Correcção do Exame de Análise Matemática I – 26/02/04 (EQ,IG,GEI)

Grupo I

1. Seja, $f(x) = \arcsin\left(\frac{4-2x}{3}\right)$

a) Calcule $f\left(\frac{5}{4}\right)$ e $f\left(\frac{8-3\sqrt{2}}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{4}\right) &= \arcsin\left(\frac{4-2\left(\frac{5}{4}\right)}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{4-\frac{5}{2}}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{8-5}{6}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{8-3\sqrt{2}}{4}\right) &= \arcsin\left(\frac{4-2\left(\frac{8-3\sqrt{2}}{4}\right)}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{4-\left(\frac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)}{3}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{8-(8-3\sqrt{2})}{6}\right) = \arcsin\left(\frac{8-8+3\sqrt{2}}{6}\right) = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{6}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

b) Determine o domínio e contradomínio de f .

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathfrak{R} : -1 \leq \frac{4-2x}{3} \leq 1\right\} = \{x \in \mathfrak{R} : -3 \leq 4-2x \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathfrak{R} : -7 \leq -2x \leq -1\} = \{x \in \mathfrak{R} : 1 \leq 2x \leq 7\} \\ &= \left\{x \in \mathfrak{R} : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \end{aligned}$$

CD_f : Como o argumento $\frac{4-2x}{3}$ é linear, $CD_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

c) Caracterize a inversa da função f .

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{4-2x}{3}\right) = y \Leftrightarrow \frac{4-2x}{3} = \sin(y) \\ &\Leftrightarrow 4-2x = 3\sin(y) \Leftrightarrow -2x = -4 + 3\sin(y) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4-3\sin(y)}{2} \end{aligned}$$

conclusão:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & \frac{4-3\sin(x)}{2} \end{array}$$

2. Seja $f(x) = e^{-x}(1+x)$

a) Mostre que a recta $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de f .

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x) \frac{1}{e^x} = -\infty(+\infty) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{e^x}\right)$ obtem-se uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e aplicando a regra

de Cauchy obtemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$

$\therefore y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$

b) Determine, caso existam, os pontos do gráfico de f cuja recta tangente é horizontal.

Isto é, pretende-se determinar os pontos $(a, f(a))$ tal que $f'(a) = 0$.

Temos $f'(x) = -e^{-x}(1+x) + e^{-x} = e^{-x}(-1-x+1) = -xe^{-x}$ então

$-xe^{-x} = 0 \implies x = 0$ pois $e^{-x} \neq 0, \forall x \in \mathfrak{R}$

Conclusão: o ponto do gráfico de f cuja recta tangente é horizontal é $(0, f(0)) = (0, 1)$.

c) Mostre que $f'' = e^{-x}(x - 1)$.

Da alínea anterior temos que $f'(x) = -xe^{-x}$ então

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x} - x(-1)e^{-x} \\ &= -e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x - 1) \text{ c.q.d.} \end{aligned}$$

d) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

$$f''(x) = 0 \iff e^{-x}(x - 1) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

	$-\infty$	1	$-\infty$
sinal de f''	-	0	+
concavidade de f	$\cap$		$\cup$

Conclusão:

f tem concavidade virada para baixo se $x \in]-\infty, 1[$,

f tem concavidade virada para cima se $x \in]1, +\infty[$ e

$x = 1$ é um ponto de inflexão.

Grupo II

3. Investigue a veracidade das seguintes afirmações e justifique devidamente a sua opção.

a) Para $\forall x \in \mathfrak{R}, \frac{1 + e^{2x}}{e^x} = 1 + e^x$.

$$\begin{aligned} \frac{1 + e^{2x}}{e^x} = 1 + e^x &\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} = 1 + e^x \Leftrightarrow e^{-x} + e^{2x-x} = 1 + e^x \\ &\Leftrightarrow e^{-x} + e^x = 1 + e^x \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \\ &\Leftrightarrow -x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Conclusão: a igualdade só é válida para $x = 0$ logo a afirmação é falsa.

b) Se uma função $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tem apenas uma descontinuidade no ponto $x = -1$ então a função definida por $g(x) = f(|x|)$ é contínua (em $\mathfrak{R}$).

As funções f e g coincidem no intervalo $[0, +\infty[$ pois $g(x) = f(|x|) = f(x)$ e g é par ($g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$), então o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos y 's. Como f é contínua no intervalo $[0, +\infty[$ logo $g(x)$ é contínua em $\mathfrak{R}$.

c) Se $f'(c) = 0$ então $f(c)$ é um extremo da função f .

Falso, por $f'(c) = 0$ não se pode concluir que $f(c)$ seja um extremo da função f .

Por exemplo, $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$ mas $f(0)$ não é nem máximo nem mínimo de f , logo não é um extremo.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Verdade, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}} = (\text{indeterminação } 1^\infty)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \cos(x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$\text{C.A.: } \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\cos(x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln(\cos(x)) \right) =$$

(indeterminação $\infty \times 0$)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos(x))}{x} \right) \\
&\text{(indeterminação } \frac{0}{0}, \text{ aplicando a regra de Cauchy)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}}{1} \right) = 0 \\
&\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ c.q.d..}
\end{aligned}$$

4. Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{x+2} - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

a) Verifique se f é contínua no ponto $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x+2} - 1 \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)e^x = -1$$

Conclusão: como os limites são diferentes então a função não é contínua em $x = 0$.

b) Use a alínea anterior para concluir quanto à diferenciabilidade de f no ponto $x = 0$.

A função não é diferenciável em $x = 0$ porque não é contínua em $x = 0$.

c) Note que $f(-1) = f(1) = 0$. O teorema de Rolle permite assegurar a existência de pelo menos um zero da primeira derivada de f no intervalo $[-1, 1]$? Justifique.

É condição necessária para aplicar o teorema que a função seja contínua em $[-1, 1]$ e derivável em $] -1, 1[$, o que neste caso não acontece (alíneas a) e b) respectivamente), logo não se pode aplicar o teorema e, portanto, não está assegurada a existência de um zero da derivada em $[-1, 1]$.

5. Pretende-se construir um depósito, com a forma de um paralelepípedo de base

quadrada com capacidade para $500m^3$, de modo a que o seu custo seja mínimo.

O preço, por metro quadrado, da base e do topo do depósito é de 50 euros enquanto que o das paredes é de 35 euros. Que dimensões deverá ter o depósito?

Consideremos um paralelepípedo de base quadrada e seja x a largura da base e y a altura do depósito, então $x, y > 0$.

Temos que

$$V = xxy = x^2y = 500m^3 \therefore y = \frac{500}{x^2}$$

então a função a minimizar é dada por:

$$C = 50 \times 2x^2 + 35 \times 4xy = 100x^2 + 140x \frac{500}{x^2} = 100x^2 + \frac{70000}{x}$$

Seja $C(x) = 100x^2 + \frac{70000}{x}$ temos

$$C'(x) = 200x - \frac{70000}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 200x - \frac{70000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{200x^3 - 70000}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 200x^3 - 70000 = 0 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 350 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{350}.$$

Assim,

	0	$\sqrt[3]{350}$	
C'	-	0	+
C	$\searrow$	Min.	$\nearrow$

Conclusão: as dimensões que minimizam o custo do depósito são $x = \sqrt[3]{350}m$ e

$$y = \frac{500}{(350)^{\frac{2}{3}}}m.$$

Grupo III

6. a) Determine a função f tal que $\int f(x)dx = x(\ln(x) - 1) + C$.

Se $\int f(x)dx = x(\ln(x) - 1) + C$ então

$$\begin{aligned} f(x) &= (x(\ln(x) - 1) + C)' = \ln(x) - 1 + x \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x) \end{aligned}$$

b) Calcule $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ utilizando uma substituição adequada e a alínea anterior, se necessário.

Substituindo $\sqrt{x} = t$ então $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Leftrightarrow dx = 2tdt$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\ln(t)}{t} 2tdt = 2 \int \ln(t)dt$$

e, pela alínea anterior, temos que

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \ln(x)dx = x(\ln(x) - 1) + C \text{ logo} \\ 2 \int \ln(t)dt &= 2t(\ln(t) - 1) + C = 2\sqrt{x}(\ln(\sqrt{x}) - 1) + C \\ &= 2\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\ln(x) - 1\right) + C = \sqrt{x}(\ln(x) - 2) + C \end{aligned}$$

7. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int x^3 e^{x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int x^2 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + C \\ &= \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{x+5}{x^2-2x-3} dx$$

C.A.:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

$$\frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{x+5}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+5 = A(x+1) + B(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x+5 = x(A+B) + A - 3B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = A+B \\ 5 = A-3B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x+5}{x^2-2x-3} dx &= \int \frac{2}{x-3} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= 2 \ln|x-3| - \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \cos^3(x) dx$$

$$\int \cos^3(x) dx = \int \cos(x) \cos^2(x) dx$$

$$= \int \cos(x) (1 - \sin^2(x)) dx$$

$$= \int \cos(x) dx - \int \cos(x) \sin^2(x) dx$$

$$= \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$