Correcção do Exame de Análise Matemática I – 02/02/04 (EE,EI,EM)

1. (a) $D_f = \{x \in \Re : -1 \leq 2x \leq 1\} = \left\{x \in \Re : \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

   Determine-se o contradomínio de f:

   $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq 2x \leq 1 \Leftrightarrow arcsen(-1) \leq arcsen(2x) \leq arcsen(1) \Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} \leq arcsen(2x) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{4} \leq \frac{1}{2}arcsen(2x) \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq \pi + \frac{1}{2}arcsen(2x) \leq \frac{5\pi}{4}$, portanto $D'_f = \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

   (b) A inversa da função $f(x)$ está definida em $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \longmapsto \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e é dada pela expressão $f^{-1}(x) = \frac{sen(2x-2\pi)}{2}$.

   (c) A equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 0$ é dada por:

   $y - y_1 = m(x - x_1$, onde $y_1 = f(x_1)$ e $m = f'(x_1)$. Assim sendo, tem-se que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}$ logo $m = 1$ e $y_1 = \pi$. Portanto a equação pretendida é $y = x + \pi$

2. (a) Assimptotas verticais:

   $lim_{x\to 1^-} g(x) = lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$

   $lim_{x\to 1^+} g(x) = lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$

   $x = 1$ é assimptota vertical à direita.

   Assimptotas não verticais:

   $m = lim_{\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = lim_{\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = \frac{e^0}{\infty} = 0$

$b = lim_{\pm\infty}\left[g(x) - mx\right] = lim_{\pm\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1$

$y = 1$ é assimptota horizontal do gráfico de g.

(b) Para que g seja contínua à esquerda de $x = 1$ temos que ter

$lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$. Por b) temos que $lim_{x\to 1^-} g(x) = 0$,

logo $g(1) = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Se $k = 0$, g é contínua à esquerda de $x = 1$.

(c) Como função g é descontínua em $x = 1$ não é derivável em $x = 1$, ou

seja não existe $f'(1)$.

(d) $g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$

$g''(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}}$

$g''(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}}$.

(e) $g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x \neq 1$.

Tem-se a tabela do estudo de $g''(x)$

	$-\infty$	$1/2$		1	$+\infty$
g''	$-$	0	$+$	$n.d$	$+$
g	$\cap$	$p.i$	$\cup$	$n.d$	$\cup$

Ponto de inflexão em $x = 1/2$.

Concavidade voltada para baixo $\rightarrow (-\infty, 1/2)$.

Concavidade voltada para cima $\rightarrow (1/2, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. $f(x) = \int \left(\frac{sen(x)}{cos^2(x)} + 3e^{2x} \right) dx$

$f(x) = \int \frac{sen(x)}{cos^2(x)} dx + \int 3e^{2x} dx$

$f(x) = -\int -sen(x) cos^{-2}(x) dx + \frac{3}{2} e^{2x}$

$f(x) = cos^{-1}(x) + \frac{3}{2} e^{2x} + c$

Como $f(0) = 1$ então $1 + \frac{3}{2} + c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{-3}{2}$

Logo $f(x) = \frac{1}{cos(x)} + \frac{3}{2} e^{2x} - \frac{3}{2}$.

4. (a) Aplica-se o método da primitivação por partes e tem-se:

$f'(x) = (x)^{1/2};\ f(x) = (2/3)(x)^{3/2}$

$g(x) = ln(x);\ g'(x) = \frac{1}{x}$

$\int ln(x)(x)^{1/2} = (2/3)(x)^{3/2} ln(x) - (2/3) \int \frac{(x)^{3/2}}{x} dx$

$\int ln(x)(x)^{1/2} = (2/3)(x)^{3/2} ln(x) - (2/3) \int (x)^{1/2} dx$

$\int ln(x)(x)^{1/2} = (2/3)(x)^{3/2} ln(x) - (4/9)(x)^{3/2}$

$\int ln(x)(x)^{1/2} = (2/3)(x)^{3/2} \left(ln(x) - (2/3) \right) + c.$

(b) $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

considere-se a substituição $x = 2sen(t)$,

portanto $dx = 2cos(t)dt$, sendo:

$\int \sqrt{4 - 4sen^2(t)} 2cos(t) dt = 4 \int cos^2(t) dt =$

$4 \int \frac{1 + cos(2t)}{2} dt = 2t + sen(2t) + c$

Como $sen(2t) = 2sen(t)cos(t) = 2\frac{x}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}$ e $t = arcsen(x/2)$,

tem-se que:

$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2arcsen(x/2) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c.$

(c) Dividindo os polinómios tem-se que:

$8x^4 + 6x^2 + x + 1 = (2x)(4x^3 + x) + (x^2 + x + 1)$

Então $\int \frac{8x^4+6x^2+x+1}{4x^3+x}dx = \int(2x)dx + \int \frac{4x^2+x+1}{x(4x^2+1)}dx$

utilizando a decomposição em factores elementares lineares e sem repetição dos termos (Tipo I) $\left(\frac{4x^2+x+1}{x(4x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{4x^2+1}\right)$,tem-se:

$\int \frac{8x^4+6x^2+x+1}{4x^3+x}dx = \int(2x)dx + \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+(2x)^2}dx$

$\int \frac{8x^4+6x^2+x+1}{4x^3+x}dx = x^2 + \frac{1}{2}arctg(2x) + c.$

5. Tem-se as restrições:

$a, b > 0$, a altura e b base do rectângulo, respectivamente.

$4 \times (2a) + 3 \times (2b) = 1200.$

A função a maximizar é $A = ab$.

Tem-se $A(a) = \frac{-4}{3}a^2 + 200a$

Portanto $A'(a) = 200 - \frac{-8}{3}a$, $A'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 75m$.

Como $A''(a) = \frac{-8}{3} < 0$, tem-se que $a = 75m$ é máximo.

As dimensões do terreno são $a = 75m$ e $b = 100m$.

6. (a) Falsa. Contra - exemplo:

Seja f definida em $\Re_0^+ \rightarrow \Re_0^+$ sendo $f(x) = x^2$, f é crescente,

e a sua inversa $f^{-1} = \sqrt{x}$ também é uma função crescente.

(b) Verdadeira. Suponhamos $x_1 \neq x_2 \in D_{g \circ f} \subset D_f$,

como f é injectiva temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$ e como g é injectiva $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$,

logo $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$.

(c) Falsa. Por exemplo $f(x) = |x|$ é contínua mas não é derivável.

(d) Verdadeira. Como f é contínua em $[-1, 1]$ e $1 \in [f(-1), f(1)] = [-1, 2]$ então pelo teorema de Bolzano ou dos Valores Intermédios existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(x) = 1$.

(e) Verdadeira. Como f e g são funções contínuas e deriváveis em $(-2, -1)$, f é decrescente e g crescente no intervalo considerado, tem-se que: $f'(x) < 0$ e $g'(x) > 0$ para $x \in (-2, -1)$, logo $f'(x) < g'(x)$. Em $(-1, 1)$ f é crescente e g é decrescente e portanto $f'(x) > g'(x)$.