



Instituto Politécnico de Bragança
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Análise Matemática I – Frequência

Duração da prova: 2h 30 min

Data: 22/01/2004

Tolerância: 15 min

Cursos: EQ, IG, GEI

Número: _____

Curso: _____

Nome: _____

.....
Observações:

- **Desligue o telemóvel.**
 - A cotação da prova é de 20 valores.
 - A prova é constituída por seis perguntas.
 - Todas as respostas devem ser devidamente **justificadas**.
 - Deve responder a cada grupo em folhas de exame separadas.
 - O uso de calculadora é expressamente proibido.
-

Grupo I

1) Considere a função definida por $g(x) = \pi - \arccos\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$.

- (1 val) Determine o domínio e o contradomínio da função g .
- (0,5 val) Calcule, caso existam, os zeros de g .
- (0,5 val) Mostre que a função g é par.
- (0,5 val) Comente a afirmação: “A função g não admite inversa.”
- (1,5 val) Considere a função g restrita ao subconjunto não negativo de D_g e caracterize a sua inversa.

2) (3 val) Indique o valor lógico das seguintes afirmações **justificando** devidamente a sua opção.

a) Para que uma função seja contínua num ponto basta que os limites laterais nesse ponto existam.

b) Uma função contínua não pode ter assíptotas verticais.

c) Considere a função $f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Como $(xe^x)' = (1+x)e^x$ então

$$f'(0) = (1+0)e^0.$$

d) O valor de $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ é 1.

.....

Grupo II

3) Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad g(x) = \ln(x)$$

a) (1 val) Determine o domínio da função $f \circ g$ pela definição e calcule $(f \circ g)(e^2)$.

b) (1 val) Estude a monotonia e os extremos de f .

c) (0,75 val) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 1$

d) (0,75 val) Mostre que a função f satisfaz as condições do Teorema dos Valores Intermédios (ou Teorema de Bolzano) no intervalo $[0,1]$ e conclua que ele garante a existência de um elemento $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = \frac{1}{4}$.

4) (2,5 val) Determine dois números positivos, a e b , cujo produto seja quatro e que minimizam a soma dos seus quadrados, $a^2 + b^2$.

.....

Grupo III

5) (1,5 val) Determine uma função F cuja derivada seja $f(x) = \frac{1}{x+2} - e^{2(x+1)}$ e tal que

$$\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = 5.$$

6) Calcule as seguintes primitivas:

a) (1,5 val) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ fazendo uma substituição adequada

b) (2 val) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

c) (2 val) $\int \frac{x^4 + 6x^2 + x + 8}{x^3 + 4x} dx$