



Escola Superior de Tecnologia e de Gestão  
Instituto Politécnico de Bragança

## ANÁLISE MATEMÁTICA I

Exame 2ª Chamada: 07/02/2003

Cursos: *Informática de Gestão*  
*Gestão e Engenharia Industrial*

Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_

Curso: IG ☐ ; GEI ☐

### Observações:

- Desligue o telemóvel.
- A prova é constituída por quatro grupos e tem a duração de **2h 30min.**
- A cotação da prova é de 20 valores estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da identificação, respectiva.
- Deve responder ao **Grupo I na folha de prova** e cada um dos **Grupos II, III e IV em folhas de exame separadas.**
- Com excepção das questões do Grupo I, deve justificar convenientemente todas as suas respostas.
- O uso de calculadoras é proibido.

### Grupo I

Deve responder às questões deste grupo **sem** apresentar quaisquer cálculos ou justificações

**Atenção:** Para cada uma das seguintes questões são indicadas quatro respostas alternativas, das quais **apenas uma** está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente. Cada resposta correcta vale *0,75 valores*; por cada 3 respostas erradas é descontado uma resposta correcta.

1. Qual é a inversa e o domínio da função  $f$  definida por  $f(x) = \arcsen(x-1) - 4$  ?

(i)  $f^{-1}(x) = \arcsen(x+4) - 1$   
 $D_f = [0, 2]$

(ii)  $f^{-1}(x) = \sen(x+4) + 1$   
 $D_f = ]0, 2[$

(iii)  $f^{-1}(x) = \sen(x+1) + 4$   
 $D_f = ]1, 4[$

(iv)  $f^{-1}(x) = \sen(x+4) + 1$   
 $D_f = [0, 2]$

2. O limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos^2(x)$

(i) vale 1.

(ii) vale  $+\infty$ .

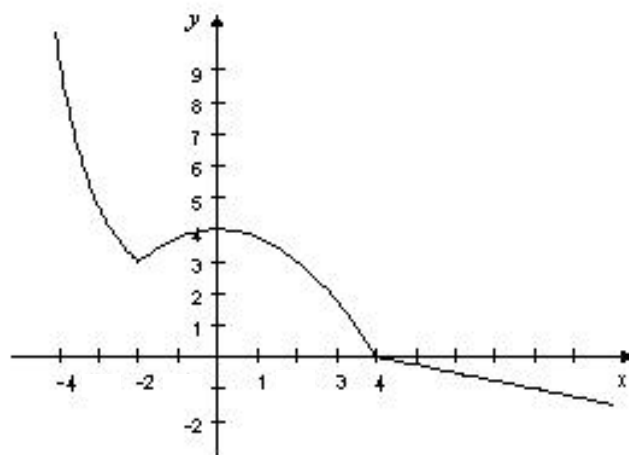
(iii) vale 0.

(iv) não existe.

3. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$ .

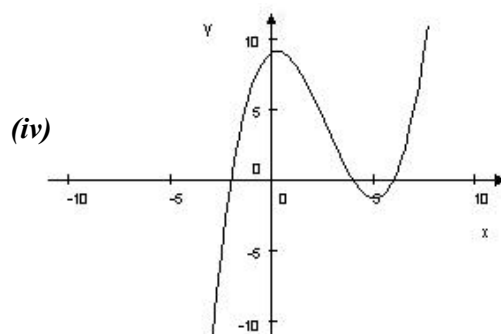
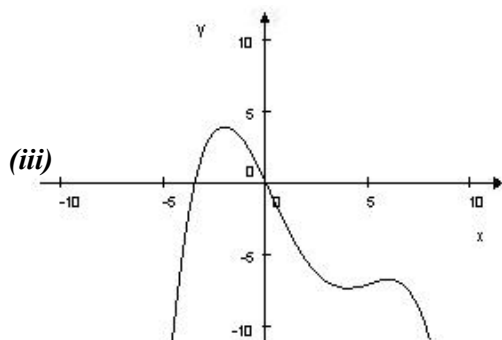
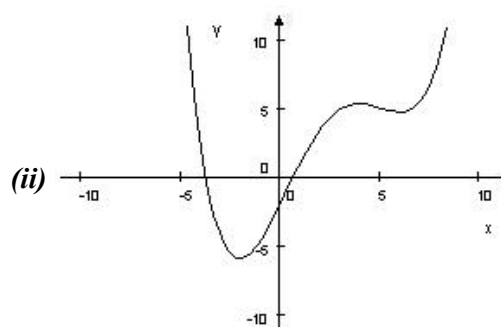
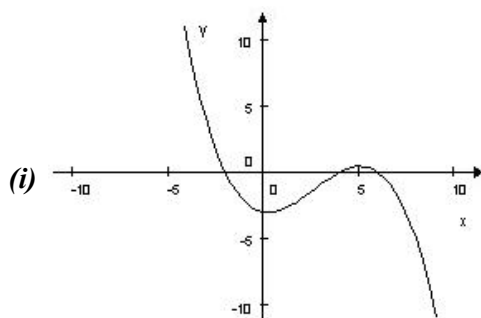
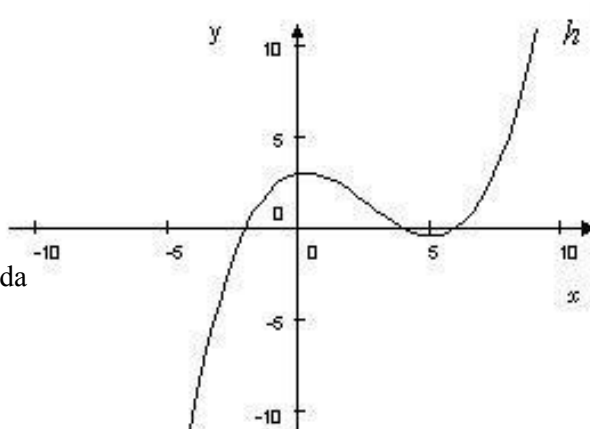
Podemos afirmar que:

- (i)  $\forall x \in [1, 3], f''(x) \times f'(x) > 0$ .
- (ii)  $f''(x) = -\frac{1}{2}$  tem pelo menos uma solução no intervalo  $] -4, -2[$ .
- (iii)  $\forall x \in [1, 3], f''(x) \times f'(x) < 0$ .
- (iv)  $f'(4) = 0$



4. Na figura ao lado está parte da representação gráfica da função primeira derivada,  $h'$ , de uma função  $h$  de domínio  $\mathbb{R}$ .

Qual das figuras seguintes poderia ser parte da representação gráfica da função  $h$ ?



5. A tangente ao gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = e^{2x-1}$  no ponto de abscissa 1 é

- (i)  $y = ex$ .                      (ii)  $y = 2e(x-1)$ .                      (iii)  $y = e(2x-1)$ .                      (iv)  $y = 2x-1$ .

6. Seja  $f$  uma função contínua de domínio  $\mathbb{R}$  acerca da qual se sabe que  $f(1) = -5$   $f(9) > 0$ . Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (i)  $g(x) = f(x) - 3$  tem pelo menos um zero em  $[1, 9]$ .  
(ii)  $g(x) = f(x) + 3$  tem pelo menos um zero em  $[1, 9]$ .  
(iii)  $g(x) = f(x) + 10$  tem pelo menos um zero em  $[1, 9]$ .  
(iv)  $g(x) = f(x) - 6$  tem pelo menos um zero em  $[1, 9]$ .

7. Seja  $f$  uma função, com domínio  $\mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = f(1-x)$  para todo número real  $x$ . Se  $f$  for derivável, então,  $f'(0) =$

- (i)  $f(0)$ .                      (ii)  $-f(0)$ .                      (iii)  $f'(1)$ .                      (iv)  $-f'(1)$ .

8. A mudança de variável  $u = \operatorname{tg}(x^2)$  transforma o integral  $\int x \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\cos^3(x^2)} dx$  no integral

- (i)  $\int \frac{u}{2} du$ .                      (ii)  $2 \int \operatorname{tg}(u) du$ .                      (iii)  $\int \frac{u \operatorname{arctg}(u)}{2} du$ .                      (iv)  $\int \frac{\operatorname{arctg}(u)}{2} du$

## Grupo II

9. Considere a função  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ .

9.1. (0,25 val.) Determine o domínio de  $f$ .

9.2. (0,75 val.) Mostre que a primeira derivada,  $f'$ , e a segunda derivada,  $f''$ , são,

respectivamente:  $f'(x) = \frac{(-x^2 + 2x - 1)}{e^x}$  e  $f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 3)}{e^x}$ .

9.3. (0,75 val.) Indique os pontos críticos, os extremos relativos e os intervalos de monotonia.

9.4. (0,75 val.) Indique os pontos de inflexão e os intervalos de concavidade.

**Grupo III**

10. Considere a função real de variável real,  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} - 1, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ \ln\left(2\sqrt{e^{-x}}\right), & x > 2 \end{cases}$ .

10.1. (0,75 val.) Mostre que  $\ln\left(2\sqrt{e^{-x}}\right) = \ln(2) - \frac{x}{2}$ .

10.2. (1,5 val.) Analise a continuidade da função  $g$  em  $x=0$  e em  $x=2$ .

(Obs.: pode usar a alínea anterior mesmo que não a tenha resolvido.)

10.3. (0,75 val.) Justifique a existência, ou não, de  $g'(2)$ .

11. (1,5 val.) **Formule** matematicamente o seguinte problema, identificando as variáveis, a relação entre elas e a função a otimizar. (*Não é para resolver o problema integralmente!*)

“Uma caixa **sem tampa**, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja  $100m^3$ . Quais deverão ser as dimensões da caixa de modo a que o material gasto na sua construção seja mínimo?”

**Grupo IV**

12. Calcule as seguintes primitivas:

12.1. (1,5 val.)  $\int (\sqrt{x} + e^{-5x}) dx$ .

12.2. (2 val.)  $\int (x^2 + 6) \cos(2x) dx$ .

12.3. (2 val.)  $\int \frac{x^3 - x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2} dx$ .

12.4. (1,5 val.)  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ .

☺ Bom trabalho ...

**Fim**