Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Instituto Politécnico de Bragança

Análise Matemática I – Frequência

Duração da prova: *2h 30m* **Data:** 22/01/2004

Número: _____ **Curso:** _____

Nome: _____

Observações:

- **Desligue o telemóvel.**
- A cotação da prova é de 20 valores.
- Todas as respostas devem ser devidamente justificadas.
- O uso de calculadora é expressamente proibido.
- **Responda ao Grupo I e II numa folha de exame; ao Grupo III noutra folha de exame, e ao Grupo IV noutra folha de exame.**

Grupo I

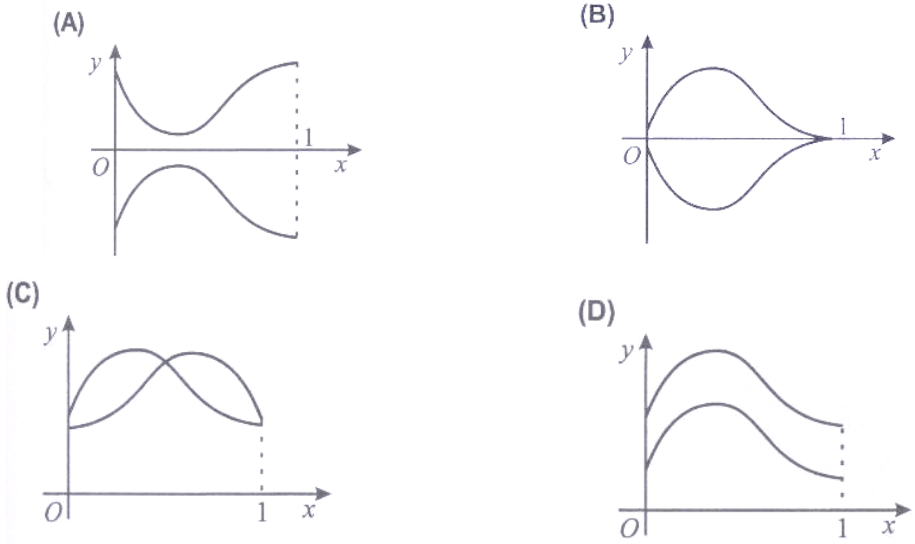
Deve responder às questões deste grupo **sem** apresentar quaisquer cálculos ou justificações

Para cada uma das seguintes questões são indicadas quatro respostas alternativas, das quais **apenas uma** está correcta.
Cada resposta correcta vale *0,75 valores*; por cada resposta errada é descontado *0,25 valores*. Em qualquer caso, a cotação mínima deste grupo será *0 valores*.

1. Sejam f e g duas funções reais de variável real, com domínio $[0,1]$. Sabe-se que

$$f'(x) = g'(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

Em qual das figuras podem estar representados os gráficos de f e g?



2. Seja *f* uma função real de variável real, definida e *contínua* em $\left]-\frac{2}{\pi},\infty\right[$ por

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}+1 & se \quad x\geq 0 \\ k\arccos\left(-\frac{\pi x}{2}\right) & se \quad -\frac{2}{\pi}\leq x<0 \end{cases}$$

2.1. Qual o valor de *k?*

(A) 0 **(B)** $\frac{2}{\pi}$ **(C)** 1 **(D)** $\frac{1}{\pi}$

2.2. Qual o valor do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $-\infty$

2.3. Qual das seguintes equações é uma equação da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $x=1$.

(A) $y=\frac{2}{e}x+1-\frac{1}{e}$ **(B)** $y=1+\frac{1}{e}$

(C) $y=-\frac{1}{e}(x+1)$ **(D)** $y=0$

Grupo II

3. (*4 val.*) Indique o valor lógico das seguintes afirmações **justificando** devidamente a sua opção.

3.1. Se uma função *f* é periódica de período $T>0$, então não é injectiva.

3.2. Seja *f* e *g* duas funções sobrejectivas tal que $f:[-1,1]\to[0,\infty[$ e $g:IR\to]0,\infty[$, então a imagem (ou contradomínio) de $g\circ f$ é $\mathrm{Im}(g\circ f)=]0,\infty[$.

3.3. Se $|f|$ é contínua em *IR* então *f* é contínua em *IR*.

3.4. A inversa da função $f(x)=\frac{\pi}{2}+arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right)$ é a função definida por

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [0,\pi] & \to & [-1,3] \\ & x & \mapsto & 1+2\,sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \end{array}.$$

3.5. Seja *f* uma função contínua no intervalo $[-1,1]$, tal que $f(1)=f(-1)$, então existe $c\in[-1,1]$ tal que $f'(c)=0$.

Grupo III

4. Considere a função *g* definida por $g(x) = \ln(2e^x - 1)$.

a) (*0,75 val.*) Mostre que o domínio de *g* é $]-\ln 2, \infty[$.

b) (*1 val.*) Mostre que $g''(x) = \dfrac{-2e^x}{\left(2e^x - 1\right)^2}$.

c) (*1 val.*) Estude o sentido da concavidade do gráfico de *g*.

d) (*0,75 val.*) Investigue que assímptotas existem para o gráfico de *g*.

5. (*2,5 val.*) Considere um campo aberto, de forma rectangular, que na parte norte está ladeado por um muro (veja a figura).

O dono desse campo tem 500 metros de arame e com esse arame pretende construir uma vedação rectangular. Sendo o muro um dos lados da vedação, qual é a área máxima que ele consegue vedar?

Grupo IV

6. (*1,5 val.*) Determine a função *f* cuja função derivada seja $f'(x) = \dfrac{sen\, x + \cos x}{\cos x}$ tal que $f(0) = 1$.

7. (*5,5 val.*) Calcule as seguintes primitivas:

7.1. $\int x^2 \sqrt{x-1}\, dx$.

7.2. $\int \dfrac{1}{x^2 \sqrt{4x^2 - 9}}\, dx$.

7.3. $\int \dfrac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$.

Bom Trabalho.

Fim.