



Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico de Bragança

Análise Matemática I – Exame

Duração da prova: 2h 30 min

Data: 26/02/2004

Cursos: EQ, IG, GEI

Observações:

- Desligue o telemóvel.
 - A cotação da prova é de 20 valores.
 - A prova é constituída por sete perguntas.
 - Todas as respostas devem ser devidamente justificadas.
 - Deve responder a cada grupo em folhas de exame separadas.
 - O uso de calculadora é expressamente proibido.
-
-

Grupo I

1) Considere a função definida por $f(x) = \arcsen\left(\frac{4-2x}{3}\right)$.

a) (0,75 val) Calcule os valores de $f\left(\frac{5}{4}\right)$ e $f\left(\frac{8-3\sqrt{2}}{4}\right)$.

b) (0,75 val) Determine o domínio e o contradomínio da função f .

c) (0,75 val) Caracterize a inversa da função f .

2) Considere a função definida por $f(x) = e^{-x}(1+x)$.

a) (0,75 val) Mostre que a recta $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de f .

b) (1 val) Determine, caso existam, os pontos do gráfico de f cuja recta tangente é horizontal.

c) (0,75 val) Mostre que $f''(x) = e^{-x}(x-1)$

d) (0,75 val) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Grupo II

3) (3 val) Investigue a veracidade das seguintes afirmações e **justifique** devidamente a sua opção.

a) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1+e^{2x}}{e^x} = 1+e^x$.

- b) Se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem apenas uma descontinuidade no ponto $x = -1$ então a função definida por $g(x) = f(|x|)$ é contínua (em \mathbb{R})
- c) Se $f'(c) = 0$ então $f(c)$ é um extremo da função f .
- d) O valor de $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ é $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

4) Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{x+2} - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- a) (0,75 val) Verifique se f é contínua no ponto $x = 0$.
- b) (0,5 val) Use a alínea anterior para concluir quanto à diferenciabilidade de f no ponto $x = 0$.
- c) (0,5 val) Note que $f(-1) = f(1) = 0$. O teorema de Rolle permite assegurar a existência de pelo menos um zero da primeira derivada de f no intervalo $[-1, 1]$? Justifique.
- 5) (2,5 val) Pretende-se construir um depósito, com a forma de um paralelepípedo de base quadrada com capacidade para 500 m^3 , de modo a que o seu custo seja mínimo. O preço, por metro quadrado, da base e do topo do depósito é de 50€ enquanto que o das paredes é de 35€. Que dimensões deverá ter o depósito?

.....

Grupo III

6)

- a) (0,75 val) Determine a função f tal que $\int f(x)dx = x(\ln(x) - 1) + C$.
- b) (1 val) Calcule $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ utilizando uma substituição adequada e a alínea anterior, se necessário.

7) (5,5 val) Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int x^3 e^{x^2} dx$

b) $\int \frac{x+5}{x^2 - 2x - 3} dx$

c) $\int \cos^3(x) dx$

Bom trabalho....