Instituto Politécnico de Bragança
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Análise Matemática I – Frequência

Duração da prova: *2h 30 min* **Data:** 22/01/2004

Tolerância: *15 min* **Cursos:** EQ, IG, GEI

Resolução

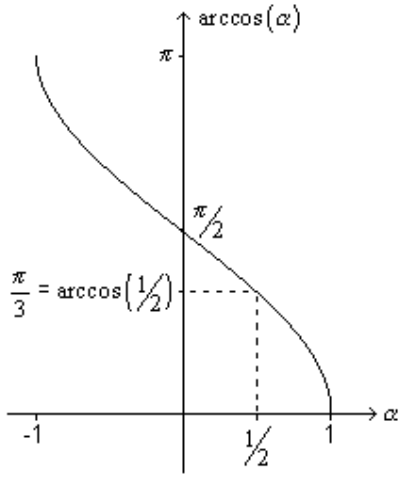
Grupo I

1) Considere a função definida por $g(x)=\pi-\arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$.

a) (1 val) Determine o domínio e o contradomínio da função g.

$$D_g=\left\{x\in R:-1\le x^2+\frac{1}{2}\le 1\right\}$$
$$=\left\{x\in R:-\frac{3}{2}\le x^2\le\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\left\{x\in R:-\sqrt{\frac{1}{2}}\le x\le\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$=\left\{x\in R:-\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$CD_g=?$



Para $x\in D_g$, resulta que: $\frac{1}{2}\le x^2+\frac{1}{2}\le 1$

Logo, $\arccos(1)\le\arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\le\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow 0\le\arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\le\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\le-\arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\le 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}\le\underbrace{\pi-\arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}_{g(x)}\le\pi \quad\rightarrow\quad CD_g=\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$$

b) (0,5 val) Calcule, caso existam, os zeros de g.

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \pi-\arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=\pi$$
$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}=\cos(\pi)$$
$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}=-1$$
$$\Leftrightarrow x^2=-\frac{3}{2} \qquad \rightarrow \qquad \text{Imp.}$$

Logo, g não tem zeros.

c) (0,5 val) Mostre que a função g é par.

$$g(-x)=\pi-\arccos\left((-x)^2+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\pi-\arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$$
$$=g(x)$$

Como $g(x)=g(-x)$, $\forall x\in D_g$, resulta que a função g é par.

d) (0,5 val) Comente a afirmação: *"A função g não admite inversa."*

A afirmação é falsa.
Pela alínea *c* sabe-se que a função *g* é par, logo não é injectiva. Como não é injectiva também não pode ser invertível.

e) (1,5 val) Considere a função g <u>restrita ao subconjunto não negativo</u> de D_g e caracterize a sua inversa.

$$g(x)=y \Leftrightarrow \pi-\arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=y$$

$$\Leftrightarrow \arccos\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=\pi-y$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}=\cos(\pi-y)$$

$$\Leftrightarrow x^2=\cos(\pi-y)-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{\cos(\pi-y)-\frac{1}{2}}\ ,\quad \text{porque } x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{-\cos(y)-\frac{1}{2}}\ ,\quad \text{porque } \cos(\pi-y)=-\cos(y)$$

O contradomínio da inversa de *g* é o domínio de *g*, que pelo enunciado é o subconjunto não negativo do D_g, ou seja, $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Para este domínio de *g*, o contradomínio mantém-se o mesmo, uma vez que *g* é par. Logo, o domínio da inversa de *g* é $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$.

Caracterização:

$$g^{-1}:\ \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right] \ \rightarrow\ \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$x \ \rightarrow\ \sqrt{-\cos(x)-\frac{1}{2}}$$

2) (3 val) Indique o valor lógico das seguintes afirmações **justificando** devidamente a sua opção.

a) Para que uma função seja contínua num ponto basta que os limites laterais nesse ponto existam.

Afirmação falsa.

Seja $f(x)=\begin{cases}1 & ,x=0\\ 0 & ,x\neq 0\end{cases}$.

Os limites laterais em $x = 0$ existem e são iguais a zero, no entanto a função não é continua porque não se tem $\underbrace{\lim_{x\to 0} f(x)}_{0}=\underbrace{f(0)}_{1}$.

b) Uma função contínua não pode ter assímptotas verticais.

Afirmação falsa.

Considere-se a função $f(x)=\frac{1}{x}$. Esta função é continua (em todo o seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) e no entanto tem uma assimptota vertical, $x=0$.

c) Considere a função $f(x)=\begin{cases} xe^x & se \quad x\geq 0 \\ \frac{1}{x-2} & se \quad x<0 \end{cases}$. Como $(xe^x)'=(1+x)e^x$ então $f'(0)=(1+0)e^0$.

Afirmação falsa.

Para se obter $f'(0)$ é necessário recorrer à definição de derivada num ponto, uma vez que f muda de ramo em $x=0$, ou seja, tem de se verificar se as derivadas laterais são iguais ou não.

d) O valor de $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ é 1.

Afirmação verdadeira.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} \overset{(1^\infty)}{=} \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos(x))\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x}} \underset{R.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{1}} = e^{-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}} = e^0 = 1$$

…….

Grupo II

3) Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1} \qquad \text{e} \qquad g(x)=\ln(x)$$

a) (1 val) Determine o domínio da função $f\circ g$ pela definição e calcule $(f\circ g)(e^2)$.

$$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}^+ \wedge \ln(x)\in\mathbb{R}\}$$

$$=\mathbb{R}^+$$

C.A. $\begin{cases} D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: \underbrace{x^2+1\neq 0}_{c.u.}\right\}=\mathbb{R} \\ D_g=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}=\mathbb{R}^+ \end{cases}$

$$(f\circ g)(e^2)=f\left(g\left(e^2\right)\right)=f\left(\ln\left(e^2\right)\right)=f(2)=\frac{4}{5}$$

b) (1 val) Estude a monotonia e os extremos de f.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \wedge \underbrace{\left(x^2+1\right)^2\neq 0}_{\text{Cond. Universal}} \Leftrightarrow x=0$$

		0	
Sinal de $f'(x)$	-	0	+
Monotonia de $f(x)$	↘	*Min.*	↗

Resposta:

- f é decrescente em $]-\infty;0[$
- f é crescente em $]0;+\infty[$
- f tem um mínimo em $x=0$, que é $f(0)=0$.

c) (0,75 val) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x=1$

A equação da recta é: $y=mx+b$

$m=f'(1)=\dfrac{2}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2}$

$y=f(1)=\dfrac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\in recta \;\rightarrow\; \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}1+b \Leftrightarrow b=0$

A equação da recta tangente a f em $x=1$ é: $y=\dfrac{1}{2}x$

d) (0,75 val) Mostre que a função f satisfaz as condições do Teorema dos Valores Intermédios (ou Teorema de Bolzano) no intervalo $[0,1]$ e conclua que ele garante a existência de um elemento $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=\dfrac{1}{4}$.

- f é continua, porque é o quociente entre dois polinómios (funções continuas) em que o denominador nunca se anula.
- $[0,1]$ é um intervalo fechado.
- $f(0)=0$
- $f(1)=\dfrac{1}{2}$

Então, pelo Teorema de Bolzano, *f* assume todos os valores entre 0 e $\dfrac{1}{2}$, i.e.,

$$\forall y\in\left[0;\frac{1}{2}\right],\ \exists x\in[0;1]:\ f(x)=y$$

Como $\dfrac{1}{4}\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, então *f* assume o valor $\dfrac{1}{4}$, i.e., $\exists c\in[0;1]:\ f(c)=\dfrac{1}{4}$.

4) (2,5 val) Determine dois números positivos, a e b, cujo produto seja quatro e que minimizam a soma dos seus quadrados, $a^2 + b^2$.

Pretende-se minimizar a função: $f = a^2 + b^2$, em que $a > 0$ e $b > 0$.

Como $a \cdot b = 4 \Leftrightarrow b = \frac{4}{a}$, então $f(a) = a^2 + \frac{16}{a^2}$.

Pontos críticos:

$$f'(a) = 2a - \frac{32}{a^3} = \frac{2a^4 - 32}{a^3}$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{2a^4 - 32}{a^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^4 - 32 = 0 \wedge a^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 = 16 \wedge a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \quad \text{porque } a > 0$$

a	0	2	$+\infty$
Sinal de $f'(a)$	-	0	+
Monotonia de $f(a)$	↘	*Min.*	↗

Resposta:

A soma é mínima quando $a = 2$ e $b = \frac{4}{2} = 2$.

……

Grupo III

5) (1,5 val) Determine uma função F cuja derivada seja $f(x)=\frac{1}{x+2}-e^{2(x+1)}$ e tal que $\lim_{x\to -1} F(x)=5$.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{1}{x+2}-e^{2(x+1)}dx=\int \frac{1}{x+2}dx-\int e^{2(x+1)}dx=\ln|x+2|-\frac{1}{2}\int 2e^{2(x+1)}dx=$$

$$=\ln|x+2|-\frac{1}{2}e^{2(x+1)}+c$$

$$\lim_{x\to -1} F(x)=5 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\left(\ln|x+2|-\frac{1}{2}e^{2(x+1)}+c\right)=5$$

$$\Leftrightarrow \ln(1)-\frac{1}{2}e^{0}+c=5$$

$$\Leftrightarrow 0-\frac{1}{2}+c=5$$

$$\Leftrightarrow c=\frac{11}{2}$$

Logo, a função procurada é: $F(x)=\ln|x+2|-\frac{1}{2}e^{2(x+1)}+\frac{11}{2}$

6) Calcule as seguintes primitivas:

a) (1,5 val) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ fazendo uma substituição adequada

Uma substituição a fazer pode ser: $t=\sqrt{x}$.

$$t=\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad dt=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2dt=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

Substituindo, vem:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int \sqrt{1+t}\ 2\,dt=2\int (1+t)^{1/2}dt=2\frac{(1+t)^{3/2}}{3/2}+c$$

$$=\frac{4}{3}(1+t)\sqrt{1+t}+c=\frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$$

b) (2 val) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \underbrace{x^2}_{g}\,\underbrace{x\left(-x^2\right)^{-1/2}}_{f'}\,dx$$

$$= -x^2\left(1-x^2\right)^{1/2} - \int -\left(1-x^2\right)^{1/2} 2x\,dx$$

$$= -x^2\left(1-x^2\right)^{1/2} + 2\int x\left(1-x^2\right)^{1/2}\,dx$$

$$= -x^2\left(1-x^2\right)^{1/2} + 2\left(-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\right) + c$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2} + c$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + c$$

$$f(x) = \int x\left(1-x^2\right)^{-1/2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x}_{u'}\left(\underbrace{1-x^2}_{u}\right)^{-1/2} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{1/2}$$

$$= -\left(1-x^2\right)^{1/2}$$

c) (2 val) $\int \frac{x^4+6x^2+x+8}{x^3+4x}\,dx$

Como o grau do numerador é maior que o do denominador, tem que se dividir os polinómios,

$$\begin{array}{r|l} x^4+0x^3+6x^2+x+8 & x^3+4x \\ \hline -x^4 \quad -4x^2 & x \\ \hline 2x^2+x+8 & \end{array} \qquad \rightarrow \quad x^4+6x^2+x+8 = x\left(x^3+4x\right)+2x^2+x+8$$

Logo,

$$\frac{x^4+6x^2+x+8}{x^3+4x} = x + \frac{2x^2+x+8}{x^3+4x} \text{ e portanto,}$$

$$\int \frac{x^4+6x^2+x+8}{x^3+4x}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{2x^2+x+8}{x^3+4x}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{2x^2+x+8}{x^3+4x}\,dx \quad (*)$$

Ora,

$$\frac{2x^2+x+8}{x^3+4x} = \frac{2x^2+x+8}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{\left(A+B\right)x^2+Cx+4A}{x\left(x^2+4\right)}$$

Para esta igualdade ser verificada tem que se ter:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ C=1 \\ 4A=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=0 \\ C=1 \\ A=2 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+x+8}{x^3+4x}dx &= \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{1}{x^2+4}dx \\ &= 2\ln|x| + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}dx \\ &= 2\ln|x| + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx \\ &= 2\ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx \\ &= 2\ln|x| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Substituindo em (*), vem que:

$$\int \frac{x^4+6x^2+x+8}{x^3+4x}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

#