



Nome: _____

Número: _____

Curso: IG ; GEI

Observações:

- Desligue o telemóvel.
- A prova é constituída por quatro grupos e tem a duração de **2h 30min**.
- A cotação da prova é de 20 valores estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da identificação, respectiva.
- Deve responder ao **Grupo I na folha de prova** e cada um dos **Grupos II, III e IV em folhas de exame separadas**.
- Com excepção das questões do Grupo I, deve justificar convenientemente todas as suas respostas.
- O uso de calculadoras é proibido.

Grupo I

Deve responder às questões deste grupo **sem** apresentar quaisquer cálculos ou justificações

Atenção: Para cada uma das seguintes questões são indicadas quatro respostas alternativas, das quais **apenas uma** está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente. Cada resposta correcta vale *0,75 valores*; por cada 3 respostas erradas é descontado uma resposta correcta.

1. Qual das seguintes funções não tem inversa?

(i) $f(x) = \text{sen}(x)$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

(iii) $f(x) = \text{sen}(x)$, $0 \leq x \leq \pi$

(ii) $f(x) = x^5$, $-1 \leq x \leq 1$

(iv) $f(x) = \cos(x)$, $0 < x \leq \pi$

2. Seja g uma função definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{2kx} - 1}{3x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

O valor de k para o qual a função é g contínua é:

(i) 1

(ii) $2/3$

(iii) $1/2$

(iv) $3/2$

3. A expressão $e^{\ln(x^2)} + 2 - \log_2 x$ é identicamente igual a:

(i) $x^2 + \log_2(x^{-2})$

(iii) $x^2 + \log_2(4 - x)$

(ii) $x^2 + \log_2\left(\frac{4}{x}\right)$

(iv) $x^2 + \log_2\left(\frac{x}{4}\right)$

4. Se f e g são duas funções deriváveis em \mathbb{R} , então a derivada de $f(g(x^2))$ é dada por:

(i) $f'(g(x^2)) + g'(x^2)$

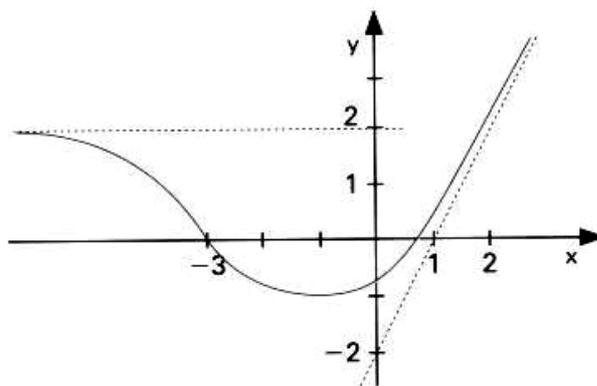
(iii) $f'(g(x^2))$

(ii) $f'(g(x^2))g'(x^2)$

(iv) $f'(g(x^2))2xg'(x^2)$

5. A função f cujo gráfico se apresenta na figura ao lado tem as seguintes características:

- domínio \mathbb{R} ;
- uma assíntota horizontal;
- uma assíntota oblíqua;
- $x = -3$ é um ponto de inflexão.



As três perguntas seguintes referem-se a esta função:

5.1. Seja $L = f'(0)$ e $M = f''(-4)$. Então:

(i) $L > 0$ e $M < 0$

(iii) $L < 0$ e $M < 0$

(ii) $L < 0$ e $M > 0$

(iv) $L > 0$ e $M > 0$

5.2. O valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 2)]$ é:

(i) $-\infty$

(ii) $+\infty$

(iii) 0

(iv) Impossível de saber.

5.3. A função f' , derivada de f , tem no ponto de abcissa -3 :

(i) Um zero

(ii) Um máximo

(iii) Um mínimo

(iv) Um ponto de inflexão

6. Uma mudança de variável adequada transforma o integral $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$ no integral

(i) $\int tg(t) dt$

(ii) $\int \sec(t) dt$

(iii) $\int 3 \sec^2(t) dt$

(iv) $\int \frac{1}{3 \sec(t)} dt$

Grupo II

7. Considere a função g definida por $g(x) = \begin{cases} (\operatorname{sen}(x))^{\frac{1}{2x-\pi}} & \text{se } x > \pi/2 \\ -3^x & \text{se } x \leq \pi/2 \end{cases}$.

7.1. (1 val.) Calcule $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} g(x)$.

7.2. (1 val.) Usando o Teorema de Bolzano, mostre que a equação $g(x) = -e$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, 1]$.

8. Numa fábrica, o custo total da produção mensal de x *centenas* de peças, expresso em milhares de euros, é dado por

$$c(x) = \operatorname{arctg}((x-10)^2)$$

8.1. (1 val.) Determine a função $c'(x)$ (designada por *custo marginal*) e calcule o seu valor para 8 *centenas* de peças.

8.2. (1 val.) Qual o número total de peças que é aconselhável produzir de modo que o custo total da produção mensal seja mínimo?

Grupo III

9. De uma certa função f , sabe-se que:

- tem domínio \mathbb{R}^+ ;
- $f(1) = 0$;
- a sua derivada, f' , é definida por $f'(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$;

9.1. (1 val.) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

9.2. (0,5 val.) Poderá concluir-se que f é contínua para $x = 1$? Justifique a sua resposta.

9.3. (0,5 val.) Mostre que $f''(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2}$.

9.4. (1 val.) Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Grupo IV

10. Calcule as seguintes primitivas:

10.1. (1,5 val.) $\int \frac{1+x \ln(x)}{x^2} dx$.

10.2. (1,5 val.) $\int \operatorname{tg}^3(x) \cos^3(x) dx$.

10.3. (2 val.) $\int (x^2 + 1)e^{3x} dx$.

10.4. (2 val.) $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} dx$.

☺ Bom trabalho ...

Fim