



Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico de Bragança

Análise Matemática I – Frequência

Data: 22/01/2004

Correcção (EE, EM, EI)

1) *D*. Como $f' = g'$ então f e g são uma primitiva de f' (ou g') em $[0, 1]$, e, consequentemente, diferem em uma constante.

2.1) *B*. Como $f(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Então temos de ter $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \Leftrightarrow \arccos(0) = 1 \Leftrightarrow k = 2/\pi$.

2.2) *C*. Temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+e^x}{e^x} (= \frac{\infty}{\infty})$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{e^x} = 1$.

2.3) *B*. Ora $x = 1$ e $f(1) = 1 + 1/e$, como $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$ tem-se $f'(1) = 0$, portanto $y = 1 + 1/e$ é equação da recta tangente.

3.1) Verdadeira.

f diz-se injectiva se a pontos diferentes do domínio corresponderem imagens distintas, ou seja,

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y), \forall x, y \in D_f \quad (\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in D_f)$$

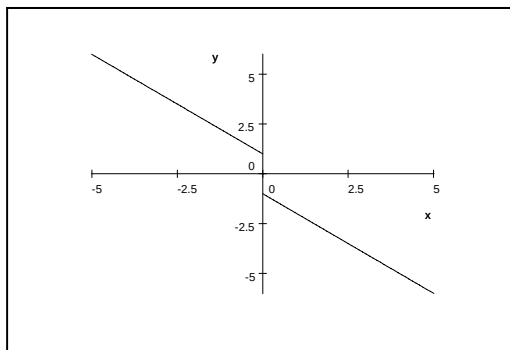
Como por hipótese f é periódica de período T , o gráfico de f repete-se de T em T unidades, isto é, seja $x \in D_f$ então $f(x) = f(x + T)$, onde $x \neq x + T$, o que implica que f não é injectiva.

3.2) Falsa.

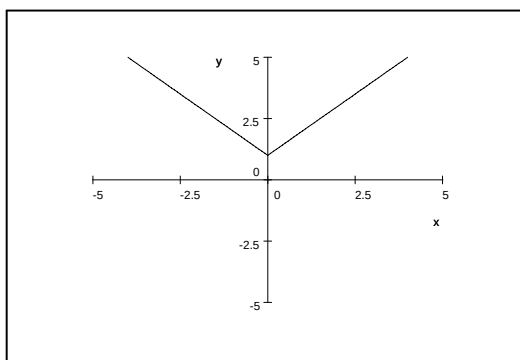
Contra-exemplo: seja $f : [-1, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ uma função sobrejectiva qualquer, e seja $g(x) = e^x$, então $\forall x \in D_{g \circ f}$ tem-se $\text{Im}(g \circ f)(x) \in [1, +\infty[$ Logo $\text{Im}(g \circ f) = [1, +\infty[\neq [0, +\infty[$.

3.3) Falsa.

Contra-exemplo: $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ não é contínua (em $x = 0$)



e $|f(x)| = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ é contínua



3.4) Verdadeira.

$$D_f = [-1, 3], \text{ dado que } -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D'_f = [0, \pi], \text{ dado que } \frac{-\pi}{2} \leq \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} + \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) \leq \pi.$$

A função $f(x)$ é injectiva, logo admite inversa.

$$y = \frac{\pi}{2} + \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\sin\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + 1. \text{ Logo,}$$

$$\begin{array}{ccc} f : & [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 3] \\ & x & \mapsto & 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \end{array}$$

3.5) Falsa.

Contra-exemplo: a função $f(x) = |x|$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 1$, mas não existe $c \in [-1, 1]$ tal que $f'(c) = 0$, pois $f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$ e f não é derivável em $x = 0$. (Caso a função f fosse derivável em $[-1, 1]$, a afirmação seria verdadeira, pelo Teorema de Rolle).

$$4.1) \quad D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2e^x - 1 > 0\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : e^x > \frac{1}{2}\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : \ln e^x > \ln \frac{1}{2}\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > \ln \frac{1}{2}\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > \ln 2^{-1}\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > -\ln 2\}$$

Portanto, $D_g =]-\ln 2, +\infty[$.

$$4.2) \quad g(x) = \ln(2e^x - 1)$$

$$g'(x) = \frac{2e^x}{2e^x - 1}$$

$$g''(x) = \frac{-2e^x}{(2e^x - 1)^2}$$

4.3) $g''(x) \neq 0 \quad \forall x \in]-\ln(2), +\infty[$. Por outro lado, tem-se que $g''(x) < 0 \quad \forall x \in]-\ln(2), +\infty[$, e portanto, a concavidade da função é sempre voltada para baixo.

4.4) **Assíntotas verticais:** só faz sentido estudar para $x \rightarrow -\ln(2)^+$

$$\lim_{x \rightarrow -\ln(2)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\ln(2)^+} \ln(2e^x - 1) = -\infty$$

Portanto, $x = -\ln(2)$ é assíntota vertical unilateral (à direita).

Assíntotas não verticais:

$y = mx + b$, só faz sentido estudar para $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2e^x - 1)}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{(2e^x - 1)} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2e^x - 1) - x \quad (= \infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2e^x - 1) - \ln(e^x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2e^x - 1}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(2 - \frac{1}{e^x}\right) = \ln(2)$$

Portanto, $y = x + \ln(2)$ é assíntota oblíqua.

5) Sejam x, y respectivamente a dimensão da base e da altura do retângulo, respectivamente. Tem-se a restrição $2y + x = 500$. A função a maximizar é $A = xy$.

$$\text{Tem-se } A(y) = 500y - 2y^2$$

$$\text{Portanto } A'(y) = 500 - 4y, \quad A'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 125m.$$

Como $A''(y) = -4 < 0$, tem-se que $y = 125m$ é máximo.

$$\text{A área máxima a vedar é } 125 * 250m^2 = 31250m^2$$

$$6) \quad f(x) = \int \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\cos(x)} dx$$

$$f(x) = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx + \int 1 dx$$

$$f(x) = -\ln |\cos(x)| + x + c$$

$$\text{Agora, } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Portanto } f(x) = -\ln |\cos(x)| + x + 1$$

7.1) Aplica-se o método da primitivação por partes e tem-se:

$$f'(x) = (x-1)^{1/2}; \quad f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$$

$$g(x) = x^2; \quad g'(x) = 2x$$

$$\int x^2(x-1)^{1/2} = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}x^2 - \frac{4}{3} \int x(x-1)^{3/2} dx$$

novamente se aplica o método e tem-se:

$$f'(x) = (x-1)^{3/2}; \quad f(x) = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2}$$

$$g(x) = x; \quad g'(x) = 1$$

$$\int x^2(x-1)^{1/2} = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}x^2 - \frac{4}{3} \left[(2/5)(x-1)^{5/2}x - \frac{2}{5} \int (x-1)^{5/2} dx \right]$$

$$\int x^2(x-1)^{1/2} = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}x^2 - \frac{8}{15}(x-1)^{5/2}x + \frac{16}{105}(x-1)^{7/2} + c.$$

$$7.2) \quad \int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-9}} dx$$

considere-se a substituição $2x = 3 \sec(t)$, portanto $dx = \frac{3}{2} \sec(t) \tan(t) dt$, sendo:

$$\int \frac{\frac{3}{2} \tan(t) \sec(t)}{\frac{9}{4} \sec^2(t) \sqrt{9 \sec^2(t) - 9}} dt = \frac{2}{3} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{\sec^2(t) \sqrt{9(\sec^2(t) - 1)}} dt = \frac{2}{3} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{3 \sec^2(t) \sqrt{\sec^2(t) - 1}} dt$$

$$= \frac{2}{9} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{\sec^2(t) \sqrt{\sec^2(t) - 1}} dt = \frac{2}{9} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{\sec^2(t) \sqrt{\tan^2(t)}} dt$$

$$= \frac{2}{9} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{\sec^2(t) \tan(t)} dt = \frac{2}{9} \int \frac{1}{\sec(t)} dt = \frac{2}{9} \int \cos t \, dt = \frac{2}{9} \operatorname{sen}(t) + c$$

Como $x = \frac{3}{2} \sec(t) \Leftrightarrow \cos(t) = \frac{3}{2x}$, e pela fórmula fundamental da trigonometria tem-se que $\operatorname{sen}(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)}$, então $\operatorname{sen}(t) = \sqrt{1 - \frac{9}{4x^2}}$.

$$\text{Portanto, } \int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-9}} dx = \frac{\sqrt{4x^2-9}}{9x} + c.$$

7.3) Dividindo os polinômios tem-se que

$$x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = (x-2)(x^3 + x^2 - 2x) + (x^2 - 6x + 2)$$

$$\text{Então } \int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int (x-2) dx + \int \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

utilizando a decomposição em frações parciais (neste caso do Tipo I)

$\left(\frac{x^2-6x+2}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}\right)$, pelo Método dos coeficientes indeterminados temos $A = -1$, $B = -1$, $C = 3$, e portanto:

$$\int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{x^3+x^2-2x} dx = \int (x-2)dx - \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + 3 \int \frac{1}{x+2}dx$$

$$\int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{x^3+x^2-2x} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + c.$$