



Numero: _____ Nome: _____

Curso: _____

-
- ☞ **Observações:**
- Desligue o telemóvel.
 - A prova é constituída por quatro grupos e tem a duração de **2h 30min.**
 - A cotação da prova é de 20 valores estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da identificação, respectiva.
 - Deve responder ao **Grupo I na folha de prova** e aos restantes grupos numa folha de exame.
 - Deve justificar convenientemente todas as suas respostas com excepção das do grupo I.
 - O uso de calculadoras é proibido.
-

Grupo I

Deve responder às questões deste grupo **sem** apresentar quaisquer cálculos ou justificações

Atenção: Para cada uma das seguintes questões são indicadas quatro respostas alternativas, das quais **apenas uma** está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente. Cada resposta correcta vale *0,75 valores*; por cada 3 respostas erradas é descontado uma resposta correcta.

1. Seja $f(x) = 3\log_7(x)$, $x > 0$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$, então podemos afirmar que:

- | | |
|----------------------------------|---|
| (i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ | (iii) $f(a \times b) = f(a) + f(b)$ |
| (ii) $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ | (iv) $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$ |

2. Quais das seguintes afirmações:

- a) Se $f' = g'$ então $f = g$;
- b) Se f é contínua então existe f' ;
- c) Se f é derivável então f é contínua;

são verdadeiras?

- (i) apenas a c). (ii) apenas a a) e b). (iii) apenas a b) e c). (iv) todas.

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, e seja g a função definida por $g(x) = f(x+1)$.

A recta de equação $y = 2x + 4$ é a única assíntota do gráfico de f .

Qual das seguintes é a única assíntota do gráfico de g ?

- (i) $y = 2x - 4$
(ii) $y = 2x + 6$

4. De uma função f , de domínio $[-4,5]$ e contínua em todo o seu domínio, sabe-se que:

$$a) f(-4) = 6; \quad f(2) = -1; \quad f(5) = 1;$$

b) f é estritamente decrescente no intervalo $[-4, 2]$;

c) f é estritamente crescente no intervalo $[2,5]$.

Quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$?

- (i) três (iii) uma
(ii) duas (iv) nenhuma

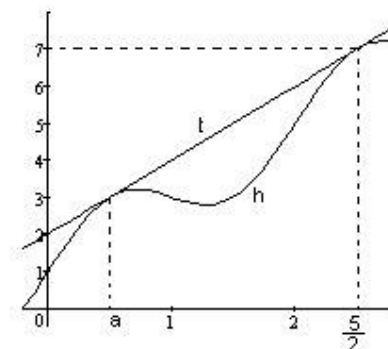
5. A figura ao lado representa parte do gráfico de uma função h e de uma recta t , tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa $x = a$.

A recta t passa nos pontos de coordenadas $(0,2)$ e $\left(\frac{5}{2},7\right)$.

Indique o valor de $h'(a)$.

- (i) 2 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) -2

(iv) não é possível determinar sem conhecer a expressão que define a função h .

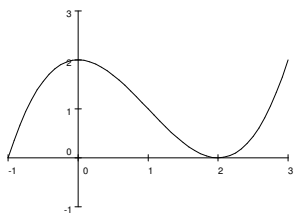


6. Seja $g(x) = \ln(3 - x^2)$. Das quatro afirmações seguintes indique a correcta.

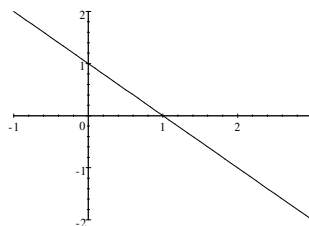
- (i) $D_g =]-3, 3[$.
- (ii) O gráfico de g admite 2 assíntotas não verticais.
- (iii) g tem um máximo relativo em $x = 0$.
- (iv) g tem um mínimo relativo em $x = 0$.

7. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abscissa $x = 1$. Indique qual dos seguintes gráficos pode representar a **segunda derivada** de g , g'' .

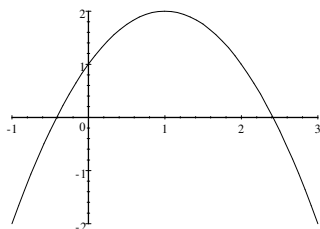
(i)



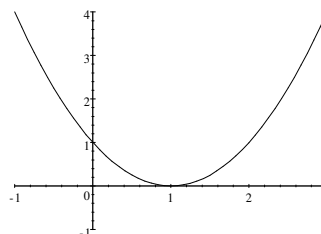
(ii)



(iii)



(iv)



8. Uma primitiva da função $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ é

(i) $\frac{1}{2} \ln|e^{2x} + 1|$

(iii) $\arctg(e^x)$

(ii) $2 \ln|e^{2x} + 1|$

(iv) $\frac{1}{e^x + 1}$

Grupo II

9. Considere a função $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x^2 - 1} & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$.

(i) (0,5 val.) Determine o domínio de f .

(ii) (1 val.) Mostre que as rectas $x=1$; $x=-1$ e $y=0$ são assíntotas ao gráfico de f .

(iii) (1 val.) Estude f quanto à continuidade (*em todos os pontos do seu domínio*).

(iv) (0,5 val.) Justifique a não existência de $f'(1)$.

(v) (0,5 val.) Mostre que a primeira derivada, f' , é $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x - 1)}{(x^2 - 1)^2}$.

(vi) (1 val.) Determine os extremos relativos e os intervalos de monotonia de f .

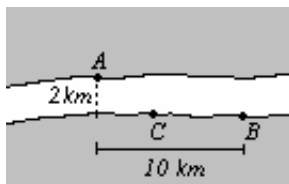
(vii) (0,5 val.) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x=0$.

Grupo III

10. (2 val.) Formule matematicamente o seguinte problema, identificando:

- as variáveis,
- a função a otimizar,
- e explique como obter a localização do ponto C, **sem resolver integralmente o problema.**

“De acordo com a figura seguinte,



pretende-se construir um gasoduto de um local A para um local B que se encontram em margens opostas de um rio.

O gasoduto irá passar por baixo do rio, ligando o ponto A (numa margem) ao ponto C (na margem oposta), e seguirá pela margem do rio ligando C a B, tal como é ilustrado na figura.

Se o custo da construção do gasoduto é 5 vezes mais caro quando passa por baixo do rio, determine a localização do ponto C de modo a minimizar os custos de construção do canal.”

.....

Grupo IV

11. Calcule as seguintes primitivas:

(i) (1,5 val.) $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$.

(ii) (2 val.) $\int x^2 \ln(x) dx$.

(iii) (1,5 val.) $\int \frac{e^{-2x} - x}{\sqrt{x^2 + e^{-2x}}} dx$

(iv) (2 val.) $\int \frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$.

Bom trabalho ...

Fim

V.S.F.F.