Escola Superior de Tecnologia e de Gestão
Instituto Politécnico de Bragança

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Exame 2ª Chamada: 07/02/2003

Cursos: ***Contabilidade e Administração***
Gestão de Empresas

Nome: ____

Número: ________________ Curso: CA ☐ ; GE ☐

Observações:

- Desligue o telemóvel.
- A prova é constituída por quatro grupos e tem a duração de **2h 30min.**
- A cotação da prova é de 20 valores estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da identificação, respectiva.
- Deve responder ao **Grupo I na folha de prova** e cada um dos **Grupos II, III e IV em folhas de exame separadas**.
- Com excepção das questões do Grupo I, deve justificar convenientemente todas as suas respostas.
- O uso de calculadoras é proibido.

Grupo I

Deve responder às questões deste grupo **sem** apresentar quaisquer cálculos ou justificações

Atenção: Para cada uma das seguintes questões são indicadas quatro respostas alternativas, das quais **apenas uma** está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.
Cada resposta correcta vale *0,75 valores*; por cada *3* respostas erradas é descontado uma resposta correcta.

1. Qual é a inversa e o domínio da função f definida por $f(x)=\ln(x-1)-4$?

(i) $f^{-1}(x)=\ln(x+4)-1$, $D_f=]1,+\infty[$

(ii) $f^{-1}(x)=e^{x+4}+1$, $D_f=[1,+\infty[$

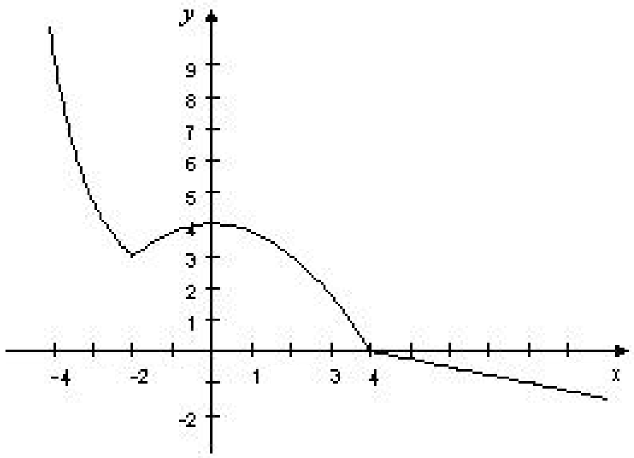
(iii) $f^{-1}(x)=e^{x+1}+4$, $D_f=]1,4[$

(iv) $f^{-1}(x)=e^{x+4}+1$, $D_f=]1,+\infty[$

2. O limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln(x)}$

(i) vale 1. ***(ii)*** vale $+\infty$. ***(iii)*** vale 0. ***(iv)*** não existe.

3. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função f de domínio *IR*.
Podemos afirmar que:



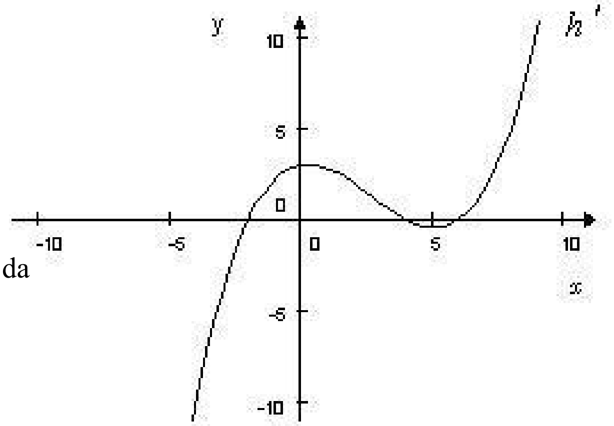
(i) $\forall\ x \in [1,3],\ f''(x) \times f'(x) > 0$.

(ii) $f''(x) = -\frac{1}{2}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-4,-2[$.

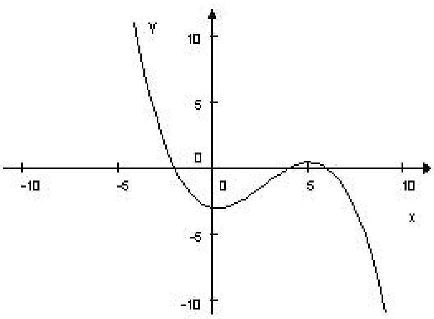
(iii) $\forall\ x \in [1,3],\ f''(x) \times f'(x) < 0$.

(iv) $f'(4) = 0$

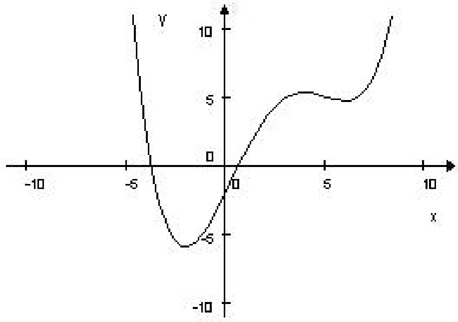
4. Na figura ao lado está parte da representação gráfica da função **primeira derivada**, ***h'***, de uma função h de domínio *IR*.
Qual das figuras seguintes poderia ser parte da representação gráfica da função ***h*** ?



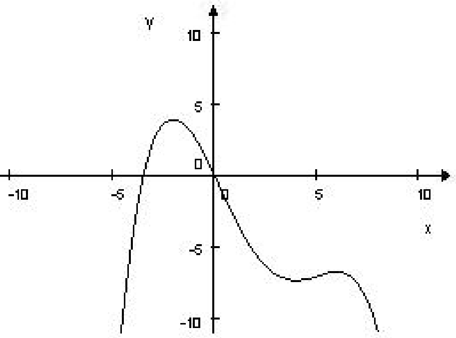
(i)



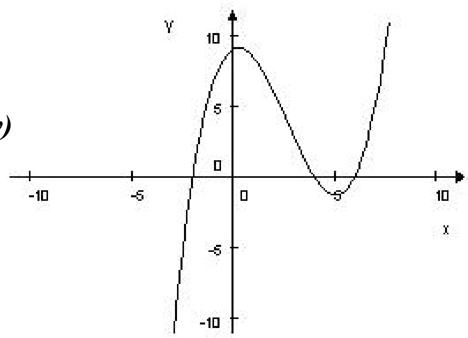
(ii)



(iii)



(iv)



5. A tangente ao gráfico da função *f* definida por $f(x)=e^{2x-1}$ no ponto de abcissa 1 é

(i) $y=ex$. ***(ii)*** $y=2e(x-1)$. ***(iii)*** $y=e(2x-1)$. ***(iv)*** $y=2x-1$.

6. Seja *f* uma <u>função contínua</u> de domínio *IR* acerca da qual se sabe que $f(1)=-5$ $f(9)>0$.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(i) $g(x)=f(x)-3$ tem pelo menos um zero em $[1,9]$.

(ii) $g(x)=f(x)+3$ tem pelo menos um zero em $[1,9]$.

(iii) $g(x)=f(x)+10$ tem pelo menos um zero em $[1,9]$.

(iv) $g(x)=f(x)-6$ tem pelo menos um zero em $[1,9]$.

7. Seja *f* uma função, com domínio *IR,* tal que $f(x)=f(1-x)$ para todo número real *x*.

Se *f* for derivável, então, $f'(0)=$

(i) $f(0)$. ***(ii)*** $-f(0)$. ***(iii)*** $-f'(1)$. ***(iv)*** $f'(1)$.

8. Uma mudança de variável adequada transforma o integral $\int xe^x dx$ no integral

(i) $\int te^x dt$. ***(ii)*** $\int t\ln(t)dt$. ***(iii)*** $\int \ln(t)dt$. ***(iv)*** $\int t\,dt$

::

Grupo II

9. Considere a função $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$.

9.1. (*0,25 val.*) Determine o domínio de *f* .

9.2. (*0,75 val.*) Mostre que a primeira derivada, *f'* , e a segunda derivada, *f''* , são respectivamente: $f'(x)=\dfrac{\left(-x^2+2x-1\right)}{e^x}$ e $f''(x)=\dfrac{\left(x^2-4x+3\right)}{e^x}$.

9.3. (*0,75 val.*) Indique os pontos críticos, os extremos relativos e os intervalos de monotonia.

9.4. (*0,75 val.*) Indique os pontos de inflexão e os intervalos de concavidade.

Grupo III

10. Considere a função real de variável real, *g*, de domínio *IR*, definida por $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & , \quad x < 0 \\ x^2 & , 0 \le x \le 2 \\ \ln\left(2\sqrt{e^{-x}}\right) & , x > 2 \end{cases}$.

10.1. (*0,75 val.*) Mostre que $\ln\left(2\sqrt{e^{-x}}\right) = \ln(2) - \dfrac{x}{2}$.

10.2. (*1,5 val.*) Analise a continuidade da função *g* em $x = 0$ **e** em $x = 2$.

(***Obs.***: *pode usar a alínea anterior mesmo que não a tenha resolvido.*)

10.3. (*0,75 val.*) Justifique a existência, ou não, de $g'(2)$.

11. (*1,5 val.*) **Formule** matematicamente o seguinte problema, identificando as variáveis, a relação entre elas e a função a optimizar. (***Não é para resolver o problema integralmente!***)

"Uma caixa **sem tampa**, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja $100m^3$. Quais deverão ser as dimensões da caixa de modo a que o material gasto na sua construção seja mínimo?"

Grupo IV

12. Calcule as seguintes primitivas:

12.1. (*1,5 val.*) $\int \left(\sqrt{x} + e^{-5x}\right)dx$.

12.2. (*2 val.*) $\int \left(x^2 + 6\right)cos(2x)dx$.

12.3. (*2 val.*) $\int \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}dx$.

12.4. (*1,5 val.*) $\int \dfrac{1}{x\, ln^3(x)}dx$.

☺ Bom trabalho …

Fim