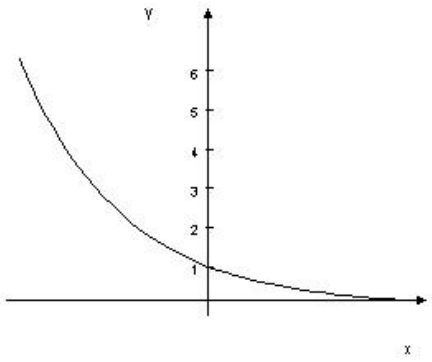
Resolução do exame de Análise Matemática I (24/1/2003)
Cursos: CA, GE, GEI, IG

1ª Chamada

Exercício 1

$2^x > 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$ como $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ é uma função exponencial de base menor do que 1 então o gráfico desta função é o representado na figura ao lado.



Esta função é estritamente decrescente e em 0 vale 1, pelo que $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[= IR^-$.

Resposta (ii).

Exercício 2

- $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}\right)}$

  Como $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-sen(x)/\cos(x)}{1}\right) = 0$ (pela regra de L'Hôpital). Logo

  $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

Resposta (ii).

- $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} \overset{(\infty^0)}{=} e^{\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x-1}\ln(x)\right)} = e^{\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)}$

  Como $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1/x}{1}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$ (pela regra de L'Hôpital). Logo

  $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1$

Resposta (ii).

Exercício 3

- $f(x) = x\,cos(x)$

  A recta tangente é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde

  _ $x_0 = \pi$

  _ $y_0 = f(x_0) = \pi\cos(\pi) = -\pi$

  _ $m = f'(\pi)$: $f'(x) = \cos(x) - xsen(x)$, logo $f'(\pi) = \cos(\pi) - \pi sen(\pi) = -1$

  Logo a recta tem equação $y + \pi = -1(x - \pi) \Leftrightarrow y = -x$

  Resposta (iv).

- $f(x) = (x+1)e^{-x^2}$

  A recta tangente é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde

  _ $x_0 = 0$

  _ $y_0 = f(x_0) = e^0 = 1$

  _ $m = f'(0)$: $f'(x) = e^{-x^2} - 2x(x+1)e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(1 - 2x - 2x^2\right)$, logo

  $f'(0) = e^0 = 1$

  Logo a recta tem equação $y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$

  Resposta (iv).

Exercício 4

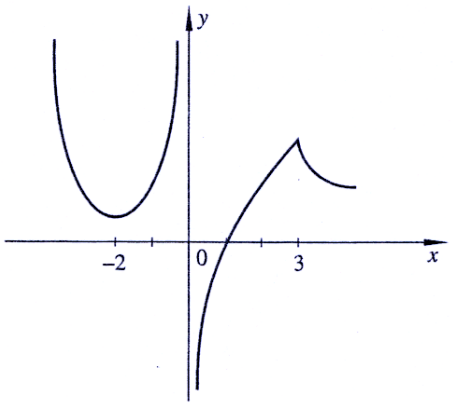
A função f é contínua e está definida num intervalo fechado, logo está nas condições dos teoremas de Bolzano e de Weierstrass.

Pelo teorema de Weierstrass f tem máximo e mínimo, logo como *(ii)* – não tem mínimo e *(iii)* – não tem máximo, ficam excluídas.

Pelo teorema de Bolzano exclui-se *(i)* porque se 3 e 2 forem imagens por f todos os valores entre 2 e 3 seriam imagem por f (e nesse caso o contradomínio teria de ser $[1,3]$).

Resposta (iv).

Exercício 5



_ Para $x \in]-\infty,0[$ o gráfico tem concavidade voltada para cima, logo no intervalo $]-\infty,0[$ $f''(x)$ tem sinal positivo.

_ De acordo com o gráfico, f não está definida em 0, logo $f''(0)$ não está definida.

_ Para $x \in]0,3[$ o gráfico tem concavidade voltada para baixo, logo no intervalo $]0,3[$ $f''(x)$ tem sinal negativo.

_ De acordo com o gráfico, $f(3)$ é um ponto "anguloso" – o gráfico faz um "bico" em $x=3$, logo não existe $f''(3)$ (a derivada lateral à esquerda é positiva enquanto que a derivada lateral à direita é negativa logo f não é derivável em 3 pelo que também não tem 2ª derivada em 3).

_ Para $x \in]3,+\infty[$ o gráfico tem concavidade voltada para cima, logo no intervalo $]3,+\infty[$ $f''(x)$ tem sinal positivo.

Resposta (iii)

x		0		3	
Sinal de f "	+	não definida	–	não definida	+

Exercício 6

_ Pelo gráfico temos que f é decrescente em $]-\infty,0[$ logo f' é negativa em $]-\infty,0[$, logo *(i)* e *(iv)* ficam excluídas;

_ Pelo gráfico temos que f é crescente em $]0,+\infty[$ logo f' é positiva em $]0,+\infty[$, logo *(iii)* fica excluída;

Resposta (ii).

Exercício 7

- $\int \frac{x\,arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ fazendo $t = arcsen(x)$ temos $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e como $t = arcsen(x) \Leftrightarrow sen(t) = x$, então o integral $\int \frac{x\,arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x\,arcsen(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ é equivalente a $\int t\,sen(t)\,dt$.

Resposta (ii).

- $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$ fazendo $t = e^{2x}$ temos $dt = 2e^{2x}dx$ e como $dt = 2e^{2x}dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}dt = e^{2x}dx$,

  então o integral $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}e^{2x}dx$ é equivalente a $\int \frac{1}{2\sqrt{1+t}}dt$.

Resposta (i).

Exercício 8

$$\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx = 2\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx \underset{form.16}{=} 2arctg(x+1)+C, \text{ com } C \in IR.$$

Alternativamente, uma vez que x^2+2x+2 não tem raízes trata-se da primitiva de uma função racional do "Tipo III" logo tal primitiva envolve a função *arctg(x)*.

Resposta (iii).

Exercício 9

9.1) $D_f = \{x \in IR : x+1 \neq 0\} = \{x \in IR : x \neq -1\} = IR \setminus \{-1\}$

9.2) Vamos determinar uma assímptota vertical (poderia ser outra!)

Como $D_f = IR \setminus \{-1\}$ vejamos que $x = -1$ é uma assímptota ao gráfico de f:

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$ e $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$, logo $x = -1$ é uma assímptota vertical (bilateral).

9.3)

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x = 0 \wedge (x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -2) \wedge x \neq -1$$

- **Pontos críticos**: $x = -2$ e $x = 0$.

  obs: $x = -1$ apesar de não pertencer ao domínio de *f'*, não é ponto crítico uma vez que $x = -1 \notin D_f$.

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	−	não definida	−	0	+
F	↗		↘	não definida	↘		↗

- **Extremos relativos**:

  _ **máximo relativo:** em $x=-2$;

  _ **mínimo relativo:** em $x=0$.

- **Intervalos de monotonia**:

  _ **estritamente crescente:** em $]-\infty,-2[$ e $]0,+\infty[$;

  _ **estritamente decrescente:** em $]-2,-1[$ e $]-1,0[$;

9.4)

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(2x+2)(x+1)-2(x^2+2x)}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

f'' não tem zeros. O seu domínio é $IR\setminus\{-1\}$, logo -1 é o único ponto a considerar para fazer o quadro.

obs: $x=-1$ apesar de não pertencer ao domínio de f'', não é ponto candidato a ponto de inflexão uma vez que $x=-1\notin D_f$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sinal de f''	−	não definida	+
f	∩	não definida	∪

- **Pontos de inflexão**: não tem, apesar de à volta de $x=-1$ f mudar o sentido da concavidade, $x=-1\notin D_f$.

- **Intervalos de concavidade**:

  _ **concavidade voltada para baixo:** em $]-\infty,-1[$;

  _ **concavidade voltada para cima:** em $]-1,+\infty[$;

Exercício 10

10.1) As funções $h(x)=\ln(x)$ e $f(x)=\dfrac{x+k}{3}$ são contínuas, a primeira porque é uma função logaritmo e a segunda porque é polinomial. Assim, como $\ln\left(\dfrac{x+k}{3}\right)$ é a composta da função $h(x)$ com a função $f(x)$:

$$(h \circ f)(x)=h(f(x))=h\left(\frac{x+k}{3}\right)=\ln\left(\frac{x+k}{3}\right)$$

então $\ln\left(\dfrac{x+k}{3}\right)$ é a composta das duas funções contínuas (h e f) logo também é contínua, no intervalo $]0;+\infty[$.

As funções $h(x)=\sqrt{x}$ e $f(x)=-x$ são contínuas, a primeira porque é a função raiz quadrada e a segunda porque é polinomial. Assim, como $\sqrt{-x}$ é a composta da função $h(x)$ com a função $f(x)$:

$$(h \circ f)(x)=h(f(x))=h(-x)=\sqrt{-x}$$

então $\sqrt{-x}$ é a composta das duas funções contínuas (h e f) logo também é contínua, no intervalo $]-\infty;0[$.

10.2) Pela alínea anterior sabemos que a função é contínua em $]0;+\infty[$ e $]-\infty;0[$. Para ser contínua (em todo o seu domínio, i.e. *IR*) temos apenas de verificar a continuidade no ponto $x=0$.

A função é contínua no ponto $x=0$ se existe $\lim_{x\to 0} g(x)$ e $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$, e temos:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(\frac{x+k}{3})=\ln(\frac{k}{3})$$

$$g(0)=\ln(\frac{k}{3})$$

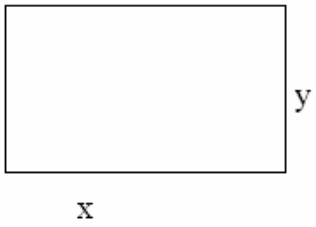
Logo, para que exista $\lim_{x\to 0} g(x)$ e $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$ tem que se verificar

$$\ln(\frac{k}{3})=0 \Leftrightarrow e^0=\frac{k}{3} \Leftrightarrow 1=\frac{k}{3} \Leftrightarrow k=3.$$

Portanto o valor de k para o qual $g(x)$ é $k=3$.

10.3) Para $k=1$ a função não é contínua em $x=0$, logo não existe $g'(0)$.

Exercício 11



Sejam x e y o comprimento e a largura do rectângulo, respectivamente.
Queremos maximizar a área deste rectângulo, que é dada por $A=xy$ e sabemos que o perímetro P é $P=10 \Leftrightarrow 2x+2y=10 \Leftrightarrow y=5-x$

Então a função que queremos maximizar é $f(x)=x(5-x)=5x-x^2$.

Fazendo, $f'(x)=5-2x$
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 5-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

	0	$5/2$	$+\infty$
f'	+	0	-
f	↗	Máx.	↘

Temos que $f\left(\frac{5}{2}\right)$ é um máximo.

Assim, para $x=\frac{5}{2}$ temos $y=5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$ e
portanto as dimensões dos lados que maximizam a área do rectângulo são:
$x=\frac{5}{2}m$ e $y=\frac{5}{2}m$.

Exercício 12

Cotação usada: 2 valores por alínea

12.1) $\int \left(x+x.e^{x^2}\right)dx=\int x dx+\frac{1}{2}\int 2x.e^{x^2}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}e^{x^2}+C$, com $C\in IR$

12.2) $\int \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$; Substituição a efectuar: $t=\sqrt{x} \Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2dt=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Temos então, $\int \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = \int \ln(t).2dt = 2\int \ln(t)dt$

Este integral calcula-se por partes: $\int \ln(t)dt = \int 1.\ln(t)dt$

Cálculo auxiliar: $u' = 1 \Rightarrow u = t$ **I.P.P**: $\int u'.v = u.v - \int u.v'$

$v = \ln(t) \Rightarrow v' = 1/t$

Logo, $2\int \ln(t)dt = 2\left(t.\ln(t) - \int t.\frac{1}{t}dt\right) = 2t.\ln(t) - 2\int dt = 2t.\ln(t) - 2t + C$, com $C \in IR$

Substituindo t pela variável original, a solução é:

$2\sqrt{x}\left[\ln\left(\sqrt{x}\right) - 1\right] + C$, com $C \in IR$

<u>*Método alternativo*</u>: directamente por partes

$\int \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\sqrt{x}\right)dx$; $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow u = \sqrt{x}$

$v = \ln\left(\sqrt{x}\right) \Rightarrow v' = \frac{1}{2x}$

Temos então, $\int \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\sqrt{x}\right)dx = 2\left[\sqrt{x}.\ln\left(\sqrt{x}\right) - \int \frac{\sqrt{x}}{2x}dx\right] =$

$= 2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right) - \int x^{-1/2}dx = 2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right) - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right) - 2\sqrt{x} + C$, com $C \in IR$

12.3) $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 5x + 1}{x^2 - 4x + 4}dx = \int\left(x + \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4}\right)dx$ (procedendo à divisão dos polinómios)

Tudo se resume, pois ao cálculo do integral $\int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4}dx$.

Em primeiro lugar factoriza-se ao máximo o denominador. Para tal, calculam-se as raízes do

Denominador:

$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2$ (trata-se de uma raíz dupla)

$$\frac{x+1}{x^2-4x+4}=\frac{x+1}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}$$

Para que as fracções sejam iguais, os numeradores de ambas deverão ser iguais. Ou seja, os
coeficientes dos termos de igual ordem nos polinómios deverão ser iguais:

$$x+1=Ax-2A+B$$

$$\begin{cases} A=1 \\ 1=-2A+B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int\left(x+\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right)dx=\int x\,dx+\int\frac{x+1}{x^2-4x+4}\,dx=\int x\,dx+\int\frac{1}{x-2}\,dx+\int\frac{3}{(x-2)^2}\,dx=$$

$$=\int x\,dx+\int\frac{1}{x-2}\,dx+3\int(x-2)^{-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x-2|+3\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C=\frac{x^2}{2}+\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+C$$

,

com $C\in IR$.

Esta correcção foi realizada com a colaboração dos professores:

Ana Ester Rodrigues;
Matias;
Vítor Sousa.