ e $f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, para $x \neq 0$.

e) (*0,5 val.*) Determine as assímptotas ao gráfico de $f'(x)$.

f) (*0,75 val.*) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $x = 1$.

g) (*1,75 val.*) Considere $k = -\pi/2$. Sobre o gráfico de *f* determine: intervalos de monotonia; extremos relativos; sentido das concavidades e pontos de inflexão.

V.S.F.F.

Grupo II

3. (*6,5 val.*) Calcule as seguintes primitivas:

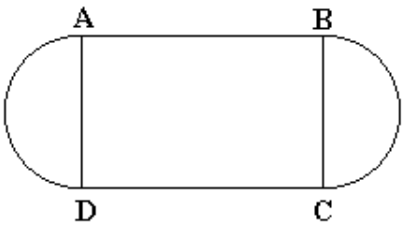
3.1. $\int \frac{1+\ln\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}dx$.

3.2. $\int (x+1)sen(2x)dx$.

3.3. $\int \frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$

3.4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

4. (*2,25 val.*) A seguinte figura representa uma superfície constituída por um rectângulo [ABCD] e dois semi-círculos de diâmetro [AD] e [BC].



Sabendo que a área do rectângulo é de $200\,m^2$, determine o perímetro mínimo que a figura pode ter.

(**NOTA:** O perímetro da circunferência de raio *r* é $P = 2\pi.r$.)

Grupo III

5. (*3 val.*) Indique o valor lógico das seguintes afirmações **justificando** devidamente a sua opção.

5.1. $\lim_{x\to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

5.2. A primitiva (ou integral) da função $f(x)=0$ é 0.

5.3. Seja $f:[a,b]\to IR$ uma função não constante, contínua e derivável. Se $f(a)=f(b)$ então f tem pelo menos um extremo.

5.4. Seja $f:[-1,1]\to[-1,1]$ uma função sobrejectiva e periódica de período 1, então podemos afirmar que $f(x)=1/2$ tem uma única solução.

5.5. Sejam $a,b\in IR$, se f é uma função com domínio *IR* e $\lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = b$, então podemos concluir que $f'(a)=b$.

5.6. Toda a função derivável tem derivada contínua.

Bom Trabalho.

Fim.