

Escola Superior de Tecnologia e de Gestão  
Instituto Politécnico de Bragança

## ANÁLISE MATEMÁTICA I

Exame 1ª época: 24 de Janeiro de 2003  
Cursos: EC, EE, EI, EM e EQ.

Duração da prova: **2h 30min.**

### Observações:

- Desligue o telemóvel.
- A cotação da prova é de 20 valores.
- A prova é constituída por quatro grupos.
- Com excepção das respostas do grupo I, todas as restantes devem ser devidamente justificadas.
- Apresente as respostas dos **grupos I e II na mesma folha** de exame e as respostas dos **restantes grupos em folhas de exame diferentes**.
- O uso de calculadora é proibido.

### Grupo I

Para cada uma das seguintes questões são indicadas quatro alternativas, das quais **apenas uma** está correcta.

Cada resposta correcta vale *0,75 valores*.

**Atenção!** Uma ausência de resposta é preferível a uma resposta errada: por cada resposta errada será descontado um terço da cotação da resposta certa.

(A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

1. O domínio da função definida por  $f(x) = 2\arcsen|2x - 1|$  é:

a)  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

b)  $[-1, 1]$ .

c)  $[0, 1]$ .

d)  $[-\pi, \pi]$ .

2. O valor do limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$  é:

a) a derivada da função  $\sqrt{x}$  em  $x = 1$ .

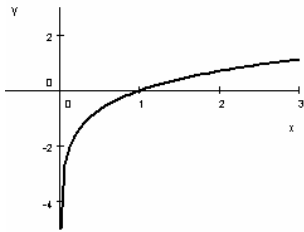
b) 0.

c) 1.

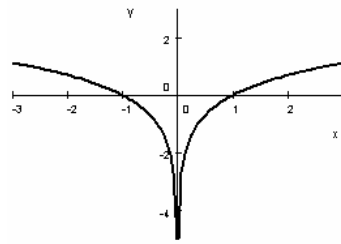
d)  $+\infty$ .

3. Indique o gráfico que representa a função  $g(x) = \ln(|x|)$

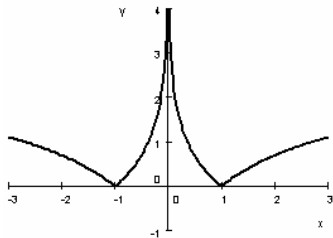
a)



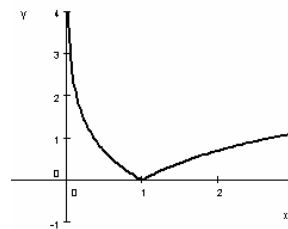
b)



c)



d)



4. Considere a função definida por  $h(x) = x^{x/2}$  para  $x > 0$ .

Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

c)  $h'(x) > 0 \quad \forall x > 0$

d)  $h(x) = (\sqrt{x})^x$  para  $x > 0$

5. De uma função  $f$ , contínua em  $\mathbb{R}$ , sabe-se que:

- $f(-2) = 3$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;
- a recta de equação  $y = -4$  é uma assíntota do gráfico de  $f$ ;
- $f$  é estritamente crescente no intervalo  $]-\infty, -2[$  e estritamente decrescente no intervalo  $] -2, +\infty[$ .

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

- a) A função  $f$  tem dois zeros.
- b) O contradomínio de  $f$  é  $] -\infty, 3]$ .
- c) A função  $f$  tem pelo menos um ponto de inflexão.
- d) O gráfico de  $f$  não intersecta a recta de equação  $y = -4$ .

6. Seja  $g$  a função real de variável real definida por  $g(x) = 2^x - \sin^2(x)$ . A tangente ao gráfico de  $g$ , no ponto de abscissa zero passa pelo ponto de coordenadas

a)  $(0, \ln 2)$ .

b)  $(\ln 2, 1 - \ln 2)$ .

c)  $(\ln 2, \ln 2)$ .

d)  $(1, 1 + \ln 2)$ .

7. A função  $h(x) = |x^2 - 2x|$  atinge o valor mínimo

- a) apenas em  $x = 1$ .  
 b) apenas nos pontos  $x = 0$  e  $x = 2$ .  
 c) apenas no ponto  $x = 0$ .  
 d) apenas no ponto  $x = 2$ .

8. Uma primitiva da função  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$  é

- a)  $\frac{1}{2} \ln|e^{2x} + 1|$ .  
 b)  $2 \ln|e^{2x} + 1|$ .  
 c)  $\arctg(e^x)$ .  
 d)  $\frac{1}{e^x + 1}$ .

### Grupo II

Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}(1 + \ln x) & \text{se } x > 0 \\ (k+1)(x^3 - x + 2) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) (1 val.) Determine o valor do parâmetro  $k$  de modo que a função  $f$  seja contínua em todo o seu domínio.  
 b) Considere  $k = 0$ .  
 i) (1 val.) Justifique a existência de pelo menos um zero da função  $f$  no intervalo  $[-2, -1]$ .  
 ii) (1 val.) Estude a derivabilidade da função  $f$  no ponto  $x = 0$ .

### Grupo III

1) Considere a função definida por  $f(x) = xe^{-x^2/2}$  para  $x \geq 0$ .

- a) (1,5 val.) Determine os pontos críticos e os intervalos de monotonia da função  $f$ .  
 b) (1,5 val.) Determine as concavidades e os pontos de inflexão da função  $f$ .

2) (2 val.) **Formule** matematicamente o problema:

*“Determine as dimensões do rectângulo inscrito na circunferência de diâmetro  $4\sqrt{2}$  cm que tem maior área.”*

identificando as variáveis, a relação entre elas e a função a otimizar.

**Não é para resolver o problema integralmente.**

(**Sugestão:** relacione a diagonal do rectângulo com os seus lados.)

.....

#### **Grupo IV**

(6 val.) Calcule:

a)  $\int \frac{dx}{2x\sqrt{1+\ln(x)}}$

b)  $\int \sin^2(x)\cos^3(x)dx$

c)  $\int x \arctg(x^2)dx$

d)  $\int \frac{dx}{9x^2+6x+2}$

*Bom Trabalho!*