Resolução do exame de Análise Matemática I (7/2/2003)
Cursos: CA, GE, GEI, IG

2ª Chamada

Exercício 1

- ***(Versão IG/GEI)*** _ inversa de *f*:

$$f(x)=y \Leftrightarrow arcsen(x-1)-4=y$$
$$\Leftrightarrow arcsen(x-1)=y+4$$
$$\Leftrightarrow sen\big(arcsen(x-1)\big)=sen\big(y+4\big)$$
$$\Leftrightarrow x-1=sen(y+4)$$
$$\Leftrightarrow x=1+sen(y+4)$$

Logo $f^{-1}(x)=1+sen(x+4)$.

_ domínio de *f*: $D_f=\{x\in IR:-1\le x-1\le 1\}$

$$-1\le x-1\le 1 \Leftrightarrow x-1\ge -1 \quad\wedge\quad x-1\le 1$$
$$\Leftrightarrow x\ge 0 \quad\wedge\quad x\le 2$$
$$\Leftrightarrow x\in[0,2]$$

Resposta (iv).

- ***(Versão CA/GE)*** _ inversa de *f*:

$$f(x)=y \Leftrightarrow \ln(x-1)-4=y$$
$$\Leftrightarrow \ln(x-1)=y+4$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(x-1)}=e^{y+4}$$
$$\Leftrightarrow x-1=e^{y+4}$$
$$\Leftrightarrow x=e^{y+4}+1$$

Logo $f^{-1}(x)=e^{x+4}+1$.

_ domínio de *f*:

$$D_f=\{x\in IR:x-1>0\}$$
$$=\{x\in IR:x>1\}$$
$$=]1,+\infty[$$

Resposta (iv).

Exercício 2

- ***(Versão IG/GEI)***

$\lim\limits_{x\to+\infty} cos^2(x)$ não existe, basta observar que:

para todo $k \in \mathbf{Z}$ $\lim\limits_{k\to+\infty} cos^2(2k\pi)=1$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} cos^2\left(k\pi/2\right)=0$

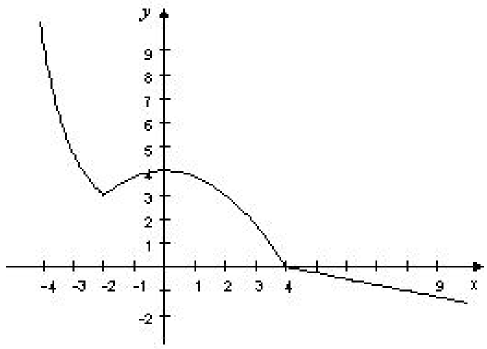
Resposta (iv).

- ***(Versão CA/GE)*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{ln(x)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$, (pela regra de L'Hôpital).

Resposta (ii).

Exercício 3

Para $x \in [1,3]$:



- o gráfico tem concavidade voltada para baixo, logo no intervalo $[1,3]$ $f''(x)$ tem sinal negativo.
- a função é decrescente, logo no intervalo $[1,3]$ $f'(x)$ tem sinal negativo.
- então $f''(x)\times f'(x)>0$

Resposta (i).

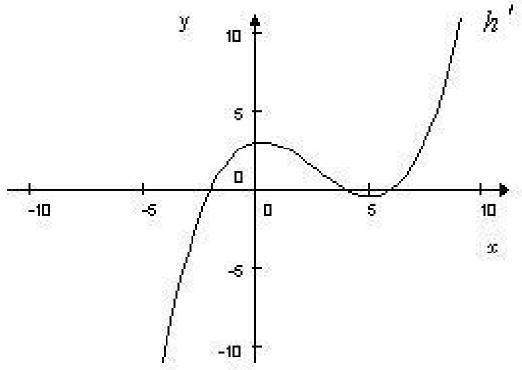
Observe-se que ***(ii)*** e ***(iv)*** são falsas:

- para $x \in]-4,-2[$ o gráfico tem concavidade voltada para cima, logo no intervalo $]-4,-2[$ $f''(x)$ tem sinal positivo, e então a equação $f''(x)=-1/2$ é impossível.
- $f'(4)=0$ é falsa pois o ponto de abcissa $x=4$ é um *ponto anguloso* – o gráfico faz um "bico" em $x=4$, logo não existe $f'(4)$.

Exercício 4

_ Pelo gráfico temos que h' é negativa para $x < -2{,}5$, logo h é decrescente para $x < -2{,}5$, logo *(iii)* e *(iv)* ficam excluídas;

_ Pelo gráfico temos que h' é positiva para $x > 6$, logo h é crescente para $x > 6$, logo *(i)* fica excluída;



Resposta (ii).

Exercício 5

Seja $f(x) = e^{2x-1}$. A recta tangente é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde

_ $x_0 = 1$

_ $y_0 = f(x_0) = e^{2-1} = e$

_ $m = f'(1)$: $f'(x) = 2e^{2x-1}$, logo $f'(1) = 2e$

Logo a recta tem equação

$$y - e = 2e(x-1) \Leftrightarrow y = 2ex - 2e + e$$
$$\Leftrightarrow y = e(2x-1)$$

Resposta (iii).

Exercício 6

Sabemos que: - f uma função contínua

- tem domínio IR
- $f(1) = -5$ e $f(9) > 0$.

Assim, $g(x) = f(x) + 3$ também é contínua (soma da função contínua f com uma constante). Vejamos que g tem pelo menos um zero em $[1,9]$:

_ $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2$, logo $g(1) < 0$

_ $g(9) = f(9) + 3$, logo $g(9) > 0$

Então, g está nas condições do Teorema de Bolzano, logo $g(x) = f(x) + 3$ tem pelo menos um zero em $[1,9]$.

Resposta (ii).

Observe-se que g definido como em *(i)*, *(iii)* e *(iv)* nada nos garante que $g(1) < 0$ e $g(9) > 0$, simultaneamente.

Exercício 7

Como f é derivável (em *IR*) então pela regra da derivada da função composta (ou regra da cadeia), temos que $f'(x) = (1-x)' f'(1-x) = -f'(1-x)$, logo $f'(0) = -f'(1-0) = -f'(1)$.

Resposta (iii).

Exercício 8

- ***(Versão IG/GEI)***

$$\int x \frac{sen(x^2)}{cos^3(x^2)} dx = \int x \frac{1}{cos^2(x^2)} \frac{sen(x^2)}{cos(x^2)} dx = \int x \, sec^2(x^2) tg(x^2) dx$$

fazendo $u = tg(x^2)$ temos $du = 2x\, sec^2(x^2) dx$, ou seja, $\frac{1}{2} du = x\, sec^2(x^2) dx$,

então o integral $\int x \frac{sen(x^2)}{cos^3(x^2)} dx = \int \underbrace{tg(x^2)}_{u} \underbrace{x\, sec^2(x^2) dx}_{1/2\, du}$ é equivalente a $\int \frac{u}{2} du$.

Resposta (i).

- ***(Versão CA/GE)***

$\int xe^x dx$ fazendo $t = e^x$ temos $dt = e^x dx$.

Como $t = e^x \Leftrightarrow ln(t) = ln\left(e^x\right) \Leftrightarrow ln(t) = x$,

então o integral $\int xe^x dx$ é equivalente a $\int \underbrace{x}_{ln(t)} \underbrace{e^x dx}_{dt} = \int ln(t) dt$.

Resposta (iii).

Exercício 9

9.1) $D_f = \{x \in IR : e^x \neq 0\} \rightarrow$ condição universal

$= IR$

9.2)

$$f'(x) = \frac{2x(e^x) - (x^2+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - x^2 - 1)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x+2)e^x-(-x^2+2x-1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(-2x+2+x^2-2x+1)}{(e^x)^2}=$$
$$=\frac{x^2-4x+3}{e^x}$$

9.3)

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-x^2+2x-1}{e^x}=0\Leftrightarrow -x^2+2x-1=0\wedge e^x\neq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}\Leftrightarrow x=1$$

- **Ponto crítico**: $x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	0	$-$
f	↘	1	↘

- **Extremos relativos**: Não tem.

- **Intervalos de monotonia**:

  _ estritamente decrescente: em $]-\infty;1[$ e $]1;+\infty[$;

9.4)

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+3}{e^x}=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\wedge e^x\neq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times 3}}{2}\Leftrightarrow x=1\vee x=3$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$

- **Pontos de inflexão**: $x=1$ e $x=3$

- **Intervalos de concavidade**:

  _ concavidade voltada para baixo: em $]1;3[$;

  _ concavidade voltada para cima: em $]-\infty;1[$ e $]3;+\infty[$.

Exercício 10

10.1)

$$
\begin{aligned}
ln\left(2\sqrt{e^{-x}}\right) &= ln(2)+ln\left(\sqrt{e^{-x}}\right) && porque \quad log_a(xy)=log_a x+log_a y \\
&= ln(2)+ln\left(\left(e^{-x}\right)^{1/2}\right) && porque \quad \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \\
&= ln(2)+ln\left(e^{\frac{-x}{2}}\right) && porque \quad \left(x^p\right)^q = x^{p.q} \\
&= ln(2)+\left(\frac{-x}{2}\right)ln(e) && porque \quad log_a\left(x^p\right)=p.log_a x \\
&= ln(2)-\frac{x}{2} && porque \quad log_a a=1 \quad (ln\, e = log_e e = 1)
\end{aligned}
$$

10.2)

Se $a \in D_g$, a função g é contínua no ponto $x=a$ se:

- se existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ (ou seja se existem e são iguais os limites $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$)
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

No ponto $x=0$:

- ***(Versão IG/GEI)***

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{sen(x)}{x}-1\right) = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0^-}\frac{sen(x)}{x}\right)}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}-1 \underset{regra\,de\,l'hôpital}{=} \left(\lim_{x\to 0^-}\frac{cos(x)}{1}\right)-1 = 1-1=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

$$g(0)=0^2=0$$

Logo em $x=0$ g é contínua.

- ***(Versão CA/GE)***

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

$g(0) = 0^2 = 0$

Logo em $x = 0$ g é contínua.

No ponto $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} ln\left(2\sqrt{e^{-x}}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(ln 2 - \frac{x}{2}\right) = ln 2 - \lim_{x\to 2^+}\frac{x}{2} = ln 2 - 1$$

Como $ln 2 - 1 \neq 4$, não existe $\lim_{x\to 2} g(x)$, logo em $x = 2$ g não é contínua.

10.3) Como a função não é contínua em $x = 2$ (como se viu na alínea anterior), então não existe $g'(2)$.

Outra resolução:

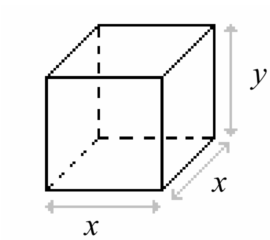
Por definição $g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Mas,

$$g'_-(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2^2}{x-2} \underset{regra\,de\,l'hôpital}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 2^-}\frac{2x}{1} = 4$$

$$g'_+(2) = \lim_{x\to 2^+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\left(ln 2 - x/2\right) - 2^2}{x-2} = \frac{ln 2 - 5}{0^+} = -\infty$$

logo, como $g'_-(2) \neq g'_+(2)$ não existe $g'(2)$.

Exercício 11



Sejam:

x — a largura da base da caixa (a base é quadrada) em *metros*

y — a altura da caixa em *metros.*

Queremos minimizar o material gasto na construção desta caixa sem tampa, que é dado por $M = x^2 + 4xy$.

Sabemos que o volume da caixa, V, é $V = 100 \Leftrightarrow x^2 y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x^2}$

Então a função que queremos minimizar é $f(x) = x^2 + 4x\left(\frac{100}{x^2}\right) = x^2 + \frac{400}{x}$.

Assim, as dimensões que minimizam o material gasto na construção da caixa serão $x_0\,m$ de lado (na base), e $y_0 = \dfrac{100}{x_0{}^2}\,m$ de altura, onde x_0 é o ponto de abcissa positiva onde f atinge o mínimo.

<u>Exercício 12</u>

12.1) $\int\left(\sqrt{x}+e^{-5x}\right)dx = \int x^{1/2}dx - \frac{1}{5}\int(-5)e^{-5x}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{5}e^{-5x} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{5}e^{-5x} + C$, com $C \in IR$

12.2) $\int\left(x^2+6\right).\cos(2x)dx$ Este integral calcula-se por partes: $\int u'.v = u.v - \int u.v'$

Cálculo auxiliar: $u' = \cos(2x) \Rightarrow u = \dfrac{sen(2x)}{2}$

$v = x^2 + 6 \Rightarrow v' = 2x$

Logo,

$$\int\left(x^2+6\right)\cos(2x)dx = \left(x^2+6\right).\frac{sen(2x)}{2} - \int 2x.\frac{sen(2x)}{2}dx = \frac{x^2+6}{2}sen(2x) - \int x.sen(2x)dx =$$

Procede-se a nova integração por partes para calcular $\int x.sen(2x)dx$.

Cálculo auxiliar: $u' = sen(2x) \Rightarrow u = -\dfrac{\cos(2x)}{2}$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

Continuando, temos:

$$= \frac{x^2+6}{2}sen(2x) - \left[-\frac{\cos(2x)}{2}.x - \int -\frac{\cos(2x)}{2}dx\right] = \frac{\left(x^2+6\right)}{2}sen(2x) + \frac{x.\cos(2x)}{2} - \frac{1}{2}\int\cos(2x)dx =$$

$$= \frac{x^2+6}{2}sen(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\frac{sen(2x)}{2} + C = \frac{x^2+6}{2}sen(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{sen(2x)}{4} + C$$

, com $C \in IR$

12.3) $\int \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}dx = \int\left(x + \dfrac{5x+2}{x^2-x-2}\right)dx$ (procedendo à divisão dos polinómios)

Tudo se resume, pois ao cálculo do integral $\int \dfrac{5x+2}{x^2-x-2}dx$.

Em primeiro lugar factoriza-se ao máximo o denominador. Para tal, calculam-se as raízes do denominador:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$$\frac{5x+2}{x^2 - x - 2} = \frac{5x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{Ax + A + Bx - 2B}{(x-2)(x+1)}$$

Para que as fracções sejam iguais, os numeradores de ambas deverão ser iguais. Ou seja, os coeficientes dos termos de igual ordem nos polinómios deverão ser iguais:

$$5x + 2 = (A+B)x + A - 2B$$

$$\begin{cases} 5 = A + B \\ 2 = A - 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 5 - A \\ 2 = A - 2(5-A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 4 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int \left(x + \frac{5x+2}{x^2 - x - 2} \right) dx = \int x dx + \int \frac{5x+2}{x^2 - x - 2} dx = \int x dx + \int \frac{4}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4.\ln|x-2| + \ln|x+1| + C, \text{ com } C \in IR.$$

12.4)

- ***(Versão CA/GE)*** $\int \frac{1}{x.\ln^3(x)} dx$; Substituição a efectuar: $t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Temos então,

$$\int \frac{1}{x.\ln^3(x)} dx = \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2\ln^2(x)} + C,$$

com $C \in IR$.

- ***(Versão IG/GEI)*** $\int \sqrt{1 - x^2} dx$

A similaridade entre a função integranda e uma das formas da fórmula fundamental da trigonometria sugere que se use uma substituição trigonométrica: $x = sen(t)$ ou $x = \cos(t)$.

Substituição a efectuar:

por exemplo: $x = sen(t) \Rightarrow dx = \cos(t)dt$. O integral toma então a forma:

$$\int \sqrt{1 - sen^2(t)}.\cos(t)dt = \int \cos^2(t)dt = \int \frac{\cos(2t)+1}{2} dt = \frac{1}{2}\left[\int \cos(2t)dt + \int dt\right] = \frac{1}{2}\frac{sen(2t)}{2} + \frac{t}{2} + C$$

, com $C \in IR$.

Prosseguindo: $\frac{1}{4}sen(2t)+\frac{t}{2}+C=\frac{1}{4}[2sen(t)\cos(t)]+\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}sen(t)\cos(t)+\frac{t}{2}+C$

Voltando agora à variável original e como:

- $x=sen(t)\Leftrightarrow arcsen(x)=t$
- $sen^2(t)+cos^2(t)=1\Leftrightarrow cos(t)=\sqrt{1-sen^2(t)}=\sqrt{1-x^2}$

temos então, $=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{arcsen(x)}{2}+C$, com $C\in IR$.