



Resolução do exame

Grupo I

1) Considere a função definida por $g(x) = \arcsen|2x+1|$.

a) (0,5 val) Determine o domínio da função g .

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq |2x+1| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |2x+1| \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x+1 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq 2x \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\} \\ &= [-1, 0] \end{aligned}$$

b) (0,75 val) Resolva a equação $g(x) = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{\pi}{6} &\Leftrightarrow \arcsen|2x+1| = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow |2x+1| = \sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\Leftrightarrow |2x+1| = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x+1 = -\frac{1}{2} \vee 2x+1 = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x = -\frac{3}{2} \vee 2x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \vee x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Logo $\left\{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$ é solução de $g(x) = \frac{\pi}{6}$.

c) (0,5 val) Use a alínea anterior para justificar que a função g não admite inversa.

Vimos na alínea anterior que a equação $g(x) = \frac{\pi}{6}$ admite duas soluções distintas, pelo que a função g não é injectiva e consequentemente não admite inversa.

d) (1,25 val) Considere a função g restrita ao subconjunto $A = \left\{ x \in D_g : 2x+1 \geq \frac{1}{2} \right\}$ e

caracterize a sua inversa.

Designemos por f a função que se obtém fazendo a restrição de g ao subconjunto A .

Então,

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow CD_f \\ x &\mapsto \arcsen|2x+1| \end{aligned}$$

onde:

$$A = \left\{ x \in D_g : 2x+1 \geq \frac{1}{2} \right\} = \left\{ x \in [-1,0] : 2x+1 \geq \frac{1}{2} \right\} = \left\{ x \in [-1,0] : x \geq -\frac{1}{4} \right\} = \left[-\frac{1}{4}, 0 \right]$$

$$\text{e } CD_f = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ pois } x \in A \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 2x+1 \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq |2x+1| \leq 1$$

$$\Rightarrow \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \leq \arcsen|2x+1| \leq \arcsen(1)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \arcsen|2x+1| \leq \frac{\pi}{2}$$

Objectivo: caracterizar f^{-1} .

Comecemos por determinar a expressão analítica da função inversa

$$\arcsen|2x+1| = y \Leftrightarrow |2x+1| = \sen(y)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = \sen(y) \text{ porque } 2x+1 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -1 + \sen(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sen(y)}{2}$$

Conclusão:

$$\begin{aligned} f^{-1}: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right] &\rightarrow \left[-\frac{1}{4}, 0 \right] \\ x &\mapsto \frac{-1 + \sen(x)}{2} \end{aligned}$$

2) (4 val) Investigue a veracidade das seguintes afirmações e **justifique** devidamente a sua opção.

a) Para quaisquer x e y não negativos, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$.

Falso, por exemplo escolhendo $x = 3$ e $y = 4$ temos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 7 = 3 + 4 = x + y$$

b) A função $f(x) = \begin{cases} 1 + x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, é contínua em $\mathbb{R}$.

Verdadeira. Para $x \neq 0$, $f(x) = 1 + x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ é contínua porque é produto e composta de

funções contínuas. Em $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ pois

$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ é uma função limitada (varia entre

-1 e 1). Mas então temos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$, isto é, f é contínua em $x = 0$. Logo

f é contínua em $\mathbb{R}$.

c) Se f é uma função tal que $f'(x) \neq 0$ então f não tem pontos extremos.

Falsa. Basta pensarmos na função $f(x) = |x|$ que tem um extremo em $x = 0$ e no entanto a

sua derivada é sempre não nula, $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

d) O valor de $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} = e$.

Verdadeira pois $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1}} \stackrel{\text{Regra de Cauchy}}{=} e^1 = e$.

e) Para qualquer função $\int f^2(x) dx = \left(\int f(x) dx\right)^2$.

Falsa. Por exemplo, escolhendo $f(x) = 1$ temos que $\int f^2(x) dx = \int 1 dx = x + C$ e

$$\left(\int f(x) dx\right)^2 = \left(\int 1 dx\right)^2 = (x + C)^2$$

Grupo II

3) Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$$

a) (0,5 val) Mostre que o gráfico de f tem uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x} = 0. \text{ Logo a recta}$$

de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.

b) (1 val) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 0$.

A equação da recta é $y = mx + b$.

$$f'(x) = \frac{e^x e^{2x} - 2e^{2x}(e^x - 1)}{(e^{2x})^2} = \frac{-e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x}(-e^x + 2)}{(e^{2x})^2} = \frac{2 - e^x}{e^{2x}}$$

$$m = f'(0) = \frac{2 - e^0}{e^0} = \frac{2 - 1}{1} = 1$$

$$(0, f(0)) = (0, 0) \in \text{à recta} \quad \therefore 0 = 1 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$$

Logo a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é $y = x$.

c) (0,75 val) Mostre que $f''(x) = \frac{e^x - 4}{e^{2x}}$.

$$\text{Vimos na alínea anterior que } f'(x) = \frac{2 - e^x}{e^{2x}}.$$

$$f''(x) = \frac{-e^x e^{2x} - 2e^{2x}(2 - e^x)}{(e^{2x})^2} = \frac{-4e^{2x} + e^{3x}}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x}(-4 + e^x)}{(e^{2x})^2} = \frac{e^x - 4}{e^{2x}}.$$

d) (0,75 val) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 4}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 \wedge \underbrace{e^{2x} \neq 0}_{\text{universal}} \Leftrightarrow x = \ln 4.$$

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
Sinal de f'''	$-$	0	$+$
Concavidade de f	$\cap$		$\cup$

f tem concavidade voltada para baixo se $x \in]-\infty, \ln 4[$

f tem concavidade voltada para cima se $x \in]\ln 4, +\infty[$

$x = \ln 4$ é um ponto de inflexão.

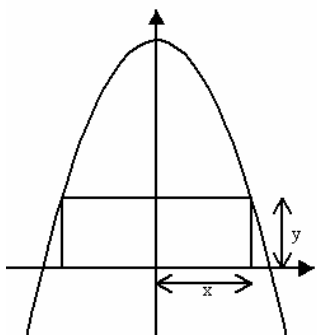
- 4) (1 val) Considere a função $f(x) = e^{x^2+5x+6} - 1$. Mostre que esta função satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3, -2]$ e conclua que ele garante a existência de um elemento $c \in]-3, -2[$ tal que $f'(c) = 0$.

A função f satisfaz as seguintes condições:

- contínua (composta de uma função exponencial com uma função polinomial adicionada de uma constante) no intervalo fechado $[-3, -2]$;
- derivável no intervalo aberto $]-3, -2[$, $f'(x) = (2x + 5)e^{x^2+5x+6}$ e
- $f(-3) = f(-2) = 0$.

Então pelo teorema de Rolle fica assegurado a existência de um elemento $c \in]-3, -2[$ tal que $f'(c) = 0$.

- 5) (2,5 val) Qual a área máxima dos rectângulos com dois vértices no eixo das abcissas e os outros dois vértices na curva de equação $y = 4 - x^2$ e ordenada positiva?



Identificação das variáveis:

- x metade do comprimento do rectângulo;
- y altura do rectângulo.

Restrições das variáveis:

- $0 < x < 2$ (os zeros de y são -2 e 2)
- $0 < y < 4$ (4 é o valor máximo da parábola)
- $y = 4 - x^2$

Função a maximizar:

Função área do rectângulo: $2xy = 2x(4 - x^2)$

Defina-se $A(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$.

Pontos críticos de A :

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 8 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
não faz sentido
para o problema

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2
Sinal de A'		+	0	-	
Monotonia de A	s.s.				s.s.

s.s. – sem sentido para o problema.

Em $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ a função área atinge o seu valor máximo.

Resposta:

0A área máxima é $A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9}$ unidades de área.

Grupo III

- 6) (1,5 val) Determine a função f cuja derivada é $f'(x) = \frac{x}{1+x^4}$ e que verifica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$f(x) = \int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \arctg(x^2) + C$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \arctg(x^2) + C \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x^2)}_{\frac{\pi}{2}} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Logo } f(x) = \frac{1}{2} \arctg(x^2) - \frac{\pi}{4}.$$

7) (5,5 val) Calcule as seguintes primitivas:

a)

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{g'} \underbrace{\sqrt{1-2x}}_{f'} dx &= -\frac{x(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} - \int -\frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} dx \\ &= -\frac{x(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{6} \int -2(1-2x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= -\frac{x(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(1-2x)^{\frac{5}{2}}}{15} + C \end{aligned} \quad \begin{aligned} f(x) &= \int \sqrt{1-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int -2\sqrt{1-2x} dx \\ &= -\frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{x^3 - x^2 - 3x - 10}{x^2(x-5)} dx = \int \frac{x^3 - x^2 - 3x - 10}{x^3 - 5x^2} dx$$

Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, tem que se começar por dividir os polinómios:

$$\begin{array}{r} x^3 \quad -x^2 \quad -3x \quad -10 \quad | \quad x^3 \quad -5x^2 \\ -x^3 \quad 5x^2 \quad \quad \\ \hline 4x^2 \quad -3x \quad -10 \end{array} \quad 1$$

Logo,

$$\frac{x^3 - x^2 - 3x - 10}{x^3 - 5x^2} = 1 + \frac{4x^2 - 3x - 10}{x^3 - 5x^2} = 1 + \frac{4x^2 - 3x - 10}{x^2(x-5)}$$

e portanto

$$\int \frac{x^3 - x^2 - 3x - 10}{x^2(x-5)} dx = \int 1 dx + \int \frac{4x^2 - 3x - 10}{x^2(x-5)} dx = x + \int \frac{4x^2 - 3x - 10}{x^2(x-5)} dx \quad (*)$$

Ora,

$$\frac{4x^2 - 3x - 10}{x^2(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5} = \frac{(A+C)x^2 + (-5A+B) - 5B}{x^2(x-5)}$$

para esta igualdade se verificar temos que ter

$$\begin{cases} A+C=4 \\ -5A+B=-3 \\ -5B=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$$

Assim,

$$\int \frac{4x^2 - 3x - 10}{x^2(x-5)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{3}{x-5} dx = \ln|x| - \frac{2}{x} + 3\ln|x-5|$$

Substituindo em (*) vem que:

$$\int \frac{x^3 - x^2 - 3x - 10}{x^2(x-5)} dx = x + \int \frac{4x^2 - 3x - 10}{x^2(x-5)} dx = x + \ln|x| - \frac{2}{x} + 3 \ln|x-5| + C$$

c)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) dx &= \int \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}(x) (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}(x) \cos^2(x) dx + \int \operatorname{sen}(x) \cos^4(x) dx \\ &= - \int -\operatorname{sen}(x) \cos^2(x) dx - \int -\operatorname{sen}(x) \cos^4(x) dx \\ &= -\frac{\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C \end{aligned}$$

Fim...