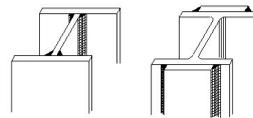
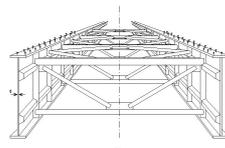
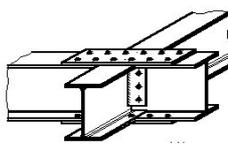


# MECÂNICA ESTRUTURAL I

4º ANO - ENGENHARIA MECÂNICA



Steel Construction Institute

Paulo Piloto  
Departamento de Mecânica Aplicada  
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão  
**INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA**

## Índice:

BIBLIOGRAFIA .....	2
NOMENCLATURA .....	3
1 - INTRODUÇÃO .....	4
2 - REGULAMENTO DE ESTRUTURAS DE AÇO PARA EDIFÍCIOS – (REAE) .....	16
2.1 – Disposições de projecto .....	17
2.2 – Verificação de segurança – critérios gerais .....	22
2.2.1 - Estados limites últimos .....	23
2.2.2 - Estados limites de utilização .....	23
2.3 – Verificação de segurança – elementos estruturais .....	24
2.3.1 – Estado limite último de resistência sem plastificação .....	24
2.3.2 – Estado limite último de encurvadura por varejamento .....	27
2.3.3 – Estado limite último de encurvadura por bambeamento .....	33
2.3.4 – Estado limite último de resistência com plastificação .....	38
2.3.4 – Secções úteis .....	42
2.3.5 – Esforços secundários .....	42
2.3.6 – Exemplos de aplicação .....	43
2.3.6.1 – Dimensionamento de elemento ligação .....	43
2.3.6.2 – Instabilidade de pilar .....	46
2.3.6.3 – Instabilidade de pilar encastrado, com secção composta .....	48
2.3.6.4 – Instabilidade de pilar encastrado e simplesmente apoiado .....	49
2.3.6.5 – Verificação de segurança na movimentação de uma viga .....	52
2.3.6.5 – Exercício proposto 1 – Verificação de segurança numa viga .....	54
2.3.6.5 – Segurança numa viga relativamente ao estado limite último de resistência por plastificação .....	54
3 – EUROCÓDIGO 3: PROJECTO DE ESTRUTURAS EM AÇO .....	56
4 – QUANTIFICAÇÃO DAS ACÇÕES - REGULAMENTO DE SEGURANÇA E ACÇÕES PARA ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS E PONTES .....	62
4.1 - Quantificação das acções permanentes .....	63
4.2 - Quantificação das acções provocadas pelo vento .....	64
4.3 - Quantificação das acções provocadas pela neve .....	66
4.4 - Quantificação das acções provocadas pela sobrecarga (acções específicas de edifícios) .....	68
4.5 - Quantificação das acções sísmicas .....	69
4.6 - Exercícios de aplicação .....	72
4.6.1 - Dimensionamento de uma viga .....	72
4.6.2 – Quantificação de acção do vento .....	73
4.6.3 – Verificação da segurança de uma madre de cobertura .....	73
4.6.4 – Quantificação da acção do vento sobre pavilhão .....	74
4.6.5 – Combinação das acções e verificação da segurança de uma madre .....	74
4.6.6 – Combinação das acções e verificação da estabilidade de um pórtico .....	80
4.6.7 – Determinação dos esforços internos .....	90
4.7 – Exercício proposto de aplicação RSA .....	90
4.8 – Exercício de aplicação sobre acções sísmicas .....	95
5 - MÉTODOS ENERGÉTICOS .....	100
5.1 - Energia de Deformação .....	101
5.2 - Teoremas sobre energia de deformação .....	102
5.3 – Energia de deformação de elemento submetidos a esforço normal .....	104
5.4 – Energia de deformação de elemento submetidos a esforço de flexão .....	105
5.5 – Energia de deformação de elementos submetidos a esforço transversal .....	105
5.6 – Energia de deformação de elementos submetidos a esforço de torção .....	108
5.7 – Energia de deformação de elementos submetidos a variação de temperatura uniforme .....	109
5.8 – Energia de deformação de elementos submetidos a variação de temperatura diferencial .....	110
5.9 – Energia de deformação de elementos submetidos a um carregamento genérico .....	111
5.10 – Exercícios de aplicação .....	111
6 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	112
6.1 - Teorema do deslocamento virtual unitário para cálculo de forças .....	114
6.2 – Aplicações sobre TDU .....	115
7 - TEOREMA DO TRABALHO VIRTUAL COMPLEMENTAR .....	118
7.1 - Teorema da carga virtual unitária .....	119
7.1.1 – Aplicação a estruturas articuladas .....	120
7.1.2 – Aplicação a estruturas contínuas .....	121
7.2 – Exercícios de aplicação .....	122
8 - CÁLCULO DO TRABALHO VIRTUAL DE DEFORMAÇÃO .....	129
8.1 - Método de Bonfim Barreiros .....	131
8.2 - Aplicações .....	133
9 - TEOREMA DA ENERGIA POTENCIAL MÍNIMA .....	134
9.1 - Teorema de Castigliano .....	136
9.2 – Aplicações .....	137
10 - TEOREMAS DA RECIPROCIDADE: TEOREMA DE BETTI E DE MAXWELL .....	142
11 – LINHAS DE INFLUÊNCIA .....	145
12 – MÉTODO DAS FORÇAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS .....	146
12.1 – Aplicação .....	152

**BIBLIOGRAFIA**

- [1] - Fonseca, E. M. M.; Sebenta de “Mecânica Estrutural I”, 1999-2000 (2ª edição)
  - [2] - Vila Real, P.M. M.; “Teoria das Estruturas”; 1997.
  - [3] - Timoshenko, S.P.; Young, D.H.; “Theory of Structures”.
  - [4] - Ghali; Nevilli – “Structural Analysis”.
  - [5] - Cook, R.D.; Young, W.C.; “Advanced Mechanics of Materials”.
  - [6] - Gomes, C. M. B. R.; “Teoremas Energéticos em Mecânica Estrutural”; 1986.
  - [7] - Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes; Editora Rei dos Livros.
  - [8] - Regulamento de Estruturas de Aço para Edifícios – Editora Rei dos Livros.
  - [9] - prEN 1993-1-2; Eurocode3 – Design of steel structures – Part 1-2: General rules – Structural fire design..
  - [10] - prEN 1993-1-1; Eurocode3 – Design of steel structures – Part 1-1: Design of steel structures – General rules and rules for buildings, stage 49 draft, 2003
  - [11] - CEN ENV 1991-2-2 “Eurocode 1 – Basis of design and actions on structures – Part 2.2: Actions on structures – Action on structures exposed to fire”; 1995.
  - [12] - Branco, A.G.M.; “Mecânica dos Materiais”.
  - [13] - Hibbeler, Russell C.; “Structural Analysis”.
  - [14] - Tartaglione, Louis C.; “Structural Analysis”.
  - [15] - Oliveira, C. Magalhães – Análise Matricial de Estruturas, 1997/98
  - [16] - Hsieh; Mau; “Elementary Theory of Structures”; Prentice Hall.
  - [17] - Felton; Nelson – Matrix Structural Analysis, John Wiley & Sons, Inc.
  - [18] - Schodek; “Structures”; 4<sup>th</sup> edition; Prentice Hall; ISB 0-13-027821-1
  - [19] - Norris; Wilbur; Utku; “Elementary structural analysis”; 4 th edition; McGraw Hill.
  - [20] - Gomes, Reis; “Estruturas metálicas”; DEMEGI – FEUP, 2002
  - [21] - Trahair N.S.; “ Flexural – Torsional Buckling of structures”; E&FN SPON – Chapman & Hall; London; 1993.
-

## NOMENCLATURA

A nomenclatura que se apresenta está dividida em função da natureza da designação do símbolo, conforme se trata de um escalar, de uma grandeza vectorial ou tensorial. Em qualquer dos casos foi efectuada a sub divisão em caracteres que utilizam o latim e o grego.

Algumas notações verdadeiramente particulares não foram consideradas na listagem seguinte, uma vez que se apresentam com uma utilização restrita e/ou contradizem a nomenclatura de outros capítulos.

### Grandezas escalares que utilizam símbolos em Latim:

a	Distância, espessura do cordão de soldadura
b	Distância
c	Distância, comprimento do crater na extremidade do cordão de soldadura
d	Diâmetro de veio ou parafuso
D	Diâmetro de furos
DH	Deslocamento horizontal
DV	Deslocamento vertical
e	Espessura
$e_i$	Espessura do elemento i
E	Módulo de elasticidade
$F_i$	Componente do vector força. "i" pode variar entre x,y e z
$f_{yd}$	Valor de cálculo da tensão de cedência ou da tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.2%
G	Módulo de elasticidade transversal
h	Distância de uma altura
l	Comprimento
$M_i$	Componente do vector momento. "i" pode variar entre x,y e z
$N_{Sd}$	Valor do esforço normal solicitante de cálculo
P	Identificação de carga pontual
Si	Identificação da secção de corte para a obtenção dos esforços internos. "i" pode variar na escala dos números inteiros positivos.

### Grandezas escalares que utilizam símbolos em Grego:

$\Delta$	Parâmetro escalar da soma das componentes normais do tensor das tensões
$\nu$	Coefficiente de poisson
$\varphi$	Coefficiente de encurvadura
$\gamma_g$	Coefficiente de segurança
$\lambda$	Constante elástica de lamé, coeficiente de esbelteza
$\sigma_{ij}$	Componente do tensor das tensões. "i" e "j" podem variar entre x,y e z
$\sigma_{Rd}, \tau_{Rd}$	Tensões resistentes de cálculo
$\sigma_d, \tau_d$	Tensões actuaentes de cálculo
$\sigma_{Sd,ref}$	Tensão solicitante de cálculo equivalente (de referência)
$\sigma_{Sd,x}, \sigma_{Sd,y}$	Componentes normais do tensor de um estado duplo de tensão
$\tau_{Sd,xy}$	Componente tangencial do tensor de um estado duplo de tensão

## 1 - INTRODUÇÃO

A Mecânica Estrutural é uma disciplina que estuda o comportamento das estruturas sob a acção de forças exteriores.

Por definição uma estrutura é qualquer corpo sólido capaz de oferecer resistência mecânica às acções exteriores, quaisquer que sejam a sua natureza, a sua forma e a maneira como está ligado ao meio envolvente. Sendo assim, o objectivo da teoria das estruturas deveria ser o estudo da resistência mecânica oferecida pelos corpos sólidos, de qualquer natureza e forma e de qualquer maneira ligados ao exterior, quando sujeitos a acção de solicitações.

As preocupações da engenharia estrutural, verificação da segurança de estruturas e equipamentos (condições de funcionamento, limitação de custos,...) são comuns em muitos outros ramos de engenharia.

A resistência dos materiais ou mecânica dos materiais é utilizada na solução de problemas de elementos estruturais simples.

A teoria da elasticidade apresenta soluções matemáticas para um reduzido número de problemas, que embora complexos, apresentam geometria bem definida e condições de carregamento particulares.

Desde a difusão de meios computacionais, os métodos matriciais, foram transportadas para a Mecânica Estrutural. De entre esses métodos o primeiro implementado foi o método dos deslocamentos, que assume particular relevo no Método dos Elementos Finitos, permitindo uma abordagem de qualquer tipo de estrutura, independentemente da forma, cargas e condições de fronteira. Ressalta ainda o método das forças, em que se é conduzido a um sistema de equações em que as incógnitas são as forças.

Na figura 1 estão representados alguns tipos de estruturas, tendo em consideração o tipo de elementos estruturais simples utilizados na sua constituição e o tipo de rigidez pretendida. O conjunto destes elementos podem ser agrupados de forma equilibrada e com processos de ligação específicos.

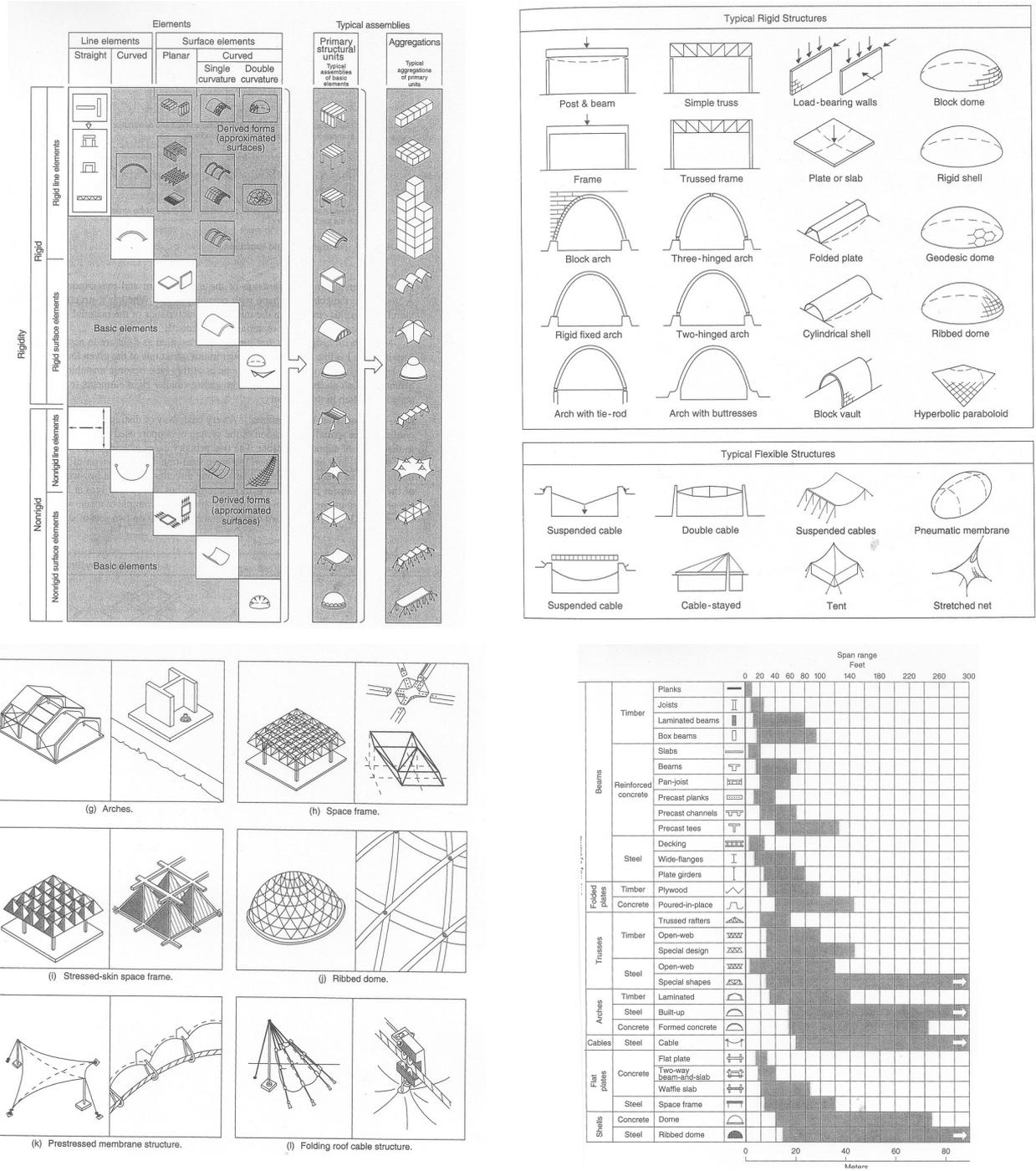


Fig. 1 – Classificação de elementos estruturais básicos com indicação de comprimentos para vãos .

No estudo introdutório daremos particular destaque às estruturas planas, uma vez que a passagem ao estudo de estruturas tridimensionais (espaciais) dependerá do aumento do número de variáveis.

Raramente uma estrutura real corresponderá à estrutura idealizada que foi considerada na análise. O material de que a estrutura é feito não deverá possuir exactamente as propriedades assumidas, nem as dimensões correspondem exactamente aos seus valores teóricos. Os detalhes

estruturais como por exemplo, placas de reforço, barras de apoio ou outro elemento não principal, podem tornar a análise mais complicada. No entanto, em certos casos, o respectivo efeito pode ser desprezado para a análise dos elementos principais, ver figura 2.

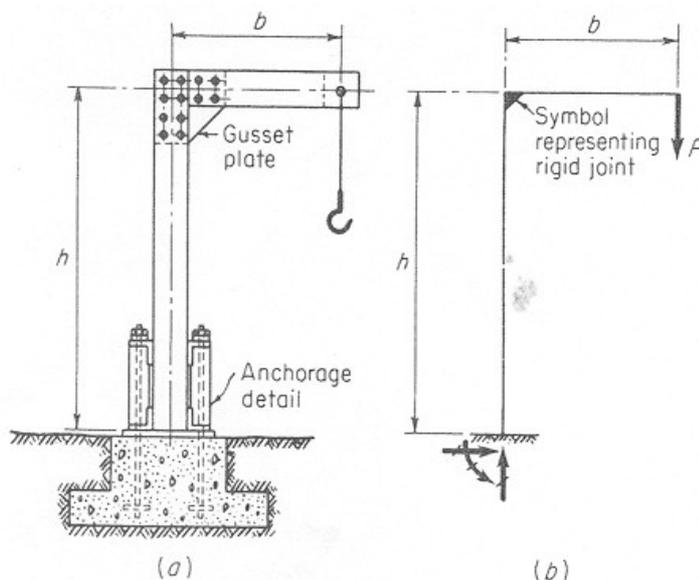


Fig. 2 - Comparação entre a estrutura real e a idealizada.

Neste caso, o caso real pode ser simplificado pelo modelo representado à direita, no qual foi assumido que a zona de encastramento a solo poderia ser considerado um encastramento perfeito, no entanto, pode não ser o caso realmente existente. A largura adicional da ligação à base da coluna foi ignorada bem como a placa de reforço na ligação coluna viga. A placa de “gusset” foi assumida como uma ligação perfeitamente rígida, o que na realidade poderá permitir alguma rotação relativa entre os elementos. A dimensão da coluna foi considerada entre a placa de apoio de ligação ao solo e a linha média de altura da viga. O vão do elemento viga foi medido desde a linha média da coluna até ao ponto de aplicação da carga.

Este tipo de idealização deverá ser necessário para a resolução de casos práticos. A experiência e conhecimento são necessários para a idealização da estrutura, isto é, o modelo utilizado deverá corresponder à melhor aproximação possível. No casos de estruturas importantes e quando a dúvida persistir, o projectista deverá determinar o comportamento da estrutura para diferentes modelos e dimensioná-los todos para resistirem aos esforços correspondentes a todas as análises possíveis.

Os métodos de análise podem ser classificados segundo o tipo de modelação utilizada. A modelação material é feita através das relações constitutivas presentes no material dos elementos

estruturais (relação tensão deformação), distinguindo-se o modelo elástico, elástico perfeitamente plástico, elasto-plástico entre outras relações apropriadas.

A modelação geométrica pode considerar ou não a influência das deformações sobre as acções que actuam na estrutura. No caso de se desprezar esta influência, consideram-se as equações de equilíbrio definidas sobre a geometria inicial da estrutura (análise de primeira ordem). No caso de se considerar que as deformações produzidas podem modificar o efeito das acções que as produzem, as equações de equilíbrio devem ser consideradas na configuração deformada (análise de segunda ordem). Neste último tipo de análise ainda se podem distinguir os efeitos globais de segunda ordem na estrutura dos efeitos locais de cada elemento que a compõe.

As ligações mais utilizadas na fixação de elementos entre si e das estruturas ao exterior, são realizadas basicamente pelos tipos de apoios representados na figura 3. Os apoios idealizados podem ser considerados simples no caso em que a articulação é livre de se mover sobre uma superfície, considerados duplos ou de rótula, no caso em que a articulação é fixa permitindo apenas rotações e ainda considerados apoios de encastramento perfeito, para os casos em que todos os deslocamentos são impedidos. As forças necessárias para impedir os deslocamentos nos apoios, designam-se reacções nos apoios.

Em anexo apresentam-se alguns exemplos concretos de aplicações de estruturas e tipos de apoio.

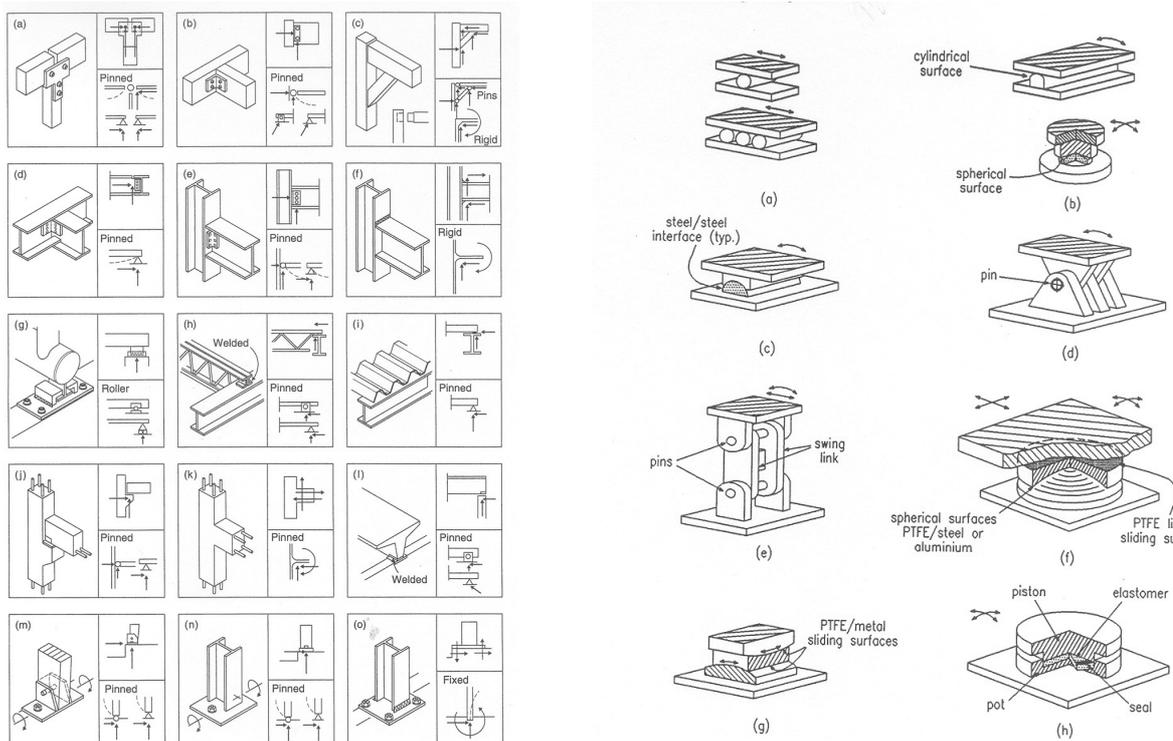


Fig. 3 - Tipos de ligações e de apoios.

De acordo com a maneira como os elementos lineares se ligam entre si e com o exterior, os diferentes tipos de estruturas podem ser classificadas em estruturas reticuladas, com ou sem articulações, sendo representadas por modelos semelhantes aos da figura 1.4. As extremidades das barras concorrentes num nó podem estar ligadas por articulações sem atrito, tendo neste caso todos os nós os mesmos deslocamentos, mas os elementos convergentes, diferentes rotações.

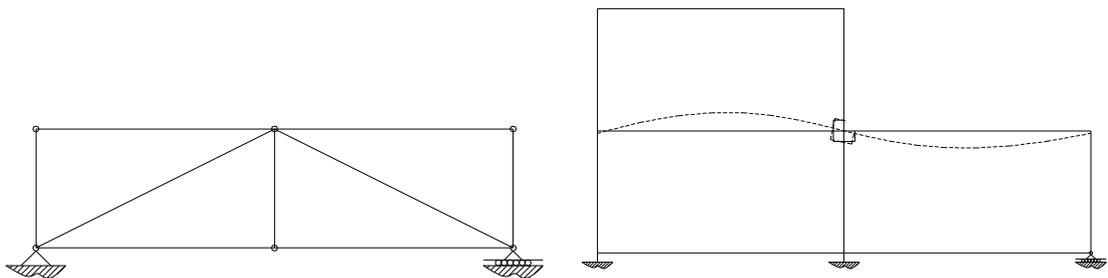


Fig. 4 – Estrutura reticulada articulada e contínua.

No caso de estruturas com elementos contínuos, as extremidades dos elementos concorrentes num nó têm todos os mesmos deslocamentos e rotações, (fig. 4), ou seja quando todas as ligações são consideradas rígidas, impedindo deslocamentos e rotações.

Alguns dos pormenores construtivos destes tipos de estruturas estão representados na figura 5, como são exemplo as madres de sustentação de coberturas de pavilhões industriais.

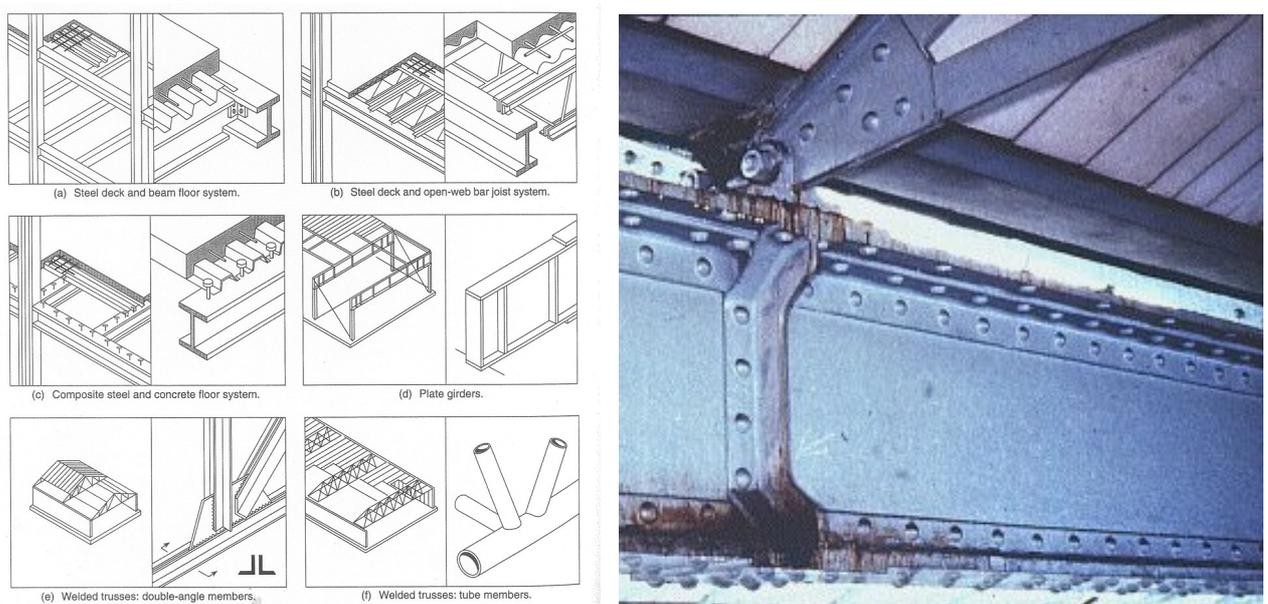


Fig. 5 – Construção em aço e mista (aço betão). Pormenores de construção.

As estruturas mistas têm ligações dos dois tipos das que apareceram os casos de estruturas anteriores, ver figura anterior.

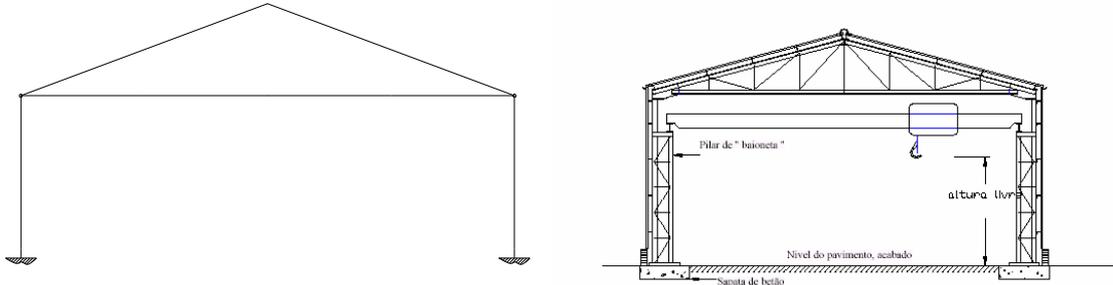


Fig. 6 – Construção em aço. Pormenores de construção.

Em qualquer caso, tratar-se-á apenas de estruturas em que os deslocamentos generalizados (translações ou rotações), de uma qualquer secção são elásticos, isto é reversíveis (desaparecem ao cessarem as acções das forças exteriores) e variam linearmente com as forças aplicadas, ou seja, são proporcionais às forças que os produzem, ver figura 7.

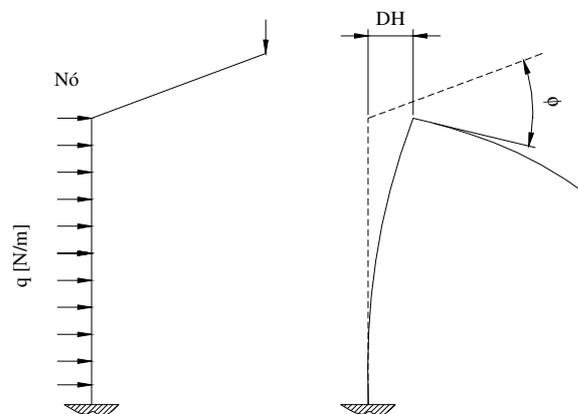


Fig. 7 – Deslocamentos elásticos por aplicação de carregamento.

Admitir-se-á também que as deformações são pequenas em relação à dimensão dos corpos, de tal maneira que os deslocamentos resultantes não alteram significativamente a geometria das estruturas. Assim, sendo os pequenos deslocamentos dos pontos de uma estrutura, na sua configuração deformada confundem-se com a configuração inicial, podendo-se efectuar a análise com base na geometria inicial conhecida. Esta aproximação é uma *hipótese fundamental* em análise estrutural, resultando daí a linearidade das equações, dizendo-se por esta razão que se trata de uma análise linear ou de primeira ordem.

A maioria das estruturas é concebida de modo a sofrer pequenas deformações sendo utilizados materiais em que as deformações elásticas, além da propriedade essencial da reversibilidade, possuem também a característica de variar proporcionalmente com as forças que as produzem, dizendo-se então que, nesta parte da deformação, os corpos são dotados de elasticidade perfeita, figura 8.

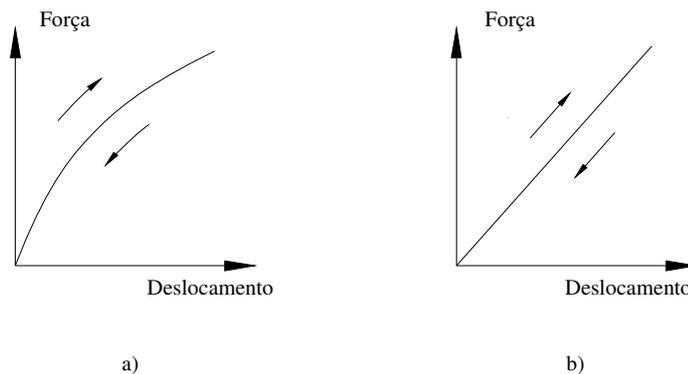


Fig. 8 – a) Comportamento elástico. b) Comportamento elástico perfeito.

A relação de dependência entre a tensão e as deformação é estabelecida pela lei de Hooke, princípio fundamental da elasticidade perfeita, que enuncia o facto experimental das deformações elásticas serem funções lineares das tensões que as produzem, que no caso mais genérico, deverá ser aproximado pela expressão 1.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2.G.\varepsilon_{xx} + \lambda.\Delta \\
 \sigma_{yy} &= 2.G.\varepsilon_{yy} + \lambda.\Delta \\
 \sigma_{zz} &= 2.G.\varepsilon_{zz} + \lambda.\Delta \\
 \tau_{xy} &= G.\gamma_{xy} \\
 \tau_{xz} &= G.\gamma_{xz} \\
 \tau_{yz} &= G.\gamma_{yz}
 \end{aligned}
 \tag{eq. 1}$$

em que  $\lambda$  se designa por constante elástica de Lamé, determinada pela seguinte expressão.

$$\lambda = \frac{\nu.E}{(1+\nu)(1-2\nu)}
 \tag{eq. 2}$$

O parâmetro  $\Delta$  é aproximado pela expressão seguinte.

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (\text{eq. 3})$$

Sob estas condições, é de aplicação lícita o *princípio da sobreposição dos efeitos elásticos*, segundo o qual, no domínio das deformações produzidas em regime de elasticidade perfeita, um estado de deformação pode sempre considerar-se como a soma de estados de deformação da mesma natureza, sendo qualquer efeito (componente da tensão, componente da deformação, deslocamento) do *estado - soma* de deformação igual à soma dos efeitos correspondentes desses estados de deformação parcelares e vice-versa. O princípio, só é se a *deformação - soma* se produz ainda em regime de elasticidade perfeita. Uma das vantagens deste princípio reside no facto de se poder dividir, por exemplo, a acção de um caso de carga complexo na soma de casos de carga mais simples como na figura 9.

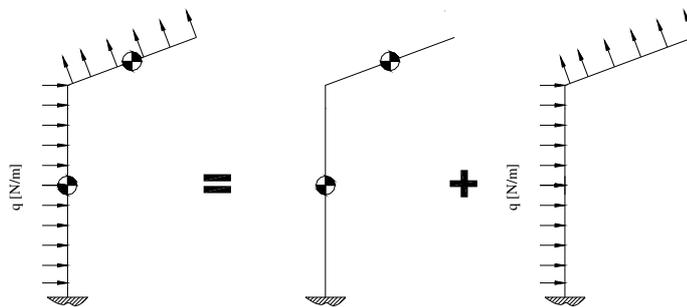


Fig. 9 – Princípio da sobreposição de efeitos.

A Teoria das Estruturas estuda também *estruturas hiperestáticas*, cuja resistência mecânica, ao contrário das *estruturas isostáticas*, não pode ser geralmente avaliada só à custa das relações que exprimem o seu equilíbrio estático. Para um modelo de análise de estrutura tridimensional, estas relações podem escrever-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{array} \right. = 0 \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{array} \right. = 0 \quad (\text{eq. 4})$$

Os somatórios nestas equações estendem-se a todas as componentes das forças, ( $F$ ), e momentos, ( $M$ ), sobre cada um dos três eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Para um modelo de uma estrutura em equilíbrio tridimensional, sujeito a forças generalizadas de direcção arbitrária, devem ser satisfeitas as seis equações de equilíbrio estático (eq.4), enquanto que, para o caso de um modelo de uma estrutura em equilíbrio bidimensional, apenas são necessárias três daquelas seis equações.

Para obtenção dos esforços internos (diagramas) dever-se-á utilizar uma qualquer convenção de sinais, sendo a utilizada neste documento a que se representa na figura 10.

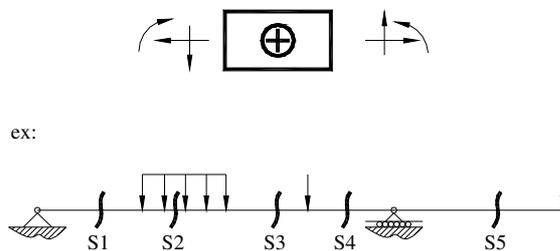


Fig. 10 – Convenção de sinais e exemplo de utilização do método das secções.

Assim, para as cargas generalizadas aplicadas na estrutura é possível estabelecer as condições de equilíbrio de parte dos seus elementos, utilizando sistemas de equações algébricas que permitem obter os esforços ao longo de todos os elementos.

As estruturas reticuladas podem ser isostáticas, hiperestáticas ou hipostáticas, conforme o número de incógnitas presentes é igual, superior ou inferior ao número de equações de que se dispõe para a sua resolução.

Chama-se *grau de hiperstaticidade* ou *grau de indeterminação estática* de uma estrutura a diferença entre o número total de incógnitas e o número de equações de equilíbrio estático. A figura 11 dá alguns exemplos de estruturas hiperestáticas.

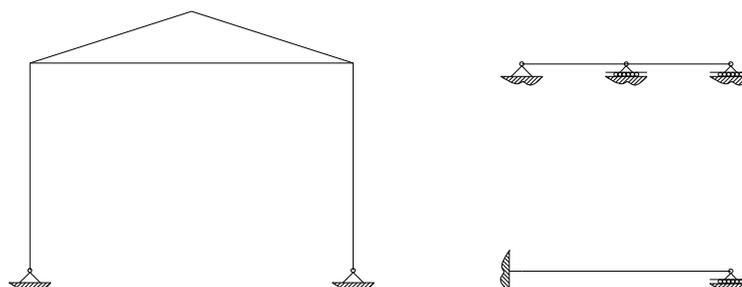


Fig. 11 – Exemplos de estruturas hiperestáticas.

As estruturas isostáticas são directamente analisadas pelas equações da estática, que permitem escrever as equações de equilíbrio de todos os nós, barras, ou sub - domínios a considerar, e determinar as forças que actuam na fronteira desse subdomínio.

As estruturas hiperestáticas não são directamente resolúveis pelas equações de equilíbrio, utilizando-se em alternativa os métodos energéticos e cinemáticos complementares. Quando se estabelece como incógnitas o sistema as forças, e se aplica sucessivamente as condições de equilíbrio e as condições de compatibilidade, está-se em presença de um método matricial, conhecido pelo *método das forças*. No *método dos deslocamentos* toma-se como incógnitas os deslocamentos compatíveis, escrevem-se as expressões dos esforços em função destes e impõe-se, por último, as condições de equilíbrio. Estes dois métodos de cálculo para determinação dos esforços nos elementos de uma estrutura hiperestática, impõem a consideração de condições de equilíbrio e de compatibilidade. Os dois métodos diferem assim na ordem porque são consideradas aquelas condições e na natureza das incógnitas (forças ou deslocamentos). Na resolução de uma estrutura hiperestática deve utilizar-se o método que envolva o menor número de incógnitas. Assim, para os exemplos das estruturas representadas na figura 12 podem ser utilizados dois métodos de resolução diferentes, em função do número de incógnitas envolvidas em cada caso. No caso a) deve ser utilizado o método das forças, uma vez que o número de incógnitas hiperestáticas é um (uma das forças de um dos elementos) e o número de incógnitas deslocamentos é dois ( $\Delta H$  e  $\Delta V$ ). No caso da estrutura da figura 12 (b) deve ser utilizado o método dos deslocamentos, pois o número de incógnitas da mesma natureza envolvidos é dois, ao contrário do número de incógnitas hiperestáticas que são três.

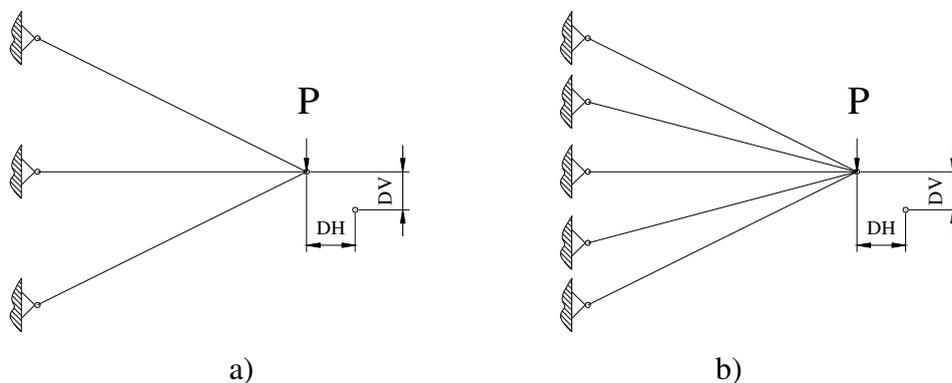


Fig. 12 – Exemplos de estruturas hiperestáticas.

Relativamente às solicitações exteriores, ou seja, o conjunto das acções exteriores aos corpos, capazes de produzir estados de tensão ou de deformação, podem ser devidos a forças exteriores, variações de temperatura e assentamentos dos apoios, como se representa na figura 13.

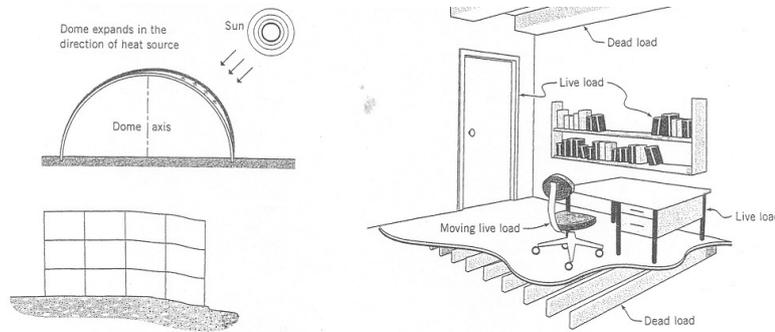


Fig. 13 – Exemplos de solicitações em estruturas.

As forças exteriores podem ser de duas naturezas: *forças de massa*, aplicadas nos elementos de volume dos corpos ou *forças de superfície* aplicadas em elementos da superfície exterior dos corpos. As *forças de massa*, consideram-se proporcionais ao volume dos elementos em que actuam e são por exemplo, as provenientes da gravidade e das forças de inércia. As *forças de superfície* supõem-se proporcionais à área dos elementos da superfície exterior dos corpos em que estão aplicadas e podem resultar da acção do vento, da pressão hidrostática ou da sobrecarga de utilização das estruturas.

Como é do conhecimento geral as variações de temperatura são susceptíveis de produzir estados de deformação em corpos livres, isto é, não dotados de ligações ao exterior pois quando a temperatura de um corpo varia, ele tende geralmente a deformar-se, com aumento de volume (dilatação) se a temperatura aumenta, ou com diminuição de volume (contração) se a temperatura diminui. Essa tendência pode ser contrariada por ligações exteriores capazes de impedir, total ou parcialmente, a deformação, criando assim sistemas equilibrados de forças interiores caracterizando estados de tensão, não oferecendo dúvida que as variações de temperatura se possam incluir, de acordo com a definição, entre as acções de solicitação exteriores.

Quanto aos assentamentos de apoio, convém referir que dadas as condições de apoio dum corpo num ponto da sua superfície exterior, pode acidentalmente, sofrer movimentos não permitidos pela natureza das ligações. O ponto sofreu um assentamento ou, ainda, um deslocamento incompatível com a natureza prevista da ligação. As ligações exteriores, restringindo a liberdade de deslocamento de certos pontos da superfície exterior dos corpos, são factores determinantes dos seus estados de tensão e de deformação. Os assentamentos, alterando a natureza

das ligações, podem originar, por si só, estados de deformação e de tensão, o que permite inclui-los entre as acções de solicitação exteriores.

O objectivo da análise de uma estrutura deverá ainda passar pela verificação da sua segurança e estabilidade. A verificação destes dois factores passam pela verificação dos pressupostos de rigidez, resistência e estabilidade, em função do conjunto de combinações de acção previstas.

Sob o ponto de vista da rigidez, será necessário verificar se a deformação global da estrutura, ou dos elementos que a constituem, não afectam o seu normal funcionamento nem provoquem danos do material.

Relativamente à resistência, esta deverá estar garantida no caso de todos os elementos da estrutura poderem transmitir os esforços instalados sem que ocorra a ruína, normalmente caracterizada pela plastificação da secção ou pelo aparecimento de deformações permanentes. Esta condição é geralmente expressa em termos de esforços ou tensões.

Outro fenómeno igualmente importante, em particular no caso de elementos estruturais esbeltos, está relacionado com a estabilidade do próprio elemento. Existem vários estados de instabilidade possível, devendo ser verificado para cada elemento o estado limite último possível de ser atingido.

A verificação da segurança de uma estrutura é efectuada com base no método dos estados limites, estados esses associados a situações de colapso local ou global (estados limites últimos, incluindo os estados limites de instabilidade) ou associados a situações de serviço ou exploração deficientes (estados limites de utilização).

No caso de estruturas metálicas, os fenómenos de instabilidade que podem ocorrer são: encurvadura por flexão de colunas (varejamento, “buckling”, “flambement”), encurvadura lateral de vigas (bambeamento, “lateral buckling”, “déversement”) e encurvadura local em placas, banzos e almas de elementos estruturais (enfunamento, “local buckling”, “voilement”).



Encurvadura lateral



Encurvadura local



Encurvadura local

Fig. 14 – Fenómenos de instabilidade em elementos estruturais.

O colapso ou ruína estrutural pode verificar-se em dois níveis. Um colapso parcial está normalmente associado ao colapso de alguns dos elementos que constituem a estrutura, sem que ocorra a ruína completa da mesma, podendo continuar a desempenhar a respectiva função. Exemplo de estruturas hiperestáticas, em que a possibilidade de ocorrência de uma rótula plástica não significa necessariamente o colapso total. Este fenómeno pode eventualmente ser aproveitado, por razões de carácter económico, para um melhor aproveitamento da capacidade de resistência das secções. O outro tipo de colapso (total) apenas ocorrerá quando a estrutura se transformar num mecanismo. Este tipo de colapso, tendo em consideração as relações de força e deslocamento, aparecerá quando a um pequeno incremento de carga corresponder um grande incremento de deslocamento.

## **2 - REGULAMENTO DE ESTRUTURAS DE AÇO PARA EDIFÍCIOS – (REAE)**

O objectivo deste regulamento visa estabelecer regras a observar no projecto e na execução de estruturas de aço para edifícios e obras análogas, cujos elementos sejam de aço laminado a quente.

Os projectos de estruturas de aço devem ser elaborados por técnicos com formação adequada à natureza e importância das obras e para o efeito habilitados pela legislação em vigor.

Os projectos devem conter, devidamente organizadas, as peças escritas e desenhadas, necessárias para a justificação do dimensionamento e respectiva verificação, bem como para a execução da obra. Estes projectos devem ser submetidos à verificação e aprovação das entidades competentes, de acordo com a legislação em vigor.

Uma estrutura metálica é constituída por diferentes elementos estruturais que se encontram ligados entre si pelas mais variadas formas. As ligações devem pois garantir a transferência de esforços considerados no projecto estrutural como um todo, bem como garantir a devida resistência nas ligações ao exterior.

De acordo com este regulamento, os valores característicos das propriedades mecânicas do aço a considerar são as apresentadas na tabela 1, de acordo com a norma Portuguesa NP 1729 (1981).

Tabela 1 - Tipos de aço e designações na construção metálica.

DESIGNAÇÃO ACTUAL	TENSÃO DE CEDÊNCIA (MPa) $= f_{yd}$	TENSÃO DE RUPTURA (MPa) = $f_{ud}$	AÇO
S235	235	360	Fe360
S275	275	430	Fe430
S355	355	510	Fe510

Podem ser utilizados aços de qualidade diferente, desde que possuam características mecânicas não inferiores às do aço S235. As restantes propriedades mecânicas do aço, à temperatura ambiente, são consideradas constantes, como por exemplo, o módulo de elasticidade igual a  $E=2,06 \times 10^5$  [MPa], o coeficiente de Poisson igual a  $\nu = 0,3$  e o resultante módulo de rigidez transversal igual a  $G = 0,8 \times 10^5$  [MPa].

A classificação de aços apresentada pode ainda ser complementada com letras JR, JO, J2 e K2 que representam o nível de qualidade do aço no respeitante à soldabilidade e aos valores especificados do ensaio de choque. A qualidade aumenta para cada designação de JR a K2. Para uma descrição mais detalhada da qualidade de aços, deve-se consultar a norma EN10025.

Os elementos de ligação mecânicos (rebites, parafusos, porcas, anilhas, metal de adição, etc.) devem satisfazer as especificações das respectivas normas. Os valores característicos das propriedades mecânicas a adoptar para o aço devem obedecer à mesma legislação. No caso de adição de metal para o processo de soldadura, as propriedades do aditivo não deverão ser inferiores às dos materiais de base, tendo em consideração os pormenores metalúrgicos envolvidos no processo.

## 2.1 – Disposições de projecto

Não devem ser utilizados elementos estruturais de espessura inferior a 4 [mm], devendo os elementos directamente ou expostos em condições especiais de utilização (ambientes corrosivos), adoptar valores superiores ao indicado.

De acordo com o artigo 13 do presente regulamento, os elementos principais das estruturas planas devem, quando possível, possuir secções simétricas relativamente ao plano médio dessas estruturas. Nas ligações concorrentes de vários elementos estruturais, deve ser considerado o facto das linhas médias concorrerem num ponto (nó), conforme figura 15.

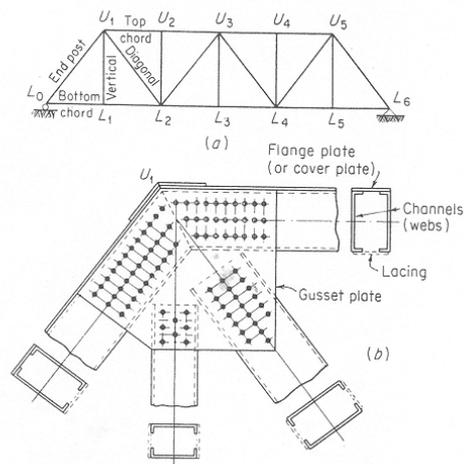


Fig. 15 – Exemplos de ligações em elementos de estruturas.

Caso não seja possível efectivar as disposições construtivas definidas neste artigo, deverá ser considerado o efeito secundário daí resultante.

Nos elementos estruturais devem ser evitadas as variações bruscas da área e forma da secção recta ou enfraquecimentos localizados. As ligações metálicas podem ser efectuadas por rebiteagem, soldadura ou por parafuso.

Nas ligações por rebites, o diâmetro nominal deverá ser 1 ou 2 [mm] inferiores aos diâmetros dos furos. Estes deverão ficar totalmente preenchidos após a operação de cravamento. Outro dos condicionalismos para a execução deste tipo de ligação, obriga a que o referido diâmetro nominal não seja inferior à maior espessura do elemento a ligar. A espessura total do elementos a ligar não deve, em geral, exceder cinco vezes o diâmetro do furo e, em caso algum, exceder seis vezes e meia esse diâmetro, conforme figura seguinte.

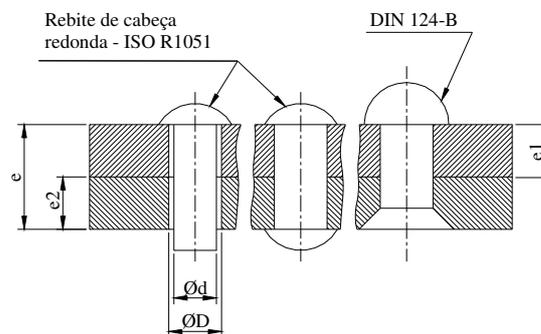


Fig. 16 – Exemplos de ligações por rebites.

Em conformidade com o referido no parágrafo anterior, pode ser referido que:

$$\begin{aligned} \phi d &\leq 1 \text{ a } 2\phi D \\ \phi d &\geq \text{maior } e_i \\ e &\leq 5\phi D \end{aligned} \quad (\text{eq. 5})$$

No caso de diâmetros inferiores a 14 [mm], a espessura total a ligar deverá ser limitada a quatro vezes o diâmetro.

Relativamente à respectiva disposição, deverão ser respeitados os condicionamentos apresentados na figura seguinte

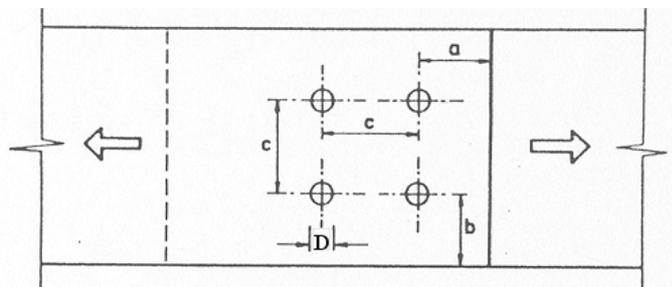


Fig. 17 – Posicionamento dos furos dos rebites no processo de ligação.

$$\begin{aligned} 2\phi D &\leq a \leq 3\phi D \\ 1,5\phi D &\leq b \leq 2,5\phi D \\ 3\phi D &\leq c \leq 7\phi D \quad (\text{ambientes muito agressivos}) \\ 3\phi D &\leq c \leq 10\phi D \quad (\text{ambientes pouco ou moderadamente agressivos}) \end{aligned} \quad (\text{eq. 6})$$

As ligações por parafusos podem ser concorrentes ou pré esforçadas, sendo o funcionamento destas últimas assegurado pela existência de forças de aperto e de atrito, resultantes do processo de aperto, que se opõem ao desencosto e deslizamento dos elementos ligados. Nas ligações pré-esforçadas devem ser utilizados parafusos de classe de qualidade 8.8, ou superior. A especificação de parafusos pré-esforçados nos projectos deverá incluir a indicação dos correspondentes momentos de aperto.

Nas ligações por parafusos, o diâmetro do furo não deverá exceder em mais de 2 [mm] o diâmetro do liso da espiga dos parafusos, excepto se esse diâmetro for superior a 24 [mm], situação em que o referido limite deverá ser aumentado para 3 [mm]. Para locais em que se exija grande rigidez na ligação, poderá ser necessário adoptar tolerâncias inferiores às indicadas, ver figura seguinte.

Para as ligações parafuso porca, a dimensão dos elementos em consideração deverá obedecer às seguintes recomendações.

$$l \geq e_1 + e_2 + h + n$$

$$n \leq 0.3d$$

(eq. 7)

Para as ligações parafuso peça roscada, a dimensão deverá obedecer ao seguinte critério.

$$l \geq e + d$$

$$l \geq e + 1.5d$$

$$j = l - e$$

(eq. 8)

Os valores de “p” e “q” deverão ser determinados em função do tipo de furo

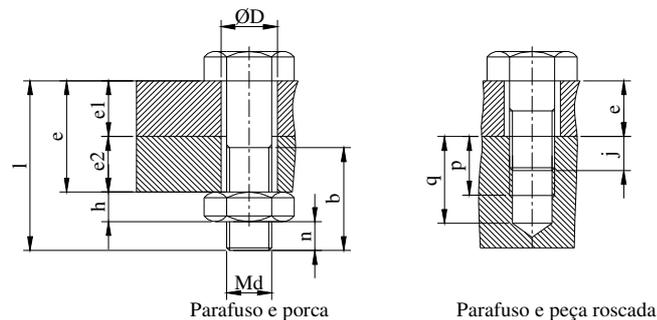


Fig. 18 – Exemplos de ligações por parafusos.

A disposição dos parafusos deverá ser semelhante à utilizada para os rebites, ver figura 17.

Nas ligações soldadas, deve-se ter em consideração o estado de tensões criado pelo próprio processo, evitar a concentração excessiva da soldadura, evitar soldar elementos de espessura superior a 30 [mm]. No projecto devem ser tidas em consideração as condições de execução e montagem a que se refere o artigo 65 do regulamento REAE.

Os cordões de soldadura previstos na regulamentação são de dois tipos. O cordão de topo é utilizado para unir peças posicionadas topo a topo, no prolongamento umas das outras, independentemente de possuírem ou não eixos coincidentes. O cordão de ângulo é utilizado para ligação de elementos que se sobrepõem ou que se intersectam, conforme figura 19.

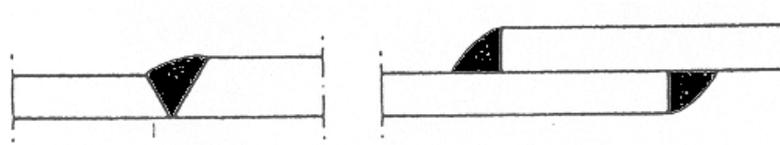


Fig. 19 – Exemplos de cordões de soldadura.

As dimensões características dos cordões de soldadura e que condicionam economicamente a solução, são a espessura e o comprimento. A espessura do cordão de topo é definida em função da espessura do elemento mais delgado a incluir no processo de ligação. No caso de cordões de soldadura em ângulo, a espessura será considerada igual à altura do triângulo isósceles inscrito na secção do cordão, ver figura 20.

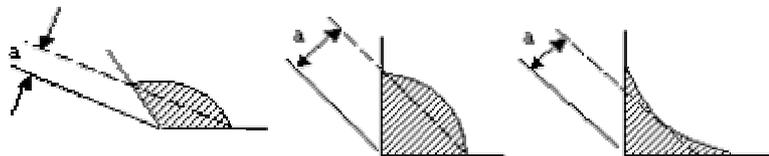


Fig. 20 – Exemplos de espessuras de cordão.

O comprimento do cordão de soldadura deverá descontar a contribuição dos crateres, nos casos em que estes se formam, coincidindo ou não, com o comprimento total nominal, ver figura 21.

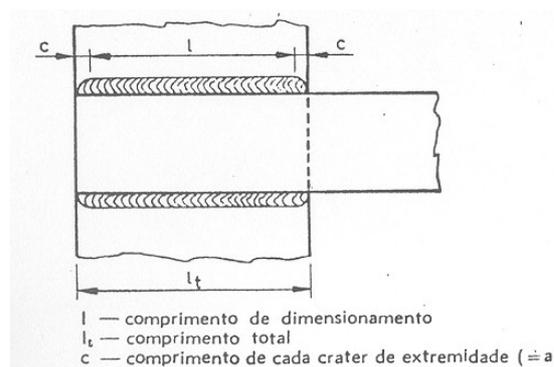


Fig. 21 – Exemplos de comprimentos do cordão de soldadura.

As dimensões envolvidas num projecto de soldadura devem, de acordo com o artigo 29 do REAE, verificar algumas regras de execução, nomeadamente, a espessura dos cordões não deve ser inferior a 3 [mm], a espessura dos cordões de ângulo não deverá ser superior a 0.7 da menor espessura dos elementos a ligar, os cordões de topo contínuos devem ocupar toda a extensão da

justaposição, enquanto que os cordões de ângulo contínuos não deverão apresentar comprimento inferior a 40 [mm].

Nos cordões de topo descontínuos, o comprimento de cada troço não deverá ser inferior a quatro vezes a espessura do elemento mais fino a ligar e o intervalo entre dois troços sucessivos não deve exceder doze vezes aquela espessura.

No caso dos cordões de ângulos descontínuos, o comprimento de cada troço não deverá ser inferior a quatro vezes a espessura do elemento mais fino a ligar. O intervalo entre dois troços sucessivos não deve exceder dezasseis vezes aquela espessura, no caso de elementos sujeitos a esforços de compressão, e a 24 vezes essa espessura, no caso de elementos sujeitos a esforços de tracção.

Para diferentes tipos de soldadura de topo, soldaduras por entalhe ou de cordões de soldadura opostos, deverão ser consultados os artigos 30 a 37 do referido regulamento.

## **2.2 – Verificação de segurança – critérios gerais**

A verificação à segurança das estruturas de aço para edifícios deverá ser efectuada de acordo com os critérios estabelecidos no RSA (regulamento de segurança e acções de estruturas de edifício e pontes). Para as estruturas de aço ou de outro material, deverá ser definido o tipo de estados limites a considerar, os coeficientes de segurança, as respectivas propriedades dos materiais, bem como as teorias de comportamento estrutural adequadas, assim como as regras particulares de projecto e construção.

Entende-se por estado limite, um estado a partir do qual se considera que a estrutura fica prejudicada total ou parcialmente na sua capacidade para desempenhar as funções para que foi concebida. Consideram-se dois tipos de estados limites:

a) estados limites últimos, cuja simples ocorrência provoca a perda de estabilidade da estrutura, o seu colapso ou outra consequência particularmente gravosa;

b) estados limites de utilização, de cuja ocorrência com determinada duração ou repetição resultam prejuízos no desempenho da estrutura sem a perda de estabilidade. Os estados limites de utilização são definidos para durações de referência de três ordens de grandeza. Muito curta, correspondendo a durações que totalizam poucas horas no período de vida da estrutura, curta, correspondendo a durações da ordem de 5% do período de vida da estrutura, longa, correspondendo a durações da ordem de metade do período de vida da estrutura.

### 2.2.1 - Estados limites últimos

São exemplos de estados limites últimos a deformação excessiva em secções ou elementos da estrutura, a instabilidade de elementos da estrutura ou da estrutura no seu conjunto, a transformação da estrutura em mecanismo, e a perda de equilíbrio de parte ou conjunto da estrutura, considerada como corpo rígido. De acordo com o artigo 39 do presente regulamento, os estados limites últimos a considerar poderão ser relativos ao estado limite último sem que ocorra plastificação, ao estado limite último de encurvadura (instabilidade de elementos), ao estado limite de perda de equilíbrio (considerando o derrubamento ou deslocamento da estrutura considerada como um corpo rígido) e ao estado limite último de resistência com plastificação, correspondentes à ocorrência de deformações plásticas em certas secções ou mesmo à transformação da estrutura ou de parte dela num mecanismo, por formação de rótulas plásticas.

### 2.2.2 - Estados limites de utilização

A verificação à segurança destes estados limites deve ser efectuada em termos de parâmetros que definem esses estados limites, devendo os valores que tais parâmetros assumem, devido às acções, ser em geral, iguais ou inferiores aos valores adoptados para quantificação desses estados. A definição desses parâmetros deverá ser feita pela teoria da elasticidade, da mecânica dos materiais e do processo de combinação das acções prevista no RSA.

São exemplos de estados limites de utilização a deformação não compatível com as condições de serviço da estrutura. Para os estados limites de deformação, deverá ser considerado o estado limite de curta duração e definidos os valores de flechas indicados em função dos vãos em estudo. No caso de vigas de pavimentos deverá ser adoptado uma flecha inferior ou igual  $l/400$ , no caso destas suportarem divisórias correntes o valor da flecha deverá ser inferior a  $l/500$ . Os valores admissíveis para as madres de cobertura com materiais correntes de revestimento, deverá ser adoptado um valor de  $l/200$ .

## 2.3 – Verificação de segurança – elementos estruturais

A verificação da segurança, de acordo com os critérios gerais referidos, pode ser feita em termos de estados limites, quer comparando os valores dos parâmetros por meio dos quais são definidos esses estados (extensões, deformações, largura de fendas, etc.) com os valores que tais parâmetros assumem devido às acções aplicadas, quer em termos de acções, comparando os valores das acções aplicadas com os valores das acções do mesmo tipo e configuração que conduzem à ocorrência dos estados limites, quer em termos de grandezas relacionáveis com as acções e com os parâmetros que definem os estados limites, comparando os valores que tais grandezas assumem quando obtidos a partir das acções com os valores que assumem quando obtidos a partir dos valores dos parâmetros que definem os estados limites (as grandezas escolhidas são, em geral, esforços ou tensões).

Os estados limites a considerar e as teorias de comportamento estrutural que permitem relacionar as acções, os esforços, as tensões e os parâmetros por meio dos quais são definidos os estados limites, são estabelecidos nos regulamentos relativos aos diferentes tipos de estruturas e de materiais.

As regras para efectuar a verificação da segurança nos termos anteriormente indicados são definidas tendo em conta os critérios de quantificação e de combinação das acções estabelecidos nos regulamentos referidos.

### 2.3.1 – Estado limite último de resistência sem plastificação

Os elementos estruturais que devam ser verificados à segurança para estados limites últimos de resistência, sem plastificação e que estejam submetidos a estados de tensão simples ou de corte puro, devem satisfazer uma das condições seguintes:

- a) para o caso de tensões normais:  $\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$
- b) para o caso de tensões tangenciais:  $\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd}$

em que,  $\sigma_{Sd}, \tau_{Sd}$  representam valores de cálculo das tensões solicitantes, enquanto que  $\sigma_{Rd}, \tau_{Rd}$  representam o valor das tensões resistentes de cálculo. Os valores de cálculo das tensões actantes

---

devem ser determinados de acordo com as teorias da elasticidade ou da mecânica dos materiais e considerando as combinações de acções e os coeficientes de segurança especificados no RSA para os estados limites últimos que não impliquem perda de equilíbrio ou fadiga.

Os valores de cálculo dos esforços actuantes, no caso de se poder considerar linear a relação entre as acções e os esforços, devem ser obtidos considerando as regras de combinação fundamental ou accidental.

No caso da combinação fundamental, o valor do efeito solicitante de cálculo deverá ser determinado pela expressão seguinte.

$$S_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{gi} S_{Gik} + \gamma_q \left[ S_{Q1k} + \sum_{j=2}^n \psi_{0j} S_{Qjk} \right] \quad (\text{eq. 9})$$

Esta expressão caracteriza a combinação fundamental, na qual intervêm as acções permanentes e as acções variáveis. As acções permanentes devem figurar em todas as combinações, sendo representadas pela primeira parcela e pré multiplicadas pelo respectivo coeficiente de segurança, normalmente com o valor de 1.5. As acções variáveis apenas devem aparecer quando os respectivos efeitos forem desfavoráveis para a estrutura, devendo ser pré multiplicadas por um segundo coeficiente de segurança (1.5). A segunda parcela representa a acção variável considerada como base na combinação, enquanto que as restantes deverão ser pré multiplicadas por um coeficiente de redução. Este coeficiente de redução depende da acção em causa, que no caso da sobrecarga poderá tomar diferentes valores, no caso do vento e da neve pode tomar o valor 0.6.

No caso de acções permanentes cujos valores possam ser previstos com muito rigor, o coeficiente de segurança  $\gamma_g$  poderá ser reduzido até 1.35.

Nesta expressão, cada parcela pode ser identificada da seguinte forma:

- $S_{Gik}$  - esforço resultante de uma acção permanente, tomada com o seu valor característico;
- $S_{Q1k}$  - esforço resultante da acção variável considerada como acção de base da combinação, tomada com o seu valor característico;
- $S_{Qjk}$  - esforço resultante de uma acção variável distinta da acção de base, tomada com o seu valor característico;
- $\gamma_{gi}$  - factor parcial de segurança relativo às acções permanentes;

- $\gamma_q$  - factor parcial de segurança relativo às acções variáveis;
- $\psi_{0j}$  - coeficientes de redução correspondentes à acção variável de ordem j.

No caso da combinação acidental, como por exemplo a acção do fogo, o valor do efeito solicitante de cálculo deverá ser determinado pela expressão:

$$S_{dA} = \sum \gamma_{GA} \cdot G_k + \psi_{1,1} \cdot Q_{k,1} + \sum \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} + \sum A_d(t) \quad (\text{eq. 10})$$

Nesta expressão,  $G_k$  representa o valor característico das acções permanentes,  $Q_{,1}$  o valor característico da acção variável principal,  $Q_{k,i}$  os valores característicos das restantes acções variáveis e  $A_d(t)$  os valores de cálculo de acções de exposição ao fogo, tomada com o seu valor nominal, de acordo com secções 4 e 5 [7]. O coeficiente de segurança  $\gamma_{GA}$  representa o valor parcial para acções permanentes na situação de acidental e os coeficientes de redução  $\psi_{1,1}$  e  $\psi_{2,i}$  deverão estar de acordo com os mesmos documentos.

Os valores de cálculo das tensões resistentes deverão ser determinados pela expressão seguinte.

$$\begin{aligned} \sigma_{Rd} &= f_{yd} \\ \tau_{Rd} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_{yd} \end{aligned} \quad (\text{eq. 11})$$

em que  $f_{yd}$  representa o valor de cálculo da tensão de cedência do material, que no caso dos aços convencionais possuem um valor característico, à temperatura ambiente, igual ao especificado na tabela 1.

No caso de estados de tensão duplos, a verificação à segurança implica a observância da condição expressa na equação seguinte, tendo em consideração que o valor da tensão solicitante de cálculo deverá ser determinado segundo um critério de resistência específico.

$$\sigma_{Sd,ref} = \sqrt{\sigma_{Sd,x}^2 + \sigma_{Sd,y}^2 - \sigma_{Sd,x} \times \sigma_{Sd,y} + 3\tau_{Sd,xy}^2} \quad (\text{eq. 12})$$

O valor da tensão resistente de cálculo possui o significado anteriormente definido, enquanto que a tensão solicitante de cálculo equivalente (de referência)  $\sigma_{Sd,ref}$ , critério de plasticidade de Von Mises – Hüber, deverá ser determinada em função do tensor das tensões instalado em cada ponto do elemento estrutural. Nestes casos, é possível determinar um estado de tensão instalado que deverá ficar situado no interior da curva de interação representada na figura seguinte.

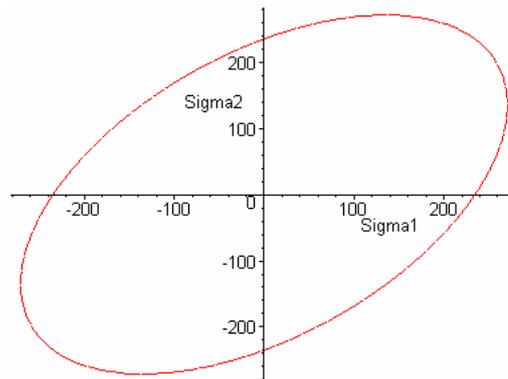


Fig. 22 – Curva de interação para estados duplos de tensão (critério von Mises – Hüber) para o caso de um aço S235.

### 2.3.2 – Estado limite último de encurvadura por varejamento

A verificação à segurança em relação ao estado limite último de encurvadura deverá ser determinada para todos os elementos sujeitos a esforços de compressão em que se verifique o risco de um fenómeno instabilidade ocorrer num elemento estrutural, ver figura seguinte. Nestes casos, a condição a verificar deverá ser a seguinte:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd} \quad (\text{eq. 13})$$

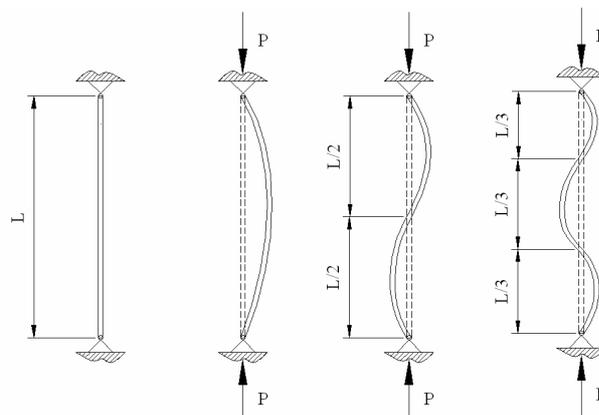


Fig. 23 – Modos de encurvadura de coluna bi-articulada.

em que o valor da tensão solicitante de cálculo deverá ser determinado de acordo com a seguinte expressão.

$$\sigma_{sd} = \frac{N_{sd}}{A\varphi} \quad (\text{eq. 14})$$

Na expressão anterior,  $N_{sd}$  representa o valor de cálculo do esforço normal actuante, determinado tendo em consideração as combinações de acções e os coeficientes de segurança referidos no regulamento RSA. O parâmetro  $A$  refere-se à área da secção transversal do elemento em estudo e  $\varphi$  representa um coeficiente de encurvadura, em função da esbelteza  $\lambda$  do elemento estrutural, e que se encontra representado na figura seguinte em função da esbelteza.

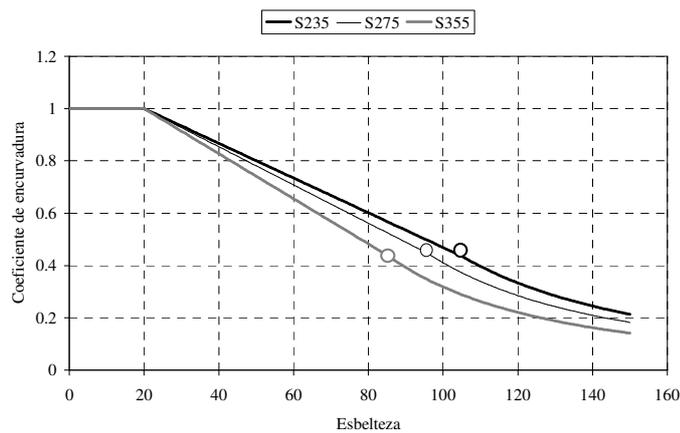


Fig. 24 – Coeficiente de encurvadura para diferentes tipos de materiais.

Tabela 2 – Valores do coeficiente de encurvadura.

TIPO DE AÇO	COEFICIENTE DE ESBELTEZA $\lambda$	COEFICIENTE DE ENCURVADURA $\varphi$
S235	$\lambda \leq 20$	$\varphi = 1$
	$20 < \lambda \leq 105$	$\varphi = 1.1328 - 0.00664\lambda$
	$\lambda > 105$	$\varphi = 4802/\lambda^2$
S275	$\lambda \leq 20$	$\varphi = 1$
	$20 < \lambda \leq 96$	$\varphi = 1.1460 - 0.00730\lambda$
	$\lambda > 105$	$\varphi = 4103/\lambda^2$

S355	$\lambda \leq 20$	$\varphi = 1$
	$20 < \lambda \leq 85$	$\varphi = 1.1723 - 0.00862\lambda$
	$\lambda > 85$	$\varphi = 3179/\lambda^2$

No domínio linear, a carga crítica de Euler poderá ser determinada a partir da equação de equilíbrio deste tipo de elemento estrutural. Partindo de uma solicitação equivalente à da figura 23 e admitindo conhecidas as características mecânicas do material e as características geométricas da secção do elemento, a posição momentânea do elemento difere da posição natural (linha recta entre apoios), por um deslocamento  $y(x)$ , correspondente à flecha para uma dada secção ao longo do comprimento do elemento.

A determinação da configuração de equilíbrio passa pela determinação da deformada, expressa pela equação seguinte:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (\text{eq. 15})$$

Nesta equação,  $M(x) = -P \cdot y(x)$ , pelo que substituindo o valor do momento se obtém:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0 \quad (\text{eq. 16})$$

Substituindo  $P/EI = k^2$ , a equação diferencial pode escrever-se:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad (\text{eq. 17})$$

A equação diferencial homogénea pode ser resolvida pelos métodos tradicionais, admitindo como solução uma expressão do tipo harmónica.

$$y(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad (\text{eq. 18})$$

As constantes de integração são função das condições de apoio. Para o tipo de problema representado na figura 23, os deslocamento são nulos nas extremidades, pelo que:

$$C_2 = 0 \quad , \quad C_1 \sin(kx) = 0 \quad (\text{eq. 19})$$

Para além da solução trivial nula, a equação anterior pode apresentar uma posição de equilíbrio indiferente, para um valor indeterminado da primeira constante de integração.

$$\sin(kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{eq. 20})$$

Esta solução corresponde aos três primeiros modos de encurvadura (ver figura 23), e a que correspondem três valores de carga crítica, dados por:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{eq. 21})$$

O valor mais baixo da carga crítica,  $n=1$ , designa-se por carga crítica de Euler. A partir deste valor é possível calcular o valor da tensão crítica, correspondente ao valor da tensão normal média na secção, exprimindo o momento de inércia em função do raio de giração.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{eq. 22})$$

Nesta expressão,  $\lambda$  representa o coeficiente de esbelteza do elemento.

Atendendo ao estado limite a considerar e aos estado limite último sem plastificação, o dimensionamento destes elementos encontra-se limitado pelas curvas correspondentes aos respectivos estados limites.

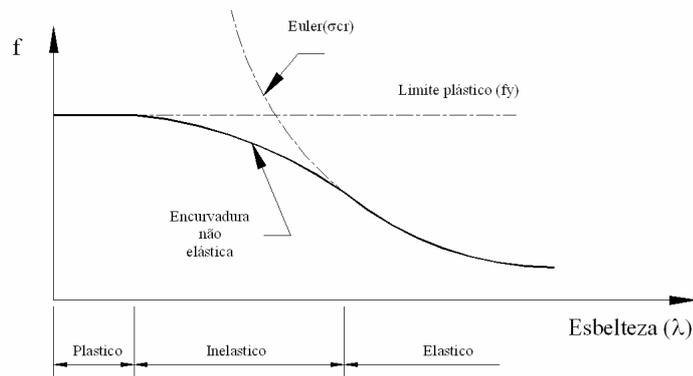


Fig. 25 – Variação da tensão crítica com a esbelteza.

No caso de elementos estruturais sujeitos à flexão e à compressão, os valores de cálculo das tensões actuantes devem ser determinados por teorias apropriadas, convenientemente comprovadas pela experiência, sendo adoptado neste regulamento o critério especificado pela norma belga NBN B51001, de acordo com a seguinte expressão.

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} + \frac{C_x M_{Sd,x}^{\max}}{k \left( \frac{l}{v} \right)_x \left( 1 - \frac{N_{Sd}}{\frac{N_{Ex}}{1.8}} \right)} + \frac{C_y M_{Sd,y}^{\max}}{\left( \frac{l}{v} \right)_y \left( 1 - \frac{N_{Sd}}{\frac{N_{Ey}}{1.8}} \right)} \quad (\text{eq. 23})$$

Nesta expressão,  $M_{Sd,x}^{\max}$  e  $M_{Sd,y}^{\max}$  representam valores solicitantes de cálculo dos momentos flectores máximos relativos aos eixos principais de inércia da secção, “x” e “y”, respectivamente, em que “x” corresponde ao eixo de maior momento de segunda ordem. O cociente  $l/v$  representa o módulo de flexão, enquanto  $k$  representa o coeficiente de bambeamento, que depende das características geométricas dos perfis a utilizar e que no caso de perfis Europeus IPE variam de acordo com a figura seguinte.

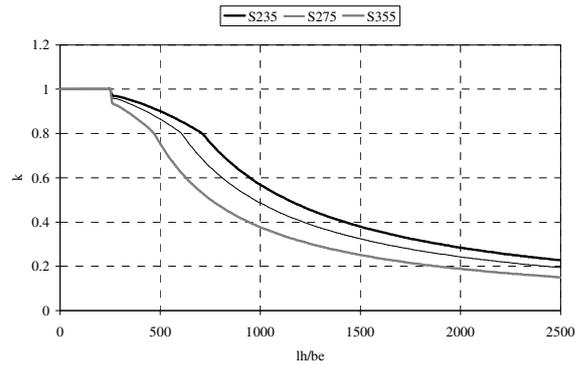


Fig. 26 – Coeficiente de bambeamento para perfis IPE e para diferentes tipos de materiais.

Neste gráfico,  $l, h, b, e$  representam respectivamente, o vão do elemento flectido, a altura do elemento, a largura dos banzos e a espessura destes últimos.

$N_{Ex}$  e  $N_{Ey}$  representam as cargas críticas de Euler, segundo as direcções “x” e “y”.

Os coeficientes  $c_x$  e  $c_y$  podem ser aproximados pelo valor 0.85 no caso de estruturas de nós móveis. Para estruturas de nós fixos, em que os membros não estejam sujeitos a cargas transversais aplicadas ao longo dos elementos, os valores de  $c_x$  e  $c_y$  podem ser determinados pela seguinte expressão.

$$c = \sqrt{0.3 \left( 1 + \frac{M_2^2}{M_1^2} \right) + 0.4} \times \frac{M_2}{M_1} \quad (\text{eq. 24})$$

$M_i$  representam os momentos nas extremidades e deverão ser introduzidos com o respectivo valor algébrico.

No caso de nós fixos com cargas transversais ao longo do elemento, os valores de  $c_x$  e  $c_y$  podem ser determinados pela teoria da estabilidade elástica, a que corresponde, simplificada,  $c = 0.85$  para elementos encastrados, e  $c = 1$  para o caso de elementos articulados na extremidade.

Salvo justificação devidamente fundamentada, os elementos estruturais com esbelteza superior a 180 apenas poderão ser utilizados em funções de contraventamentos, não excedendo em caso algum o valor de 250.

A determinação do coeficiente de encurvadura tem em consideração os efeitos de segunda ordem, tendo os resultados sido obtidos pela fórmula de Euler, no caso dos elementos se encontrarem dentro do regime elástico (zona direita da figura 25) e tendo sido utilizado um

coeficiente de segurança igual a 1.8. Para o caso de elementos menos esbeltos ( $\lambda \leq 20$ ), o coeficiente é igual à unidade, uma vez que os referidos efeitos de segunda ordem são desprezados. Para os elementos de esbelteza intermédia admite-se que os valores deste coeficiente variam linearmente entre os anteriormente referidos.

### 2.3.3 – Estado limite último de encurvadura por bambeamento

Nos casos de elementos estruturais sujeitos a esforços de flexão em que haja risco de bambeamento (encurvadura lateral torsional), a verificação da segurança em relação ao estado limite último de encurvadura deverá ser determinada em função da inequação 13. O valor da tensão solicitante de cálculo deverá ser determinado pela expressão:

$$\sigma_{sd} = \frac{M_{sd}^{\max}}{k \frac{l}{v}} \quad (\text{eq. 25})$$

em que  $M_{sd}^{\max}$  representa o valor de cálculo do momento flector actuante máximo no elemento, tendo em consideração as combinações das acções previstas e respectivos coeficientes de segurança. O parâmetro  $k$  possui o mesmo significado da figura 26, enquanto que o módulo de flexão  $l/v$  é facilmente determinado por tabelas semelhantes à apresentada para um material do tipo S235.

Tabela 3– Coeficiente de encurvadura por bambeamento.

TIPO DE AÇO	RELAÇÃO GEOMÉTRICA DA SECÇÃO	COEFICIENTE DE ENCURVADURA $k$
S235	$\frac{lh}{be} \leq 250$ $250 < \frac{lh}{be} \leq 711$ $711 < \frac{lh}{be} < 2500$	$k = 1$ $k = 1 - 396 \times 10^{-9} \left( \frac{lh}{be} \right)^2$ $k = 569 / \frac{lh}{be}$
Em que:	$l$ representa o vão do elemento flectido, $h$ e $b$ a altura e largura da respectiva secção, e $e$ o valor da espessura do banzo.	

Este fenómeno de instabilidade é caracterizado pela ocorrência de deslocamentos laterais, na direcção ortogonal ao plano de carregamento, resultado dos esforços de compressão exercidos no banzo inferior.

Um elemento de viga apoiado em suportes de forquilha, figura 27, que impeçam a rotação das secções extremas em relação ao eixo longitudinal, submetido ao estado de flexão pura incremental  $M$ , origina um comportamento semelhante ao representado na figura 28.

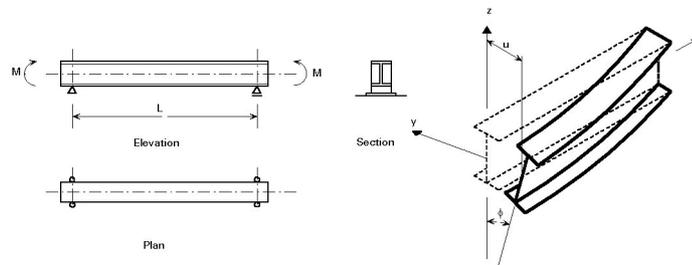


Fig. 27 – Definição básica do problema de encurvadura lateral.

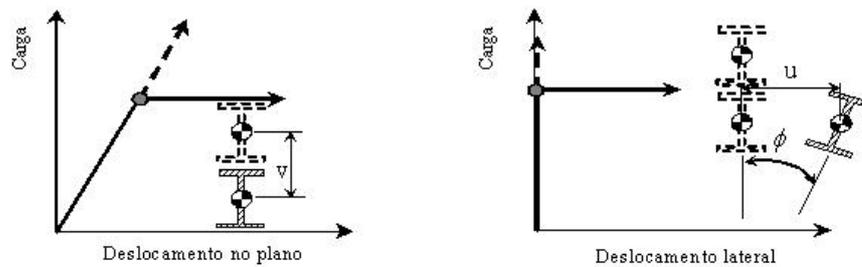


Fig. 28 – Relação força – deslocamento nas fases de pré e pós encurvadura.

O incremento progressivo da carga implica um deslocamento vertical no plano do carregamento, até ao momento de bifurcação, a partir do qual o elemento estrutural possui um movimento lateral associado ao movimento de rotação da secção.

No domínio elástico, o valor do momento resistente máximo deverá ser dado pelo correspondente valor crítico, determinado pela expressão seguinte.

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \times \sqrt{\frac{I_w}{I_y} + L^2 \times \frac{GJ}{\pi^2 EI_y}} \quad (\text{eq. 26})$$

Nesta expressão verifica-se que o valor de  $M_{cr}$  depende do material ( $E$  - módulo de elasticidade,  $G$  - módulo de elasticidade transversal) e das características geométricas da secção recta da viga ( $I_y$  - momento de segunda ordem em relação ao eixo de menor resistência,  $I_w$  - constante de empenamento e  $J$  a constante de torção da secção).

Para determinação da expressão anterior, considera-se o caso de uma viga sujeita a um carregamento de flexão uniforme, simplesmente apoiada, com secção recta duplamente simétrica, ver figura anterior. A viga pode encurvar de acordo com o sistema de equações diferenciais [21].

$$\begin{aligned}(EI_y u'')'' + (M_x \phi)'' &= 0 \\ (EI_w \phi'')'' - (GJ \phi')' + (M_x u'') &= 0\end{aligned}\tag{eq. 27}$$

A primeira equação exprime a igualdade entre a resistência à flexão  $(EI_y u'')''$  e a acção de flexão lateral  $-(M_x \phi)''$  causado pela rotação da secção. A segunda equação exprime a igualdade entre a soma da rigidez interna de empenamento e de torção  $[(EI_w \phi'')'' - (GJ \phi')']$  e o valor do momento distribuído, gerado pelo empenamento e rotação do elemento, durante o processo de instabilidade.

Uma solução possível para o sistema de equações (27) pode ser verificada através da substituição da expressão (28), ou utilizando uma função aproximada polinomial quadrática (29).

$$\frac{u}{\delta} = \frac{\phi}{\theta} = \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\tag{eq. 28}$$

$$\frac{u}{\delta} = \frac{\phi}{\theta} = \frac{z}{L} - \frac{z^2}{L^2}\tag{eq. 29}$$

Nestas soluções possíveis,  $\delta$  e  $\theta$  representam os valores de  $u$  e de  $\phi$  a meio vão da viga, enquanto que  $z$  representa a coordenada do comprimento do elemento, tendo em consideração o valor do momento aplicado nas extremidades  $M$ .

O elemento estrutural deverá verificar as equações de equilíbrio, bem como a equação da energia (30), que representa a igualdade, durante o processo de instabilidade, entre a energia armazenada por flexão, empenamento e torção e o valor do trabalho realizado pelo momento de flexão  $M$ .

$$\frac{1}{2} \int_0^L (EI_y u'^2 + EI_w \phi'^2 + GJ \phi'^2) dz + \frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \phi u'' dz = 0\tag{eq. 30}$$

A substituição das expressões propostas para a solução dos modos de encurvadura, e de todas as respectivas derivadas, na equação da energia, permitem obter um sistema homogéneo, dando origem ao valor do momento crítico em regime elástico  $M_{cr}$ . Este valor depende das condições de empenamento no apoio e do comprimento efectivo do elemento. Esta dependência é traduzida pela introdução de factores  $k_w$  e  $k$  na equação 26.

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{y1}}{(kL)^2} \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_w}{I_{y1}} + \frac{(kL)^2 GJ_1}{\pi^2 EI_{y1}}} \quad (\text{eq. 31})$$

O factor relacionado com o empenamento da secção nos apoios,  $k_w$ , deverá ser aproximado pelo valor unitário, nos casos em que seja possível verificar este fenómeno, caso contrário deverá ser escolhido um valor inferior. O valor do factor de comprimento,  $k$ , depende das condições de apoio e de de constringimento lateral, ver figura seguinte.

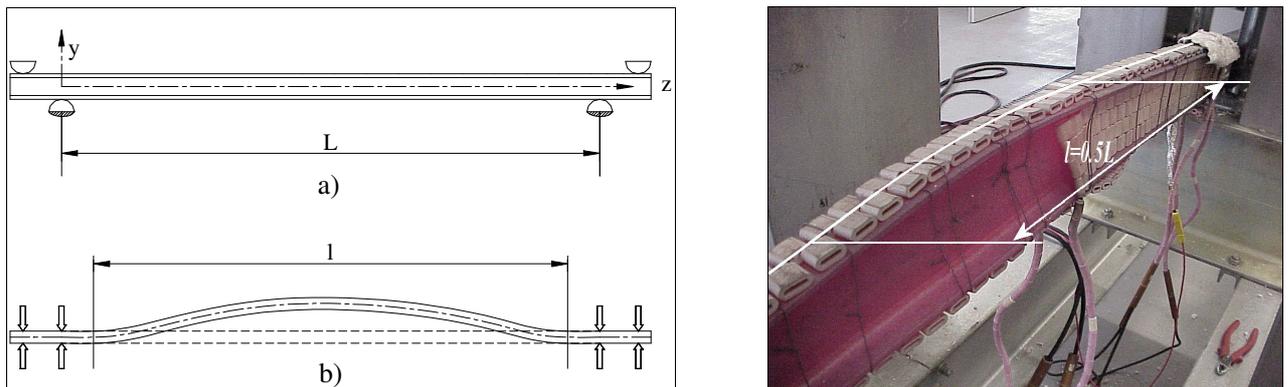


Fig. 29 – Factor de comprimento de encurvadura.

No caso de elementos de barra articulados nas duas extremidades, deverá ser considerado o comprimento teórico dos elementos.

No caso de elementos com apoios de encastramento total, e no caso de não existir a possibilidade de deslocamento transversal de um apoio relativamente a outro, o comprimento de encurvadura deverá ser considerado igual a metade do comprimento teórico do elemento.

No caso de elementos que apresentem uma extremidade livre e outra encastrada, o comprimento encurvadura deverá ser considerado igual ao dobro do respectivo comprimento teórico.

No caso de estruturas triangulares planas, cuja geometria obedeça ao descrito no artigo 13 do regulamento REAE, o comprimento encurvadura dos elementos que a compõem deverá ser

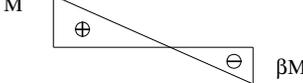
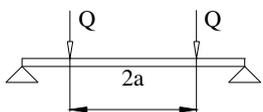
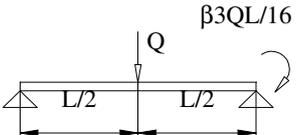
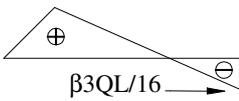
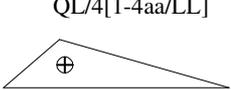
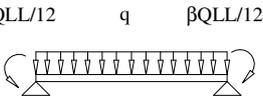
considerado igual a 80% do respectivo comprimento teórico dos elementos, no plano da estrutura. Esta condição obedece a que os elementos de ligação em cantoneira devam possuir um número mínimo de elementos de ligação na extremidade.

No caso de pórticos planos de nós considerados rígidos, pode considerar-se em geral, o comprimento encurvadura igual 80% do comprimento teórico.

Um tipo de carregamento diferente origina uma expressão para o momento crítico diferente. Esta dependência pode ser introduzida através de um factor de correcção  $\alpha_M$ , de acordo com a seguinte expressão.

$$M_{cr}^* = M_{cr} \times \alpha_M \tag{eq. 32}$$

Tabela 4 – Parâmetro de uniformização de momento, para diferentes tipos de carregamento.

ELEMENTO DE VIGA	DISTRIBUIÇÃO DO MOMENTO FLECTOR	$\alpha_M$	INTERVALO
		$1.75 + 1.05\beta + 0.3\beta^2$	$-1 < \beta < 1$
	$QL/2[1-2a/L]$ 	$1.0 + 0.35\left(1 - \frac{2a}{L}\right)^2$	$0 < \frac{2a}{L} < 1$
	$QL/4[1-3\beta/8]$ 	$1.35 + 0.15\beta$ $-1.2 + 3.0\beta$	$0 < \beta < 0.89$ $0.89 < \beta < 1$
	$QL/4[1-4aa/LL]$ 	$1.35 + 0.4\left(\frac{2a}{L}\right)^2$	$0 < \frac{2a}{L} < 1$
	$QLL/8[1-2\beta/3]$ 	$1.13 + 0.12\beta$ $-2.38 + 4.8\beta$	$0 < \beta < 0.75$ $0.75 < \beta < 1$

O valor de tensão crítica deverá ser determinado pela expressão seguinte, dividindo o valor do momento crítico pelo respectivo valor do módulo elástico da secção.

$$\sigma_{cr} = \frac{M_{cr}}{W_{el,x}} \quad (\text{eq. 33})$$

### 2.3.4 – Estado limite último de resistência com plastificação

Na verificação à segurança em relação aos estados últimos de resistência pode ser considerado o comportamento elasto-plástico dos elementos de uma estrutura, quer por correcção dos valores de cálculo das tensões determinadas em regime elástico, quer por aplicação do método das rótulas plásticas, quer ainda através da utilização de métodos avançados de cálculo em regime não linear geométrico e material.

No caso de se utilizar o método correctivo, a plastificação resultante não deverá exceder a correspondente a uma extensão plástica de 7,5% da extensão que se verifica quando é atingida a cedência do aço. Para este efeito, o valor da tensão de cedência deverá ser tomado igual ao valor das tensões resistentes de cálculo.

No caso de utilização do método das rótulas plásticas, deve ser considerado que os aços devem poder suportar todas as deformações plásticas necessárias para formação de todas as rótulas plásticas previstas no mecanismo de rotura, que as tensões de plastificação devem ser tomadas iguais aos valores de cálculo das tensões resistentes dos aços. Deve ser considerada a influência dos esforços axiais e transversos na formação e comportamento de rótulas plásticas e verificado que não ocorrem deformações inadmissíveis ou fenómenos de instabilidade, localizados ou de conjunto, antes da formação da última rótula plástica. As ligações entre os elementos da estrutura devem ser capazes de transmitir esforços decorrentes da formação de rótulas plásticas. As acções resistentes determinadas por aplicação deste método devem ser divididas por 1.2, para a obtenção dos correspondentes valores de cálculo a utilizar na verificação da segurança.

Considere-se o caso de plastificação na flexão de elementos de viga, admitindo um comportamento material com cedência, mas sem endurecimento por deformação, ver figura seguinte.

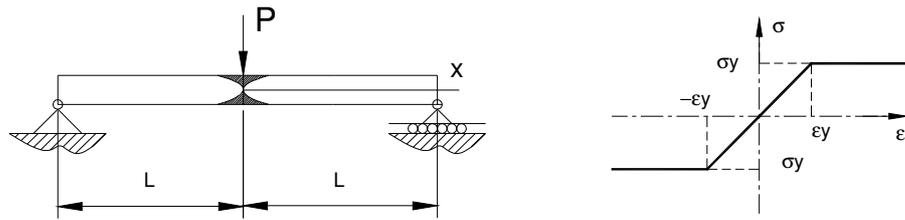


Fig. 30 – Formação de rótula plástica.

O momento de flexão provocado na secção pode ser determinado em função do campo de tensão instalado, considerando dois tipos de forças instaladas (elástico ( $\alpha = 1$ ) e o plástico ( $\alpha = 0$ ))

$$F_1 = \frac{\alpha}{2} bc \sigma_y$$

$$F_2 = (1 - \alpha) bc \sigma_y$$
(eq. 34)

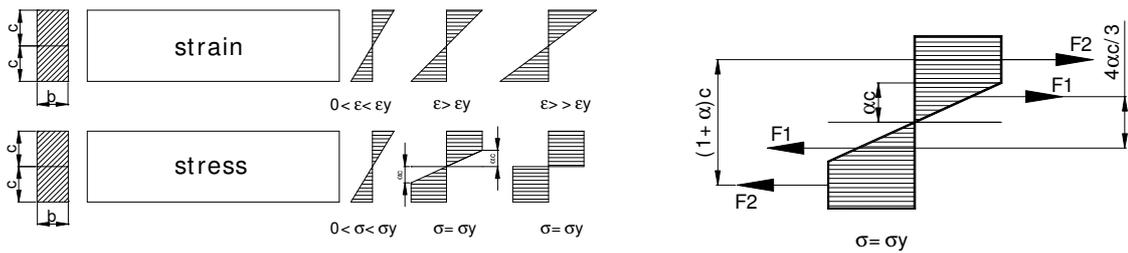


Fig. 31 – Relação tensão deformação na secção recta em vários instantes.

$$M = \frac{4\alpha c}{3} F_1 + (1 + \alpha)c F_2 = \frac{3 - \alpha^2}{3} bc^2 \sigma_y$$
(eq. 35)

Quando a cedência do material começa, a variável  $\alpha = 1$  e o momento, denominado elástico, vale:

$$M_y = \frac{2}{3} bc^2 \sigma_y$$
(eq. 36)

Quando se verifica a cedência do material em toda a secção, a variável  $\alpha = 0$  e o momento, denominado plástico, vale:

$$M_{pl,y} = bc^2 \sigma_y \quad (\text{eq. 37})$$

Estes valores dizem respeito a uma secção recta rectangular. O factor de forma, definido pelo quociente entre estes dois valores típicos de momentos flectores, vale 1,5.

A curvatura da secção da viga, dada pela relação utilizada no domínio elástico  $k = M/EI$ , pode ser determinada para a zona central não plastificada, através da expressão:

$$k = \frac{\frac{2}{3} \sigma_y \alpha^2 c^2 b}{EI_{elastico}} = \frac{\sigma_y}{Ec \alpha} \quad (\text{eq. 38})$$

Nesta expressão a variável  $\alpha$  varia entre 0 e 1.

Substituindo a equação anterior na expressão do momento flector instalado na secção elasto plástica, obtém-se:

$$M = \left[ c^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_y}{Ek} \right)^2 \right] b \sigma_y \quad (\text{eq. 39})$$

Esta relação é válida para  $k \geq \sigma_y/Ec$ , ou seja, a partir do instante em que o momento elástico é atingido. A relação completa entre momento e curvatura pode ser observada no gráfico da figura que se segue. Constata-se que o valor da curvatura não necessita de muito grande para que se atinja o momento plástico. De facto, se a curvatura for quatro vezes superior ao respectivo valor correspondente a  $M = M_y$ , então o valor instalado do momento aproxima-se de 98%  $M_{pl,y}$ .

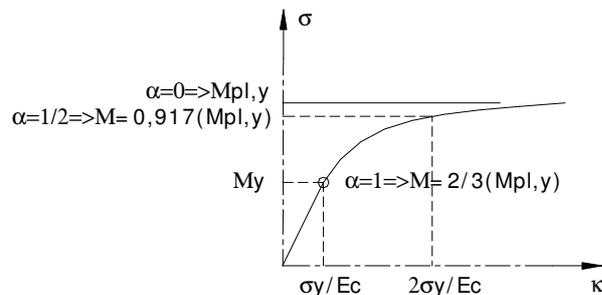


Fig. 32 –Momento flector versus curvatura.

A justificação física para este comportamento reside no facto de que as tensões que se verificam numa pequena zona elástica são inferiores e os respectivos braços, também pequenos, acabam por contribuir pouco para o valor do momento.

Na teoria geral de vigas, o efeito dos esforços transversos e normais é desprezado. Admitindo a secção completamente plastificada no ponto de aplicação da carga, o momento flector atinge o valor do momento plástico ( $M_{pl,y}$ ) na posição a meio vão ( $x=0$ ), diminuindo, linearmente, até ao valor nulo nas extremidades, ver figura seguinte.

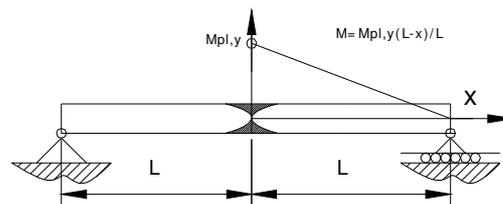


Fig. 33 – Diagrama de momento flector.

Admitindo que o valor do momento plástico para esta secção é igual a  $M_{pl,y} = bc^2 \sigma_y$ , combinando a equação do momento ao longo do comprimento da viga com a equação 35, obtém-se:

$$M = \frac{3 - \alpha^2}{3} bc^2 \sigma_y = bc^2 \sigma_y \left( \frac{L - x}{L} \right) \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{3x}{L}} \quad (\text{eq. 40})$$

Esta expressão demonstra que a fronteira entre o domínio elástico e plástico corresponde a uma parábola, que se estende para  $x = \pm L/3$ . Embora o material tenha cedido numa extensão considerável ao longo da viga, apenas foi considerada a secção totalmente plastificada para  $x=0$ . Esta localização infinitesimal é dominada por rótula plástica.

O aumento da carga produzirá um aumento da deformação, mantendo a tensão constante (ver figuras 30 e 31). A zona plástica não aumentará a sua forma, nem a sua extensão. O elemento de viga tenderá em assumir uma forma parecida com um mecanismo em “V”, assumindo as zonas adjacentes à rótula plástica um movimento de corpo rígido. Na realidade, as grandes rotações obtidas na rótula produzirão um mecanismo de endurecimento por deformação, possibilitando o aumento da carga, incrementando ainda mais as tensões, espalhando a zona plastificada.

Os fundamentos qualitativos apresentados para a secção rectangular podem ser extrapolados para outras secções (obtidas por laminagem: IPE, HEA, etc.). Quantitativamente, o

factor de forma  $M_{pl,y} / M_y$  sofre alteração (IPE  $\approx 1,5$ ). A amplitude deste factor não afecta a determinação da carga limite, onde o objectivo será encontrar uma relação entre  $M_{pl,y}$ , a carga e a geometria da estrutura.

### 2.3.4 – Secções úteis

As secções a considerar no dimensionamento dos elementos devem satisfazer a um conjunto de princípios, em função do estado limite em verificação.

Para o caso dos estados limites últimos, e para o caso de elementos à tracção, devem descontar-se os furos de rebites ou parafusos, enquanto que no caso de elementos à compressão, não deverão ser descontados os furos. Para o caso dos elementos à flexão, os momentos de primeira e segunda ordem deverão ser calculados em relação aos eixos centrais. No cálculo das tensões normais, a determinação do módulo de flexão deverá ser feita descontando os furos existentes na parte traccionada das secções e considerando-os agrupados da maneira mais desfavorável.

Para o dimensionamento em relação ao estado limite de deformação, no cálculos das deformações pode ser considerada a área da secção bruta dos elementos.

As secções dos elementos estruturais devem verificar os estado limites em função do carregamento a que estão sujeitos.

ELEMENTOS	RESISTÊNCIA					
	SECÇÕES TRANSVERSAIS	ENCURVADURA POR VAREJAMENTO	ENCURVADURA POR BAMBEAMENTO	ENCURVADURA POR CORTE	ENCURVADURA DO BANZO NO PLANO DA ALMA	AO ENRUGAMENTO DA ALMA
TRACCIONADOS	sim	-	-	-	-	-
COMPRIMIDOS	sim	sim	-	-	-	-
VIGAS (FLEXÃO)	sim	-	sim	sim	sim	sim
ELEMENTOS SUJEITOS À FLEXÃO COMPOSTA	sim	sim	sim	sim	sim	sim

### 2.3.5 – Esforços secundários

No dimensionamento dos diferentes elementos das estruturas devem ser considerados, quando assumam valores significativos, os esforços secundários provenientes de excentricidades, deslocamentos resultantes de acções aplicadas e ainda os efeitos da rigidez das ligações.

No caso de cantoneiras ou de outros perfis isolados, traccionados excentricamente em consequência do modo como são realizadas as ligações, deverá efectuar-se o dimensionamento, tanto dos perfis como das ligações, considerando um esforço de tracção superior ao efectivamente actuante, obtido pela multiplicação de um coeficiente de aumento, conforme tabela seguinte.

Tabela 5 – Factores de ampliação para efeitos secundários.

TIPOS DE PERFIS	COEFICIENTE DE AUMENTO
Cantoneiras de abas iguais	1.20
Perfis T	1.15
Perfis U (ligados pela alma)	1.10

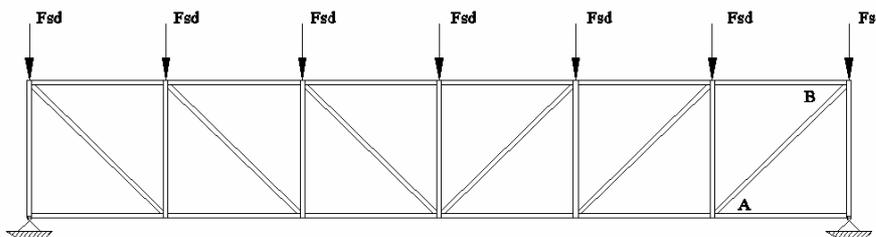
### 2.3.6 – Exemplos de aplicação

#### 2.3.6.1 – Dimensionamento de elemento ligação

Dimensione o elemento de ligação AB na estrutura apresentada na figura que se segue, em função do estado limite último de resistência sem plastificação, tendo em consideração processos de ligação aparafusada. É ainda conhecido que o esforço de tracção no elemento AB deverá ser majorado de acordo com uma combinação de acções regulamentar e dos esforços plausíveis (peso próprio (144 [kN]) e esforço aplicado (240 [kN])).

$$F_{Sd} = 1.4 \times 144 + 1.6 \times 240 = 585,6 \quad [kN]$$

O material dos elementos estruturais é um S355, enquanto que o material dos elementos de ligação previsto é classe 8.8, apresentando uma tensão de cedência igual a 640 [MPa] ( $8 \times 100 \times 0.8 = 640$ ).



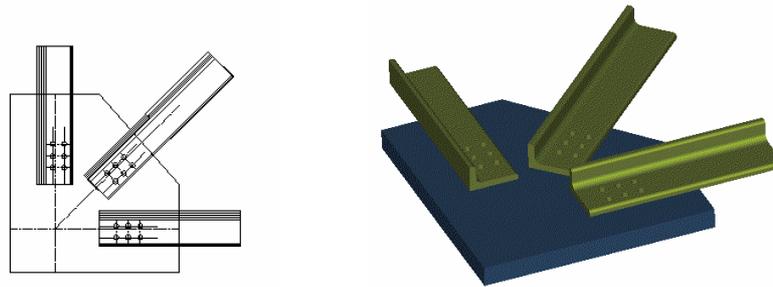


Fig. 34 – Processo de ligação do elemento AB ao resto da estrutura.

A primeira escolha para o perfil deverá ser o resultado da verificação da segurança em relação ao estado limite último de resistência sem plastificação.

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

A tensão solicitante de cálculo, aplicada na secção resistente do perfil deverá ser calculada de acordo com:

$$\sigma_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{A} = \frac{585,6 \times 10^3}{A} \leq 355 \times 10^6 \Leftrightarrow A \geq 16,5 [cm^2]$$

Esta condição implica a escolha de uma secção resistente igual ou superior a um perfil com as características de L120x80x10, ver figura seguinte.

Designation Designation Bezeichnung	Dimensions Abmessungen						A cm <sup>2</sup>	Position des axes Position of axes Lage der Achsen								Surface Oberfläche	
	g kg/m	h mm	b mm	t mm	r <sub>1</sub> mm	r <sub>2</sub> mm		z <sub>1</sub> cm	y <sub>1</sub> cm	x <sub>1</sub> cm	z <sub>2</sub> cm	y <sub>2</sub> cm	x <sub>2</sub> cm	z <sub>3</sub> cm	A <sub>L</sub> m <sup>2</sup> /m	A <sub>G</sub> m <sup>2</sup> /t	
L 120 x 80 x 8*	12,2	120	80	8	11	5,5	15,49	3,83	1,87	8,23	5,97	3,25	4,19	2,09	0,391	32,12	
L 120 x 80 x 10*	15,0	120	80	10	11	5,5	19,13	3,92	1,95	8,19	6,01	3,35	4,17	2,15	0,391	26,01	
L 120 x 80 x 12**	17,8	120	80	12	11	5,5	22,69	4,00	2,03	8,14	6,04	3,45	4,16	2,20	0,391	21,93	
L 130 x 65 x 8	11,8	130	65	8	11	5,5	15,09	4,56	1,37	8,51	5,71	2,48	3,82	1,39	0,381	32,13	
L 130 x 65 x 10	14,6	130	65	10	11	5,5	18,63	4,65	1,45	8,44	5,77	2,57	3,78	1,46	0,381	26,02	
L 150 x 90 x 10*	18,2	150	90	10	12	6	23,15	5,00	2,04	10,10	7,07	3,61	4,97	2,20	0,470	25,84	
L 150 x 90 x 11	19,9	150	90	11	12	6	25,34	5,04	2,08	10,07	7,09	3,66	4,95	2,23	0,470	23,61	
L 150 x 100 x 10*	19,0	150	100	10	12	6	24,15	4,81	2,34	10,27	7,48	4,08	5,25	2,64	0,490	25,83	
L 150 x 100 x 12*	22,5	150	100	12	12	6	28,71	4,90	2,42	10,23	7,52	4,18	5,23	2,70	0,490	21,72	
L 150 x 100 x 14**	26,1	150	100	14	12	6	33,19	4,98	2,50	10,19	7,55	4,28	5,22	2,75	0,490	18,79	
L 160 x 80 x 10	18,2	160	80	10	13	6,5	23,18	5,63	1,69	10,46	7,04	3,06	4,70	1,73	0,469	25,76	
L 160 x 80 x 12	21,6	160	80	12	13	6,5	27,54	5,72	1,77	10,40	7,10	3,15	4,66	1,80	0,469	21,69	
L 200 x 100 x 10*	23,0	200	100	10	15	7,5	29,24	6,93	2,01	13,15	8,74	3,72	5,94	2,09	0,587	25,58	
L 200 x 100 x 12*	27,3	200	100	12	15	7,5	34,80	7,03	2,10	13,08	8,81	3,82	5,89	2,17	0,587	21,49	
L 200 x 100 x 14	31,6	200	100	14	15	7,5	40,28	7,12	2,18	13,01	8,86	3,91	5,85	2,24	0,587	18,57	

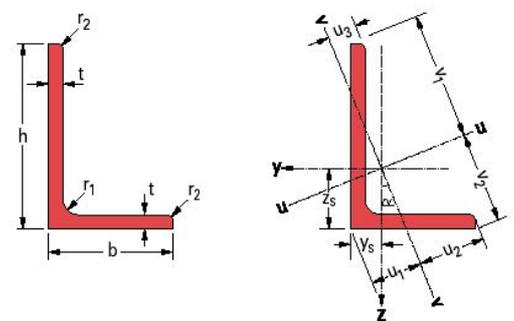


Fig. 35 – Parte de catálogo de perfil metálicos em cantoneira (Arbed).

O elemento de ligação aparafusada deverá ser dimensionado tendo em consideração o número de parafusos e o tamanho de cada um deles. Neste processo deverá ser verificada a

segurança do elemento de ligação, em relação ao estado limite último de resistência sem plastificação e ao mesmo tempo verificado o cumprimento do estipulado no REAE relativamente às disposições de projecto (disposição dos elementos de ligação).

A primeira condição para verificação de segurança deverá ser testada para o estado de corte a que o elemento está submetido, verificando:

$$\tau_{Rd} \leq 0.7 \times f_{yd} \Leftrightarrow \frac{585,6 \times 10^3}{n \times A} \leq 0.7 \times f_{yd}$$

em que  $n$  representa o número de parafusos,  $A$  o valor da área resistente do parafuso e  $f_{yd}$  o valor da tensão de cedência do elemento de ligação.

Nestas condições pode ser determinado o seguinte quadro de soluções iterativas.

Tabela 6 – Solução iterativa de projecto para o elemento de ligação.

$n$	PARAFUSO - DESIGNAÇÃO
1	M40
2	M30
4	M24
6	M20

Em função dos resultados determinados, a solução deveria considerar por assegurar a rigidez da ligação e o assegurar o menor tamanho dos elementos de ligação possível. Nestas condições, optando pela solução de 6 parafusos, deverá ser verificada a regra de disposição, conforme se representa na figura seguinte.

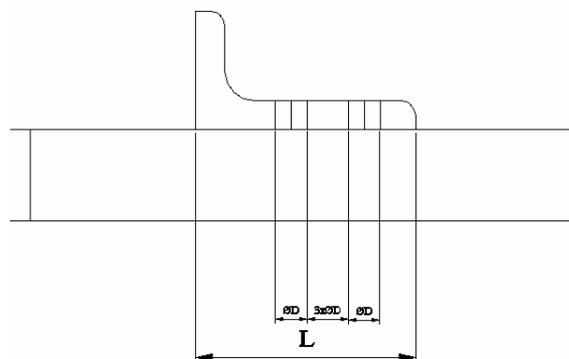


Fig. 36 – Pormenor de ligação. Verificação da disposição de projecto.

Esta regra de disposição obriga a escolha de um perfil tipo L150x90x10.

Com esta nova solução, deverá ser verificada a segurança do elemento estrutural junto do nó fragilizado da estrutura. Deverá ser utilizada a área resistente efectiva, descontando a área correspondente a cada parafuso, tendo em consideração que o elemento está submetido a um estado de tracção.

$$\sigma_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{A_{ef}} = \frac{585,6 \times 10^3}{(A - 2 \times (0,022 \times 0,010))} \leq 355 \times 10^6 \Leftrightarrow 312,3 [MPa] \leq 355 [MPa]$$

### 2.3.6.2 – Instabilidade de pilar

Escolha o perfil da gama HEA a utilizar para verificar a segurança do elemento representado na figura seguinte, submetido a um esforço de 2200000 [N]. Admita que o material é um aço S235.

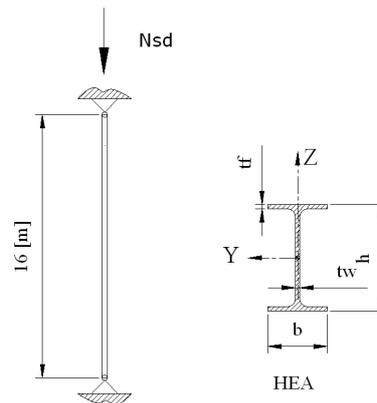


Fig. 37 – Dimensionamento do pilar em compressão.

De acordo com o artigo 42 do regulamento REAE, deve-se verificar a inequação seguinte:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

A tensão solicitante de cálculo deverá ser determinada pela equação 14

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A \varphi}$$

O coeficiente de encurvadura  $\varphi$  será função da esbelteza do pilar  $\lambda$  e portanto do perfil seleccionado. Como primeira aproximação de um processo iterativo, poderemos determinar a área da secção necessária para atingir um estado plástico da secção.

$$A_0 = \frac{2200000}{235 \times 10^6} = 9.36 \times 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]}$$

A esta secção corresponde, no mínimo, um perfil HEA 280. Neste caso, o valor da área resistente é igual a  $9.73 \times 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]}$ , implicando um raio de giração igual a 70 [mm] e um valor de esbelteza igual a 228.

$$\lambda = \frac{Le}{i_z} = \frac{L}{0,070} = 228 \Rightarrow \varphi = 4802 / \lambda^2 = 0.09$$

Finalmente, o valor da tensão solicitante de cálculo pode ser determinada:

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} = \frac{2200000}{9730 \times 10^{-6} \times 0.09} = 2512 \text{ [MPa]}$$

O valor da tensão resistente de cálculo vale 235 [MPa], não se verificando a inequação de partida. A solução deve ser novamente procurada, utilizando um método iterativo. Considere-se o perfil HEA 400.

$$A = 15900 \text{ [mm}^2\text{]} ; i_z = 73,4 \text{ [mm]} ; \lambda = \frac{Le}{i_z} = 217 ; \varphi = 4802 / \lambda^2 = 0.102$$

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} = \frac{2200000}{15900 \times 10^{-6} \times 0.102} = 1356 \text{ [MPa]}$$

Novamente se pode concluir que a inequação de partida não é verificada. Assim sendo, deve ser testado um novo perfil que verifique esta condição. Escolhe-se agora o perfil HEA 450.

$$A = 17800 \text{ [mm}^2\text{]} ; i_z = 72,9 \text{ [mm]} ; \lambda = \frac{Le}{i_z} = 219 ; \varphi = 4802 / \lambda^2 = 0.1$$

$$\sigma_{sd} = \frac{N_{sd}}{A\varphi} = \frac{2200000}{178 \times 10^{-4} \times 0.1} = 1235 \text{ [MPa]}$$

Este perfil também não verifica claramente a condição de segurança relativamente ao estado de instabilidade por varejamento. Outra solução deveria ser adoptada para que não se verificasse instabilidade no plano xz, nomeadamente a colocação de um constrangimento ao deslocamento neste plano.

### 2.3.6.3 – Instabilidade de pilar encastrado, com secção composta

Determine o valor da carga máxima admissível a aplicar numa coluna em material S235 de 8 [m] de altura, encastrada na base, sendo a sua secção composta e representada na figura seguinte.

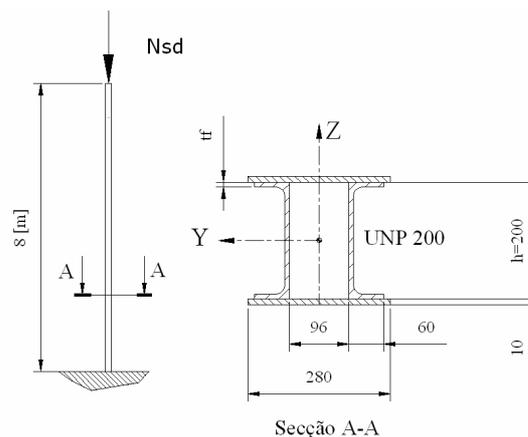


Fig. 38 – Dimensionamento de um pilar de secção composta em compressão.

Para determinação da esbelteza da coluna, é necessário determinar as características geométricas da secção recta. Os valores correspondentes ao perfil UNP 200 encontram-se tabelados e os valores correspondentes às chapas dos bantos 280 x 10 são de fácil determinação.

Perfil UNP 200:

$$A = 3220 \text{ [mm}^2\text{]} \quad I_{yG} = 19.1 \times 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} \quad I_{zG} = 1.48 \times 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} \quad i_y = 77 \text{ [mm]} \quad i_z = 21.4 \text{ [mm]}$$

Chapa de aço:

$$A = 2800 \text{ [mm}^2\text{]} \quad I_{yG} = 23333.3 \text{ [mm}^4\text{]} \quad I_{zG} = 18.3 \times 10^6 \text{ [mm}^4\text{]}$$

Determinação das propriedades da secção composta:

$$A = 12040 \text{ [mm}^2\text{]} \quad I_y = 99.98 \times 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} \quad I_z = 80.88 \times 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} \quad i_y = 91.12 \text{ [mm]} \quad i_z = 81.82 \text{ [mm]}$$

Como  $i_z < i_y$ , então  $\lambda_z > \lambda_y$  será de prever que o fenómeno de encurvadura possa ocorrer preferencialmente segundo o plano zz, mobilizando a flexão segundo yy.

$$\lambda = \frac{le}{i_z} = \frac{2 \times 8000}{81.92} = 195 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{4802}{\lambda^2} = 0.126$$

De entre os princípios subjacentes ao valor admitido pelo regulamento REAE para o coeficiente de encurvadura, importa referir que em geral não são admissíveis valores de esbelteza superiores a 180, salvo em elementos estruturais cuja função se destine a contraventamentos. Em caso algum se poderá exceder um valor de 250.

Para este tipo de secção e para o comprimento do elemento será de prever um fenómeno dentro do domínio elástico  $\lambda \geq 105$ , pelo que o valor do coeficiente de encurvadura deverá ser obtido a partir da expressão de Euler, utilizando um coeficiente de segurança de 1.8.

De qualquer forma, este perfil não respeita as condições atrás enunciadas, pelo que num caso real se deverá optar pela respectiva substituição ou modificação.

Para que se verifique o estado limite último de instabilidade por varejamento, deverá ser verificada a condição habitual:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N_{Sd}}{A \times \varphi} \leq 235 \times 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad N_{Sd} \leq 356.5 \text{ [kN]}$$

#### 2.3.6.4 – Instabilidade de pilar encastrado e simplesmente apoiado

A coluna da figura seguinte, encastrada na base e simplesmente apoiada no topo é constituída pelo perfil comercial HEA 200, em material S235. Determine o valor da carga admissível para os seguintes dois casos de carregamento:

- a) Carga axial P de compressão;
- b) Carga axial excêntrica no banzo,  $e=100$  [mm].

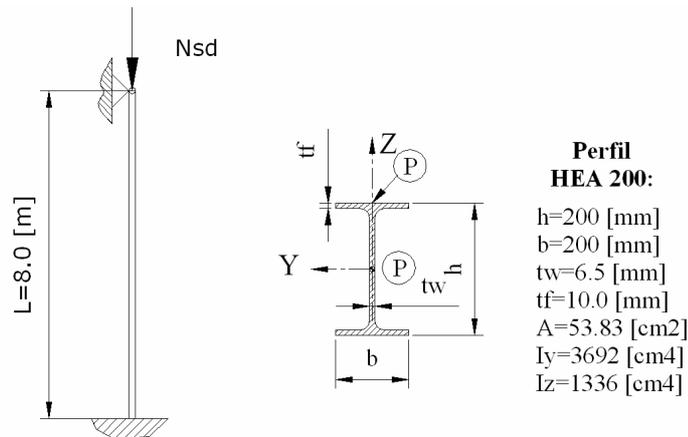


Fig. 39 – Dimensionamento de coluna com dois tipos de solicitação.

Para determinação da carga axial admissível, devem ser utilizados os artigos já referenciados, nomeadamente, a condição para verificação do estado limite último de instabilidade por varejamento.

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd} \Leftrightarrow \frac{N_{Sd}}{A \times \varphi} \leq 235 \times 10^6 \Leftrightarrow N_{Sd} \leq ? \text{ [kN]}$$

Porém, antes de impor a inequação anterior, deverá ser determinado o coeficiente de encurvadura.

$$\lambda = \lambda_y = \frac{le}{i_z} = \frac{0.7 \times L}{i_z} = \frac{5.6}{49.8 \times 10^{-3}} = 113.5$$

Este valor de esbelteza implica um valor para o coeficiente de encurvadura, determinado através da seguinte expressão:

$$\lambda = 113.5 \Rightarrow \varphi = \frac{4802}{\lambda^2} = 0.372$$

Pela condição de verificação da segurança, obtém-se:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd} \Leftrightarrow \frac{N_{Sd}}{A \times 0.372} \leq 235 \times 10^6 \Leftrightarrow N_{Sd} \leq 471.2 \text{ [kN]}$$

Para determinação da carga axial excêntrica, deve ser verificado o estado limite último de instabilidade, para o caso de um carregamento de compressão devido a um esforço normal e outro sobreposto de flexão, provocado pela excentricidade.

De acordo com o artigo 42 do REAE, o valor da tensão solicitante de cálculo deverá ser determinada pela expressão seguinte:

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} + \frac{C_y M_{Sd,y}^{\max}}{k W_y \left( 1 - \frac{N_{Sd}}{\frac{N_{Ey}}{1.8}} \right)}$$

Considerando  $c_y = 1$  e  $k = 1$ , é possível determinar os restantes parâmetros:

$$N_{Ey} = \pi^2 \frac{EI_y}{(L_e)^2} = \pi^2 \frac{210 \times 10^9 \times 36,9 \times 10^{-6}}{5,6^2} = 2,438 \times 10^6 = 2438 \text{ [kN]}$$

Partindo do pressuposto anterior, verifique-se qual o valor da tensão solicitante de cálculo devida ao esforço de flexão:

$$\sigma_{Sd}^{flexão} = \frac{C_y M_{Sd,y}^{\max}}{k W_y \left( 1 - \frac{N_{Sd}}{\frac{N_{Ey}}{1.8}} \right)} = \frac{1,0 \times (471,2 \times 10^3 \times 0,1)}{1 \times 388,6 \times 10^{-6} \left( 1 - \frac{471,2 \times 10^3}{\frac{2438 \times 10^3}{1,8}} \right)} = 185,7 \times 10^6 \text{ [Pa]}$$

O factor entre parênteses situado no denominador, resulta de num factor amplificador das tensões de cálculo, no caso de estas serem determinadas pelo expressão da flexão pura, sem considerar o efeito P-delta, referente à deformada da coluna.

A tensão resultante de solicitação é obtida pela soma das duas parcelas, pelo que não verifica a condição referida.

$$\sigma_{Sd} = 235 + 185,7 \text{ [MPa]}$$

Entrando num processo iterativo de projecto e admitindo um novo valor para o esforço normal,  $N_{Sd}=300$  [kN], a condição poderá ou não ser verificada.

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} + \frac{C_y M_{Sd,y}^{\max}}{k W_y \left( 1 - \frac{N_{Sd}}{N_{Ey}} \right)} = \frac{300 \times 10^3}{5380 \times 10^{-6} \times 0.372} + \frac{1 \times (300 \times 10^3 \times 0.1)}{389 \times 10^{-6} \left( 1 - \frac{300 \times 10^3}{\frac{2428 \times 10^3}{1.8}} \right)} = 150 \times 10^6 + 99 \times 10^6 \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{Sd} = 249 \times 10^6 \text{ [MPa]}$$

Este resultado não verifica a condição, pelo que um novo valor para o carregamento axial deveria ser determinado, ligeiramente inferior a 300 [kN].

### 2.3.6.5 – Verificação de segurança na movimentação de uma viga

A manutenção de uma viga de 40 [m] de um perfil HP400 x 231, em aço S235, é efectuada com o auxílio de duas guias, dispostas nas extremidades da viga em questão. Um coeficiente de majoração dinâmica (segurança) igual a 1.3 deverá ser adoptado para tomar em consideração as forças de impacto, as oscilações provocadas pelo vento e ainda pelas dificuldades do processo de manutenção executado pelas duas guias. Esta majoração deverá ser efectuada à solicitação provocada pelo peso próprio (carga distribuída).

Será que a viga corre o risco de encurvar por bambeamento? Em caso afirmativo, quais as medidas a adoptar para evitar este fenómeno de instabilidade.

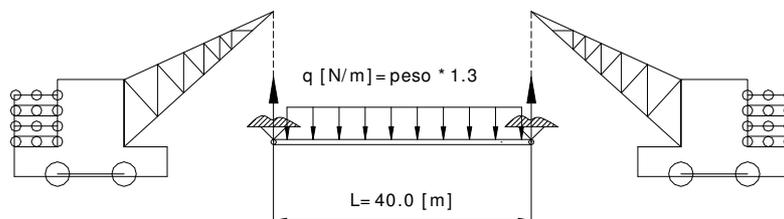


Fig. 40 – Modelo de condições fronteira utilizado para a movimentação do elemento estrutural.

Em função do processo de movimentação desta viga, pode ocorrer um fenómeno de instabilidade (encurvadura por bambeamento). Este fenómeno é caracterizado por um

deslocamento lateral acompanhado por uma rotação da secção. Assim dever-se-á verificar o artigo 43 do REAE.

Para o perfil em causa, HP400 x 231, o peso próprio é determinado através do valor da massa específica [kg/m]. Assim, a carga distribuída vale  $231 \times 9.81 = 2266$  [N/m].

O factor de bambeamento é determinado a partir da seguinte relação geométrica.

$$\frac{lh}{be} = \frac{40 \times 0.372}{0.402 \times 0.026} = 1423$$

A carga majorada, função das condições definidas no enunciado.

$$q = 1.3 \times 2266 = 2945 \text{ [N/m]}$$

A verificação da segurança deverá ser determinada pela inequação seguinte:

$$\sigma_{Sd} = \frac{M^{m\acute{a}x}_{Sd}}{k \frac{I}{v}} \leq \sigma_{Rd}$$

O momento flector máximo é determinado em função das relações conhecidas da mecânica dos materiais.

$$M^{m\acute{a}x}_{Sd} = \frac{q \times L^2}{8} = 589188 \text{ [N.m]}$$

O coeficiente de bambeamento é determinado pela expressão.

$$k = 569 \frac{lh}{be} = 0.4$$

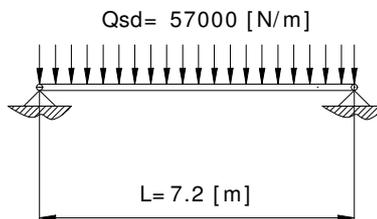
O valor da tensão solicitante de cálculo deverá ser determinada em função da expressão anterior, originando um valor superior ao da tensão resistente de cálculo.

$$\sigma_{sd} = \frac{589188}{0.4 \times \frac{70260 \times 10^{-8}}{0.186}} = 389 [\text{MPa}] > 235 [\text{MPa}]$$

Não se verificando a condição da inequação, a viga corre o risco de encurvar. Para evitar esta situação, os manobreadores deverão sustentar a viga em causa através de dois apoios colocados mais perto um do outro, por exemplo a metade do comprimento total da viga, reduzindo o valor do comprimento de encurvadura.

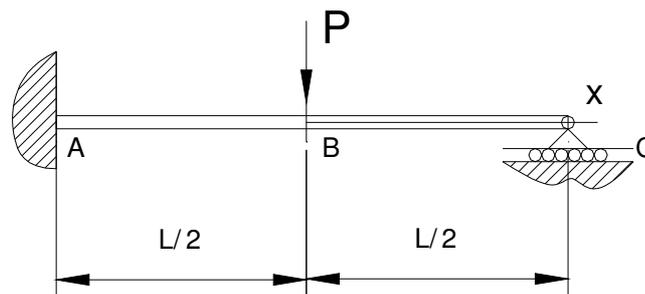
### 2.3.6.5 – Exercício proposto 1 – Verificação de segurança numa viga

Verifique a possibilidade de utilização de perfis da gama Europeia IPE nas condições de apoio que se representam na figura 1, em material S355, para suportar uma carga distribuída de 57 [kN/m], assumindo que o elemento estrutural deverá ser projectado nas condições de não constrangimento lateral. Escolha um perfil adequado da tabela de perfis comerciais.



### 2.3.6.5 –Segurança numa viga relativamente ao estado limite último de resistência por plastificação

Determine a carga de colapso de uma viga, sujeita ao carregamento incremental P, nas condições de apoio apresentadas na figura seguinte.



A teoria da elasticidade permite determinar o valor do momento flector nos pontos A, B e C.

Ponto A:  $M_A = -3PL/16$

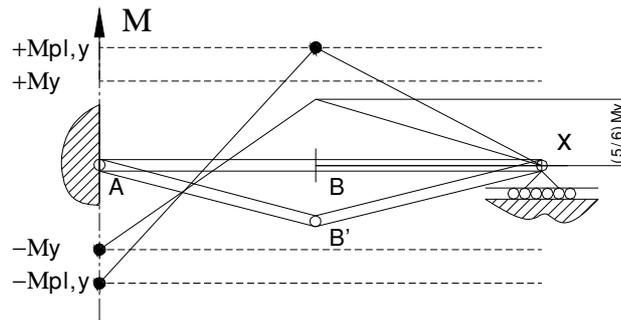
Ponto B:  $M_B = 5PL/32$

Ponto C:  $M_C = 0$

De acordo com estes resultados, a cedência tem início no ponto A ( $M_A = M_y$ ), A carga correspondente a este instante valerá:

$$P_y = \frac{16M_y}{3L}$$

Um pequeno incremento de carga  $P > P_y$  implicará um aumento da cedência na secção, originando a cedência no ponto B. A carga P poderá aumentar até que se formem rótulas plásticas em A e em B, provocando momentos plásticos  $M_{pl,y}$  nestes pontos. Neste instante, admite-se o colapso da viga, correspondente ao valor da carga  $P_p$ , pelo facto de se ter formado um mecanismo de rotura. Qualquer tentativa para aumentar  $P_p$  apenas fará com que o ponto B se desloque ainda mais na vertical, mantendo-se esta carga constante. Não se formarão novas rótulas plásticas se a deformação for continuada, uma vez que o diagrama do momento flector da viga não sofre alteração (desde que não se verifique endurecimento por deformação), ver figura seguinte.



A carga de colapso pode ser encontrada a partir das equações de equilíbrio da estática, equacionando o equilíbrio dos momentos em pontos singulares da viga.

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow R_C \cdot L - P_p \cdot \frac{L}{2} + M_p = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Leftrightarrow R_C \cdot \frac{L}{2} - M_p = 0$$

Combinando as duas últimas equações, resulta:

$$P_p = \frac{6}{L} M_{p,y}$$

### 3 – EUROCÓDIGO 3: PROJECTO DE ESTRUTURAS EM AÇO

A verificação da segurança e o dimensionamento de uma estrutura passam por uma análise estrutural global que possibilita a determinação dos esforços internos e deformações verificadas para cada uma das combinações de acções previstas nos respectivos códigos. Esta análise global possibilitará a verificação da resistência das secções (estado limite último), que envolve a verificação da resistência em relação a todos modos de ruína possíveis da estrutura, devendo também incluir a verificação da estabilidade global e local dos elementos sujeitos a esforços de compressão. Dependendo da maior ou menor flexibilidade da estrutura, será necessário considerar ou não o equilíbrio da estrutura na sua configuração de deformada.

A análise de uma estrutura poderá ser classificada em dois grandes grupos. A análise linear de primeira ordem, ou simplesmente, análise linear, em que os esforços são determinados com base na sua configuração de indeformada. A análise de segunda ordem ou não linear, é

considerado o efeito da carga – deformação da estrutura (não linearidade geométrica) e/ou o efeito da eventual plastificação de uma ou várias secções (não linearidade material).

Os métodos de análise linear são os mais correntes e podem ser resolvidos através de modelos simplificados de cálculo (cálculo manual) ou de modelos avançados (métodos dos deslocamentos, MEF, etc.).

Os métodos de análise de segunda ordem, implicam, em geral, a utilização de métodos avançados de cálculo, considerando na respectiva formulação o efeito dos deslocamentos, utilizando a configuração de deformada para estabelecer o equilíbrio.

Os resultados das análises de segunda ordem podem ser obtidos através um processo iterativo aos métodos habituais de análise linear. Em cada iteração é feita uma correcção tendo em consideração a deformação da estrutura.

O segundo tipo de análise não linear, pressupõe o estudo elasto-plástico das estruturas, procurando um aumento significativo da capacidade resistente dos elementos da estrutura ou, por outras palavras, um aumento do valor de cálculo das acções exteriores. A aplicabilidade dos métodos de dimensionamento elasto-plástico das estruturas depende da capacidade de deformação plástica do material dos elementos, mas também de um correcto dimensionamento de todas as ligações existentes. Estas ligações devem permitir a formação de rótulas plásticas e consequentes deformações.

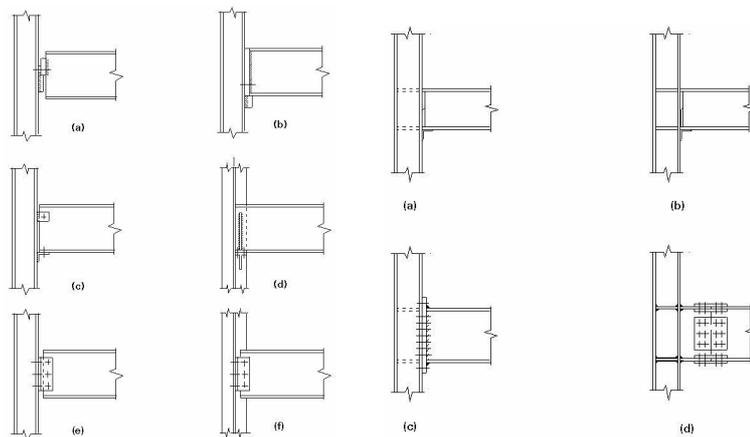


Fig. 41 – Exemplos de dois tipos de ligações metálicas.

Os Eurocódigos encontram-se divididos da seguinte maneira:

Tabela 7 – Designação dos eurocódigos.

CÓDIGO	ÂMBITO DE ESTUDO
Eurocódigo 1	Acções nas estruturas
Eurocódigo 2	Projecto de estruturas de betão
Eurocódigo 3	Projecto de estruturas metálicas
Eurocódigo 4	Projecto de estruturas mistas de aço e betão
Eurocódigo 5	Projecto de estruturas de madeira
Eurocódigo 6	Projecto de estruturas de maçonaria
Eurocódigo 7	Projecto geotécnico
Eurocódigo 8	Projecto de estruturas para resistência sísmica
Eurocódigo 9	Projecto de estruturas de alumínio

Os principais benefícios destes códigos estão relacionados com o entendimento comum de soluções de projecto, entre os donos das obras e os projectistas de todos os países aderentes. Fornecem soluções comuns de projecto para os requisitos de resistência mecânica, estabilidade, resistência ao fogo, introduzindo aspectos económicos e de durabilidade.

As propriedades dos vários tipos de aço identificam-se conforme a tabela seguinte.

Tabela 8 – Tabela de valores de tensões dos materiais propostos EC3.

VALORES NOMINAIS DE AÇO ESTRUTURAL SEGUNDO NORMAS EN 10025 E PREN 10113				
Classificação	Espessura t [mm] (*)			
	t ≤ 40 [mm]		40 [mm] < t ≤ 100 [mm] (**)	
	f <sub>y</sub> [N/mm <sup>2</sup> ]	F <sub>t</sub> [N/mm <sup>2</sup> ]	f <sub>y</sub> [N/mm <sup>2</sup> ]	F <sub>t</sub> [N/mm <sup>2</sup> ]
EN 10025:				
S235	235	360	215	340
S275	275	430	255	410
S355	355	510	335	490
PrEN 10113				
Fe E 275	275	390	255	370
Fe E 355	355	490	335	470

(\*) t representa a espessura nominal do elemento.  
 (\*\*) 63 [mm] para placas e outros produtos planos em aço para entrega nas condições TM para prEN 10113-3.

No gráfico da figura seguinte está representada a lei constitutiva material, sendo identificadas 4 ou cinco fases, consoante o material em causa.

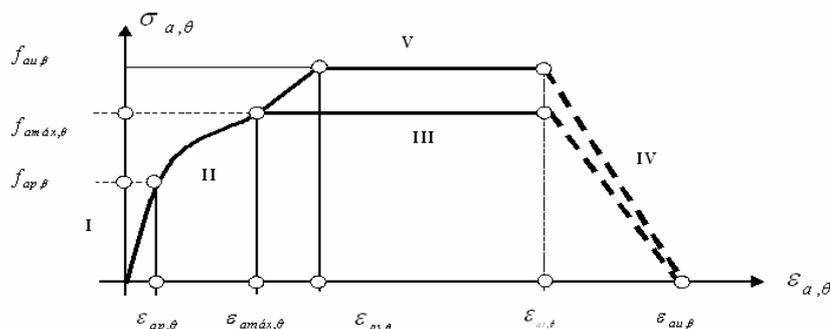


Fig. 42 – Diagrama tensão-deformação à temperatura ambiente.

A fase I representa a proporcionalidade entre  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , caracterizada pelo valor  $f_{ap,\theta}$ , tensão limite de proporcionalidade à temperatura  $\theta$  e pelo valor  $E_\theta$  que representa o módulo de elasticidade, correspondente à inclinação do segmento de recta desta fase. A relação tensão deformação é expressa através da lei de Hook, pela equação seguinte.

$$\sigma_{a,\theta} = \bar{E}_{a,\theta} \times \varepsilon_{a,\theta} \quad (\text{eq. 41})$$

A fase II, caracterizada pelo início da cedência do material, zona de transição, é formalmente parametrizada por  $f_{am\acute{x},\theta}$ , tensão de cedência. A relação tensão deformação nesta zona da curva é dada pela expressão que se segue.

$$\sigma_{a,\theta} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (\varepsilon_{a\text{ máx},\theta} - \varepsilon_{a,\theta})^2} + f_{ap,\theta} - c \quad (\text{eq. 42})$$

Os valores dos parâmetros a, b, c são representados pelas funções das expressões seguintes.

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\bar{E}_{a,\theta} (\varepsilon_{a\text{ máx},\theta} - \varepsilon_{ap,\theta})^2 + c (\varepsilon_{a\text{ máx},\theta} - \varepsilon_{ap,\theta})}{\bar{E}_{a,\theta}} \\ b^2 &= \bar{E}_{a,\theta} (\varepsilon_{a\text{ máx},\theta} - \varepsilon_{ap,\theta}) c + c^2 \\ c &= \frac{(f_{a\text{ máx},\theta} - f_{ap,\theta})^2}{2(f_{ap,\theta} - f_{a\text{ máx},\theta}) + \bar{E}_{a,\theta} (\varepsilon_{a\text{ máx},\theta} - \varepsilon_{ap,\theta})} \end{aligned} \quad (\text{eq. 43})$$

E finalmente, o módulo de elasticidade dado pela função:

$$\bar{E}_{a,\theta} = \frac{b(\varepsilon_{\text{máx}} - \varepsilon_{a,\theta})}{a \sqrt{a^2 - (\varepsilon_{a,\theta} - \varepsilon_{a\text{ máx},\theta})^2}} \quad (\text{eq. 44})$$

A fase III é caracterizada pelo patamar de tensão constante. Trata-se de uma zona plástica em que  $\sigma_{a\text{máx},\theta} = f_{a\text{máx},\theta}$  ou eventualmente,  $\sigma_{a\text{máx},\theta} = f_{au,\theta}$  e  $\bar{E}_{a,\theta} = 0$ , para o caso de endurecimento por deformação.

A fase IV, e para não se obter uma ductilidade numericamente infinita, foi adicionada uma zona linear decrescente, entre os 15% e os 20% de deformação, sendo caracterizada pela deformação  $\varepsilon_{au,\theta}$ . Neste caso os parâmetros podem ser escritos pelas fórmulas:

$$\sigma_{a,\theta} = d \left[ 1 - \frac{\varepsilon_{a,\theta} - 0.15}{0.05} \right] \quad (\text{eq. 45})$$

com  $d = f_{a\text{máx},\theta}$  ou, eventualmente,  $d = f_{au,\theta}$  para valores de temperatura inferiores a 400°C, onde as proporções da secção recta não sejam suficientes para, por um lado, evitar a encurvadura local e o consequente aumento da deformação e por outro que os membros estejam restringidos adequadamente para prevenir o empenamento. O valor do coeficiente de proporcionalidade inversa é determinado pelas expressões seguintes [9].

$$\bar{E}_{a,\theta} = -f_{a\text{máx},\theta} / 0.05 \quad (\text{eq. 46})$$

$$\bar{E}_{a,\theta} = -f_{au,\theta} / 0.05 \quad (\text{eq. 47})$$

Poderá eventualmente ocorrer uma fase intermédia V, de transição, abaixo dos 400 [°C] e em condições de estabilidade. A tensão poderá então subir ligeiramente até ao seu valor último conforme expressão seguinte.

$$\sigma_{a,\theta} = f_{a\text{máx},\theta} + \frac{f_{au,\theta} - f_{a\text{máx},\theta}}{0.02} [\varepsilon_{a,\theta} - 0.02] \quad (\text{eq. 48})$$

Nas mesmas condições, o valor da rigidez por endurecimento será dado pela expressão 2.16.

$$\bar{E}_{a,\theta} = \frac{f_{au,\theta} - f_{a\text{máx},\theta}}{0.02} \quad (\text{eq. 49})$$

Para os aços de construção em geral, a variação multilinear é adoptada sob a forma de tabela, nos parágrafos consagrados às leis dos materiais.

No projecto de estruturas ao fogo, a influência da temperatura é de grande importância. De acordo com o estabelecido no Eurocódigo 3, este tipo de acidente deverá contemplar a acção directa mecânica, a acção térmica nos deslocamentos e a redução das diferentes propriedades do material com a temperatura, conforme se representa através do conceito de coeficiente de redução, ver tabela seguinte.

Tabela 9 – Variação das propriedades do aço S235 com a temperatura.

TEMPERATURA DO AÇO $\theta_i$	FACTOR DE REDUÇÃO À TEMPERATURA $\theta_i$ RELATIVO A $f_y$ $K_{y,\theta} = \frac{\sigma_{y,\theta}}{\sigma_y}$	TENSÃO DE CEDÊNCIA [MPa]	FACTOR DE REDUÇÃO À TEMPERATURA $\theta_i$ RELATIVO A $E_a$ $K_{E,\theta} = \frac{E_{a,\theta}}{E_a}$	MÓDULO DE ELASTICIDADE $E_{a,\theta}$ [GPa]
20°C	1,000	235	1,0000	210
100°C	1,000	235	1,0000	210
200°C	1,000	235	0,9000	189
300°C	1,000	235	0,8000	168
400°C	1,000	235	0,7000	147
500°C	0,780	183	0,6000	126
600°C	0,470	110	0,3100	65,1
700°C	0,230	54,1	0,1300	27,3
800°C	0,110	25,9	0,0900	189
900°C	0,060	14,1	0,0675	142
1000°C	0,040	9,40	0,0450	9,45
1100°C	0,020	4,70	0,0225	4,73
1200°C	0,000	0,0	0,0000	0,0

Estas variações podem ser representadas de uma forma gráfica, originando a figura seguinte. O valor da tensão de cedência diminui drasticamente a partir dos 400 [°C], enquanto que o valor do módulo de elasticidade sofre uma redução menos significativa perto dos 100 [°C].

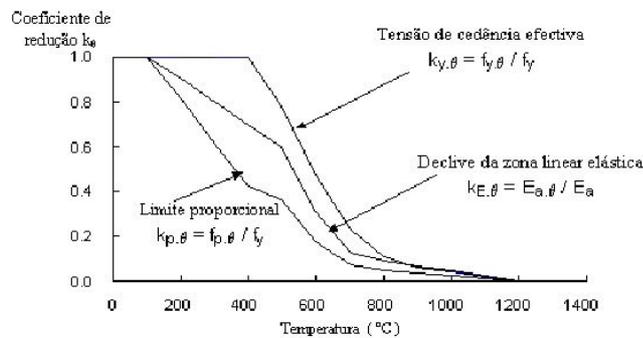


Fig. 43 - Propriedades mecânicas do aço em função da temperatura

De acordo com o eurocódigo3, o valor do módulo de elasticidade do aço permanece constante à temperatura ambiente,  $E_a=210 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$ .

O Eurocódigo 3 contempla duas classificações de estruturas em função do tipo do contraventamento e em relação à flexibilidade. Uma estrutura é referida como contraventada se a rigidez lateral no seu plano for assegurada por um sistema de contraventamento suficientemente rígido em relação às componentes horizontais das acções exteriores. Este regulamento define os sistemas suficientemente rígidos quando estes sistemas de contraventamento reduzem, para cada caso de carga, o valor do deslocamento horizontal em pelo menos 80% o mesmo parâmetro na estrutura sem contraventamento.

#### **4 – QUANTIFICAÇÃO DAS ACÇÕES - REGULAMENTO DE SEGURANÇA E ACÇÕES PARA ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS E PONTES**

O regulamento referido é dividido em duas partes essenciais. Por um lado, são apresentados os critérios gerais de segurança e por outro é apresentada a quantificação de acções. Neste sub-capítulo serão apresentadas as acções e quantificadas para o território nacional. As acções previstas podem ser divididas em três tipos: as permanentes (peso próprio, impulsos da terra,...), as variáveis (sobrecargas, neve, sismos, temperatura,...) e as provocadas por acidente (explosões, choques, incêndios,...). Uma vez que nem todas as acções têm obrigação de actuar em simultâneo são feitas combinações das mesmas. As acções são em geral quantificadas por valores característicos e, no caso das acções variáveis, também por valores reduzidos. Os valores reduzidos das acções variáveis são obtidos a partir dos seus valores característicos multiplicados pelos coeficientes  $\psi$ , e destinam-se a quantificar as acções tendo em conta a sua combinação e o estado limite em consideração.

Para a verificação da segurança em relação aos estados limites, devem ser consideradas as combinações das acções cuja actuação simultânea seja verosímil e que produzam na estrutura os efeitos mais desfavoráveis.

As acções permanentes devem figurar em todas as acções e ser tomadas com os seus valores característicos superior ou inferior, conforme for mais desfavorável.

Na figura seguinte são apresentadas várias imagens relacionadas com estes tipos de carregamento enunciados.

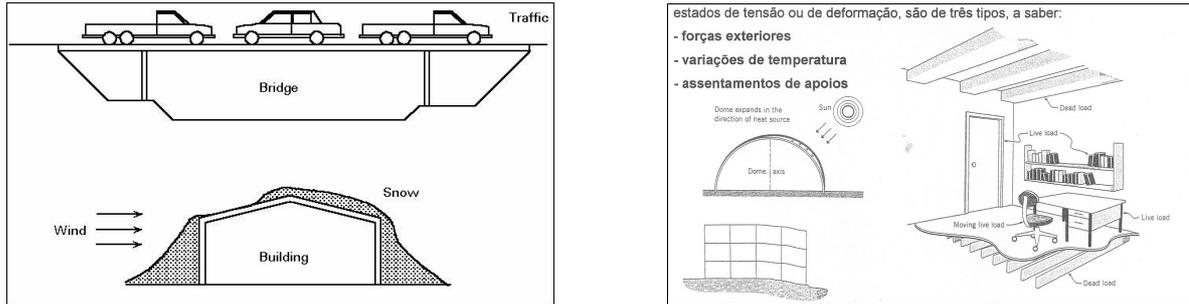


Fig. 44 – Exemplificação de carregamento variável.

### 4.1 - Quantificação das acções permanentes

Desde que as acções permanentes, a considerar na verificação da segurança das estruturas, apresentem pequena variabilidade, os valores característicos podem ser identificados com os respectivos valores médios. Os pesos próprios dos elementos de construção devem ser obtidos a partir dos valores que os pesos volúnicos dos materiais apresentam nas condições reais de utilização.

Tabela 10 – Densidade de alguns dos materiais utilizados na construção

MATERIAIS	DENSIDADE [KN/m <sup>3</sup> ]
<b>concrete</b>	
Lightweight (varies with density class)	9 - 20
normal weight	*24
heavyweight	>28
reinforced and prestressed concrete; unhardened concrete	+1
<b>masonry units</b>	
dense limestone	20 - 29
granite	27 - 30
sandstone	21 - 27
glass blocks, hollow	8
terra cotta, solid	21
<b>Metals</b>	
aluminium	27
copper	87
steel	77
zinc	71
<b>wood</b>	
timber (depending on strength class C14 - C70; see prEN 338)	2,9 - 9,0
fibre building board:	
hardboard, standard and tempered	10
medium density fibreboard	8
softboard	4
<b>other materials</b>	
glass, in sheets	25
plastics:	
acrylic sheet	12
polystyrene, expanded, granules	0,25
slate	29

## 4.2 - Quantificação das acções provocadas pelo vento

A determinação dos efeitos da acção do vento nas estruturas pode ser efectuada por métodos analíticos, numéricos ou experimentais, tendo em conta a quantificação apresentada e as características aerodinâmicas das estruturas. Nos casos correntes, a determinação dos esforços devidos ao vento pode ser efectuada de forma simplificada, supondo aplicadas às superfícies da construção pressões estáticas, obtidas multiplicando a pressão dinâmica do vento, definida por adequados coeficientes aerodinâmicos - coeficientes de forma. No entanto, este processo simplificado não conduz a resultados satisfatórios para estruturas com frequências próprias de vibração muito baixas, ou que sejam susceptíveis de instabilidade aerodinâmica ou de vibrações significativas em direcção transversal à da actuação do vento. Nestes casos deve ser efectuada a análise dinâmica da estrutura. Deve ainda ser efectuada a determinação dos deslocamentos máximos devidos ao vento, que, consoante o tipo de estruturas, podem ser objecto de verificação de valores limites a indicar nos regulamentos respectivos.

A acção do vento exerce-se sob a forma de pressão e deverá ser consultado o regulamento para a sua determinação. É ainda considerada a divisão do país em duas zonas distintas (A e B), bem como a rugosidade aerodinâmica do solo (tipo I e tipo II).

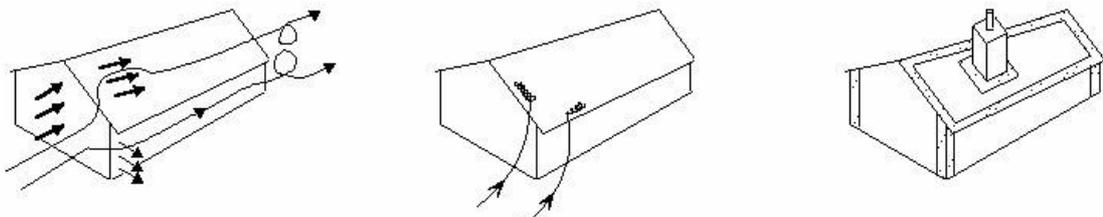


Fig. 45 - Pressões e efeitos locais provocados pela a acção do vento.

O zonamento do continente e ilhas é definido por:

Zona A – locais não incluídos na zona B;

Zona B – Açores e Madeira e, no continente, locais situados na faixa de 5Km de largura ou altitude superiores a 600m.

A rugosidade aerodinâmica pode ser dividida segundo a classificação I e II:

Rugosidade tipo I – zonas urbanas (construções de médio e grande porte)

Rugosidade tipo II – zonas rurais e periferia de zonas urbanas

Na figura seguinte encontram-se representados os valores das velocidades médias que se verificam nesta parte da Europa.

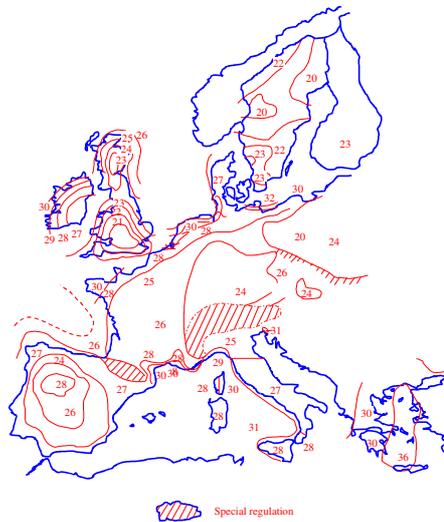


Fig. 46 – Valores indicativos da velocidade média do vento.

O valor de referência da pressão dinâmica pode ser determinado a partir dos valores de referência da velocidade do ar, conforme expressão seguinte, ou através da tabela da figura seguinte.

$$w_k = 0.5 \times \rho_{ar} \times v^2 = 0.613 \times v^2 \tag{eq. 50}$$

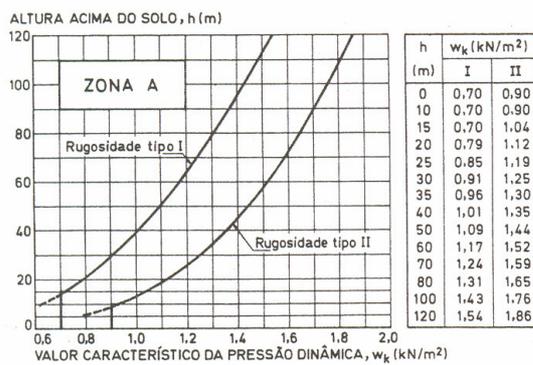


Fig. 47 – Valores característicos da pressão dinâmica.

Para a região pertencente ao zonamento B, os valores característicos da pressão dinâmica a considerar, devem ser obtidos a partir dos valores do zonamento A, multiplicando por 1.2.

A velocidade do ar deverá ser determinada em função da altura ao solo e da rugosidade admitida no estudo.

Tabela 11 – Valores característicos da rajada de vento.

Rugosidade 1	$v = 18 \left( \frac{h}{10} \right)^{0.28} + 14 \text{ [m / s]}$
Rugosidade 2	$v = 25 \left( \frac{h}{10} \right)^{0.20} + 14 \text{ [m / s]}$

O valor da pressão estática é determinado a partir dos valores calculados para a pressão dinâmica, multiplicando pelos factores de forma. Estes devem ser consultados no anexo I do RSA.

$$p_{est} = w_k \times \delta_f \quad (\text{eq. 51})$$

Os valores reduzidos da pressão dinâmica do vento deverão ser obtidos através dos seguintes coeficientes  $\psi_0 = 0.4$ ,  $\psi_1 = 0.2$  e  $\psi_2 = 0$ . No caso de edifícios com utilização dos tipos 35.1.2 e 35.1.3 e em que a sobrecarga seja a acção de base da combinação, deve considerar-se  $\psi_0 = 0.6$ .

#### 4.3 - Quantificação das acções provocadas pela neve

A acção da neve é tida em conta em locais com altitude igual ou superior a 200 [m]. Pode em geral ser considerada como uma carga distribuída, cujo valor característico, por metro quadrado em plano horizontal,  $S_k$ , é dado pela seguinte expressão.

$$S_k = \mu S_{0k} \quad (\text{eq. 52})$$

$S_{0k}$  representa o valor característico da carga da neve ao nível do solo, expresso em [kN/m<sup>2</sup>], enquanto que o coeficiente  $\mu$  depende da forma das superfícies sobre a qual se deposita a neve, ver figura seguinte.

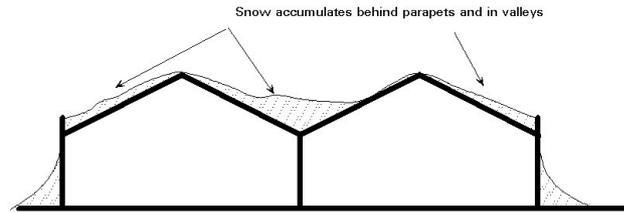


Fig. 48 – Acumulação de neve em função da geometria.

O valor característico da carga da neve deve ser determinado pela expressão seguinte.

$$S_{0k} = \frac{1}{400} (h - 50) \quad (\text{eq. 53})$$

A região da Europa encontra-se dividida por zonas de previsão de queda de neve, de acordo com a representação esquemática da figura seguinte.

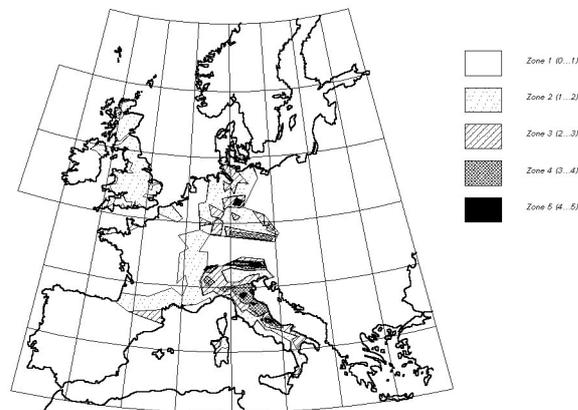


Fig. 49 – Mapa Europeu das zonas com previsão de queda de neve.

Os valores reduzidos da acção da neve deverão ser obtidos através dos seguintes coeficientes  $\psi_0 = 0.6$ ,  $\psi_1 = 0.3$  e  $\psi_2 = 0$ .

#### 4.4 - Quantificação das acções provocadas pela sobrecarga (acções específicas de edifícios)

As acções directamente relacionadas com a utilização dos edifícios, sobrecargas em coberturas, pavimentos, varandas e acessos, devem ser quantificadas.

As acções em coberturas devem ter em consideração o tipo de acesso e de utilização prevista. O regulamento prevê coberturas ordinárias, não permitindo a fácil circulação de pessoas, terraços não acessíveis, permitindo o acesso de pessoas para fins de reparação e um terceiro grupo de coberturas com terraços acessíveis, destinadas ao acesso de pessoas, considerando que os elementos de construção utilizados são os mesmos que habitualmente constituem pavimentos.

Relativamente aos valores característicos das coberturas, deve-se considerar:

Tabela 12 – Valores de acções específicas de edifícios (coberturas).

COBERTURAS	S
Ordinárias	0.3 [kN/m <sup>2</sup> ]
Terraços não acessíveis	1.0 [kN/m <sup>2</sup> ]
Terraços acessíveis	2.0 [kN/m <sup>2</sup> ]

Os valores reduzidos das sobrecargas a considerar nas coberturas são geralmente nulos, contudo existem excepções que devem ser acauteladas.

As acções em pavimentos devem ter em consideração o tipo de utilização que será de prever, sendo a concentração de pessoas, o elemento preponderante.

Tabela 13 – Valores de acções específicas de edifícios (pavimentos).

Tipo	PAVIMENTOS	S
1.a	Compartimentos de utilização privada	2.0 [kN/m <sup>2</sup> ]
1.b	Compartimentos de utilização colectiva, sem concentração	3.0 [kN/m <sup>2</sup> ]
1.c	Compartimentos de utilização colectiva, média concentração	4.0 [kN/m <sup>2</sup> ]
1.d	Recintos de utilização colectiva, elevada concentração	5.0 [kN/m <sup>2</sup> ]
1.e	Recintos de utilização colectiva, muito elevada concentração	6.0 [kN/m <sup>2</sup> ]
2.c	Oficinas de indústria ligeira	5.0 [kN/m <sup>2</sup> ]
2.d	Garagens de automóveis ligeiros particulares	4.0 [kN/m <sup>2</sup> ]
2.d	Garagens de automóveis ligeiros públicas	5.0 [kN/m <sup>2</sup> ]

Os valores reduzidos da sobrecarga nos pavimentos deverão ser obtidos através dos valores de coeficientes  $\psi$  indicados na tabela seguinte.

Tabela 14 –valores reduzidos da sobrecarga em pavimentos.

Tipo	PAVIMENTOS	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
1.a	Compartimentos de utilização privada	0.4	0.3	0.2
1.b	Compartimentos de utilização colectiva, sem concentração	0.7	0.6	0.4
1.c	Compartimentos de utilização colectiva, média concentração	0.7	0.6	0.4
1.d	Recintos de utilização colectiva, elevada concentração	0.4	0.3	0.2
1.e	Recintos de utilização colectiva, muito elevada concentração	0.4	0.3	0.2
2.c	Oficinas de indústria ligeira	0.8	0.7	0.6
2.d	Garagens de automóveis ligeiros particulares	0.8	0.7	0.6
2.d	Garagens de automóveis ligeiros públicas	0.8	0.7	0.6

#### 4.5 - Quantificação das acções sísmicas

Um sismo é um fenómeno natural resultante de uma rotura mais ou menos violenta no interior da crosta terrestre, correspondendo à libertação de uma grande quantidade de energia, e que provoca vibrações que se transmitem a uma vasta área circundante, ver figura seguinte.

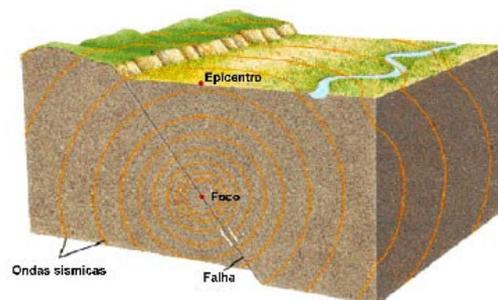


Fig. 50 – Modelo de propagação de um sismo.

A acção sísmica é resultado de uma ocorrência de origem geológica que pode ser quantificada em várias escalas. A mais conhecida é a escala de Richter (1935) que se define a partir da função logarítmica do deslocamento registado em unidades de  $[\mu m]$ , a uma distância de 100 [km] do epicentro.

$$\text{Log}(a_{\text{máx}}) = \text{escala} \quad (\text{eq. 54})$$

O país encontra-se dividido em quatro zonas sísmicas, designadas por A,B,C e D. Acada zona corresponde um coeficiente de sismicidade, de acordo com a tabela seguinte.

Tabela 15 – Coeficiente de sismicidade.

ZONA SÍSMICA	COEFICIENTE DE SISMICIDADE $\alpha$
A	1.0
B	0.7
C	0.5
D	0.3

A natureza do terreno influencia o comportamento das estruturas, estando previsto no regulamento Português o tipo I, II e III, consoante a maior ou menor rigidez do solo.

Os valores reduzidos desta acção deverão ser considerados nulos.

Em geral, apenas é necessário considerar direcções de actuação dos sismos no plano horizontal. A consideração desta acção no plano vertical dependerá da maior sensibilidade dos elementos estruturais às vibrações nesta direcção.

Estão previstos dois métodos de análise para quantificação do efeitos deste fenómeno. O primeiro diz respeito aos métodos de análise dinâmica e o segundo tem em consideração os métodos simplificados de análise estática. No contexto desta disciplina, apenas será apresentado o segundo método, para o estudo de estruturas com uma distribuição de massas regular, determinando uma força resultante equivalente.

O valor característico da força resultante estática  $F_k$  é determinada a partir de vários factores e coeficientes. Estas resultantes devem ser consideradas actuando segundo a direcção específica e ser distribuída em correspondência com as massas em presença. No caso das edificações consideradas, estas forças estáticas podem supor-se aplicadas ao nível de cada piso.

$$F_{ki} = \beta \times h_i \times G_i \times \frac{\sum_{i=1}^n G_i}{\sum_{i=1}^n h_i \times G_i} \quad (\text{eq. 55})$$

Nesta expressão,  $\beta$  representa o coeficiente sísmico,  $h_i$  o valor da altura do piso  $i$ , acima do nível do terreno. O factor  $G_i$  representa a soma dos valores das cargas permanentes e dos valores quase permanentes das acções variáveis  $\psi_2 F$ , correspondentes ao piso em questão. O índice  $n$  representa o número de pisos acima do nível do terreno.

No caso da estrutura ser simétrica em relação ao plano que contém a direcção considerada para a acção sísmica e todos os seus elementos estruturais se encontrarem uniformemente

distribuídos, as forças estáticas podem ser distribuídas pelos  $np$  elementos resistentes, de acordo com a expressão e figura seguintes.

$$F_{ki}^{pi} = \frac{F_{ki}}{np} \xi \quad ; \quad \xi = 1 \times \frac{0.6 \times x}{a} \quad (\text{eq. 56})$$

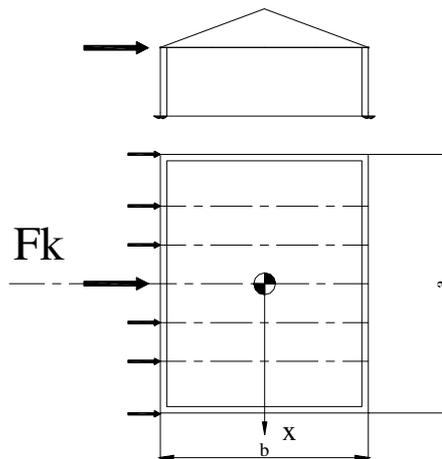


Fig. 51 – Representação esquemática da força estática resultante e respectiva distribuição pelos pórticos.

O coeficiente sísmico  $\beta$  define-se numa determinada direcção e caracteriza o valor da acção global das forças estáticas. É função do coeficiente de sismicidade  $\alpha$  (valor tabelado) e do coeficiente de comportamento  $\eta$  (valor tabelado).

$$\beta = \beta_0 \frac{\alpha}{\eta} \quad (\text{eq. 57})$$

O valor do coeficiente sísmico deverá ser superior a 4% do valor do coeficiente de sismicidade.

Os coeficientes de sismicidade encontram-se representados na tabela seguinte.

Tabela 16 – Coeficientes de comportamento.

DUCTILIDADE	ESTRUTURA		
	pórtico	Mista(pórtico/parede)	Parede
Normal	2.5	2.0	1.5
Melhorada	3.5	2.5	2.0

O valor do coeficiente sísmico de referência  $\beta_0$  é função do tipo de terreno, e da frequência própria fundamental da estrutura, de acordo com a tabela seguinte.

Tabela 17 – Coeficiente sísmico de referência.

TIPO DE TERRENO	FREQUÊNCIA PRÓPRIA FUNDAMENTAL	$\beta_0$
I	$0.5 \leq f < 5.6$	$0.17\sqrt{f}$
	$f \geq 5.6$	0.4
II	$0.5 \leq f < 4.0$	$0.20\sqrt{f}$
	$f \geq 4.0$	0.4
III	$0.5 \leq f < 2.0$	$0.23\sqrt{f}$
	$f \geq 2.0$	0.32

O valor da frequência própria fundamental da estrutura deve ser determinada, em função da direcção em que está a ser considerada a acção sísmica. No caso de edifícios, a frequência fundamental  $f$  pode ser aproximada pelos valores apresentados na tabela seguinte.

Tabela 18 – Frequências fundamentais.

FREQUÊNCIA	ESTRUTURA		
	pórtico	Mista (pórtico/parede)	Parede
$f$ [Hz]	$12/n$	$16/n$	$6b/h$

$b$  representa uma das dimensões do edifício em planta.

## 4.6 - Exercícios de aplicação

### 4.6.1 - Dimensionamento de uma viga

Dimensione a viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída  $q=10$  [KN/m] com perfis IPE em aço do tipo S275.

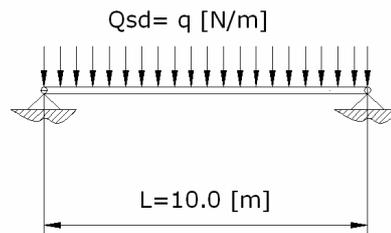


Fig. 52 – Modelo de uma viga simplesmente apoiada.

#### 4.6.2 – Quantificação de acção do vento

Quantifique a acção do vento sobre as fachadas de uma construção na Figueira da Foz, sendo as 4 fachadas de permeabilidade semelhante.

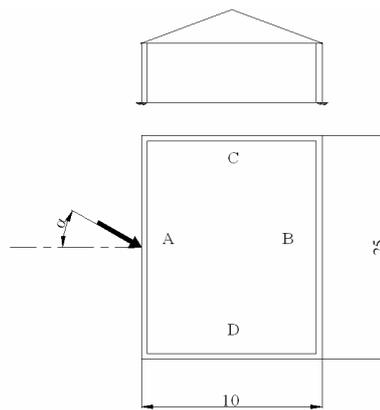


Fig. 53 – Modelo de um pórtico. Acção do vento nas fachadas.

#### 4.6.3 – Verificação da segurança de uma madre de cobertura

Verifique a segurança da viga de uma cobertura (madre), conforme regulamentos apresentados, sabendo que esta se situa num local a uma altitude de 300 [m]. Considere este elemento constituído por uma viga IPE300 em aço S235. A área de influência da cobertura é de  $4 \times 3 \text{ m}^2$ , suportada por 3 vigas simplesmente apoiada.

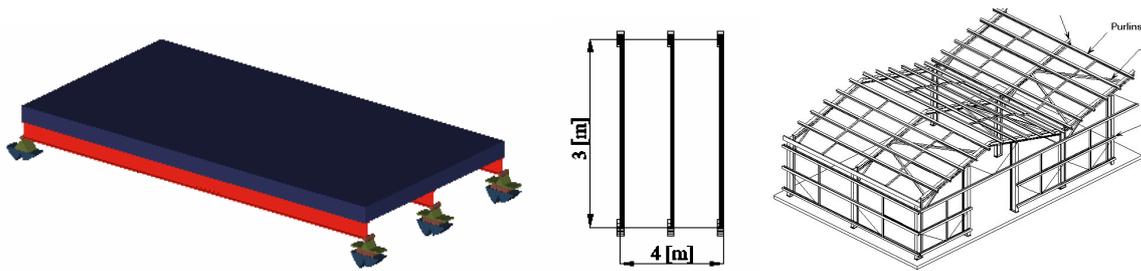


Fig. 54 – Modelo do posicionamento de uma madre de cobertura.

#### 4.6.4 – Quantificação da acção do vento sobre pavilhão

Determine a acção devida ao vento sobre a seguinte estrutura industrial, situada em Matosinhos. O modelo da estrutura encontra-se representado na figura seguinte.

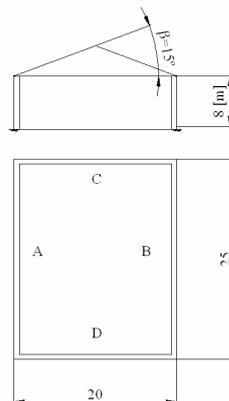


Fig. 55 – Modelo e geometria do pavilhão industrial.

#### 4.6.5 – Combinação das acções e verificação da segurança de uma madre

Quantifique acções num pavilhão construído em Braga interior e zona urbana, com duas águas de inclinação de  $10^\circ$ . O comprimento total do pavilhão é de 20 [m], a largura é de 15 [m], sendo a distância entre pórticos de 5 [m] e a distância entre madres igual a 1,3[m]. Considere a cobertura como ordinária. Despreze a acção da neve. Considere um perfil inicial UPN100 em material S235 para a madre, num processo iterativo de projecto. Considere ainda uma cobertura tipo sandwich metálica (ex: painel 2000), com 50 [mm] de espessura e com as seguintes características: ( $\rho = 0,11$  [kN/m<sup>2</sup>] e  $\lambda = 0,41$  [W/mK]).

O pavilhão apresenta a seguinte configuração numa secção transversal, ver figura seguinte.

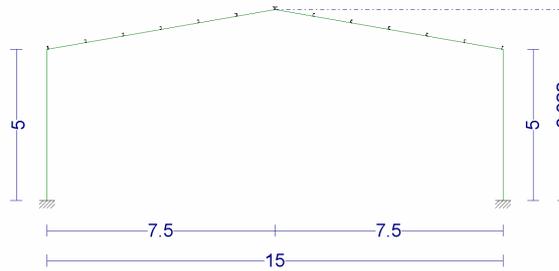


Fig. 56 – Secção transversal do pórtico.

Embora as madres não façam parte da estrutura resistente principal, o seu dimensionamento deverá ser cuidado, uma vez que uma sobre avaliação dos esforços actuantes ou a adopção de um esquema estático inadequado podem conduzir à utilização de secções sobredimensionadas, com custos associados.

O espaçamento das madres podendo variar, foi fixado neste caso em 1,3 [m], de acordo com o pormenor que representa a cumeeira.

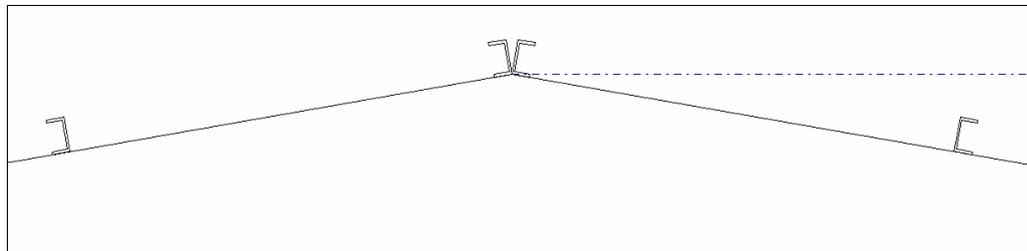


Fig. 57 – Pormenor da cumeeira.

Relativamente à secção recta, o perfil inicialmente escolhido está representado a figura seguinte, juntamente com as características físicas associadas à geometria escolhida.

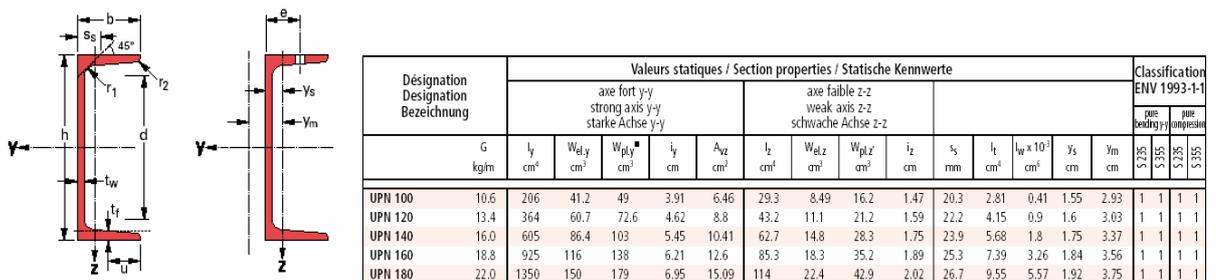


Fig. 58 – Secção recta do elemento madre (catálogo Arbed).

A quantificação das acções nas madres pode ser feita pelos mesmos princípios utilizados para a quantificação das acções nas vigas do pórtico, atendendo a que a área de influência no elemento madre é diferente, ver figura seguinte.

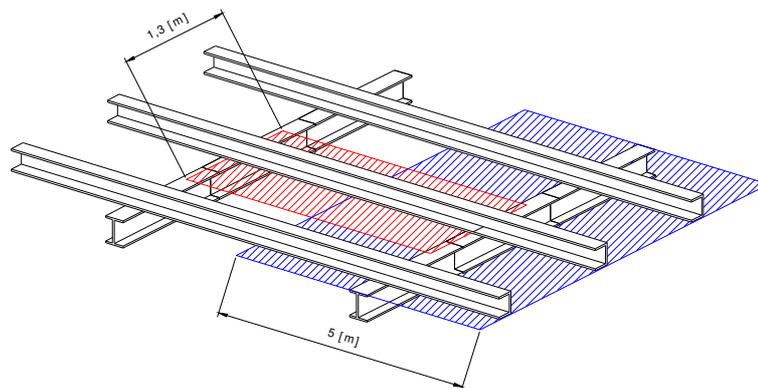


Fig. 59 – Área de influência das acções nas madres e vigas do pórtico.

Relativamente à acção permanente, devem ser considerados os valores da acção do peso próprio do material utilizado na cobertura, assim como o valor do peso por unidade de comprimento indicado para o perfil pré estabelecido (UPN100).

$$G = G_1 + G_2 = 0,11 \left[ \text{kN} / \text{m}^2 \right] \times 1,3 \left[ \text{m} \right] + (10,6 \times 9,81) \\ = 247 \left[ \text{N} / \text{m} \right]$$

Esta acção deverá ser decomposta em duas componentes segundo as duas direcções principais do perfil, de acordo com a figura que se segue.

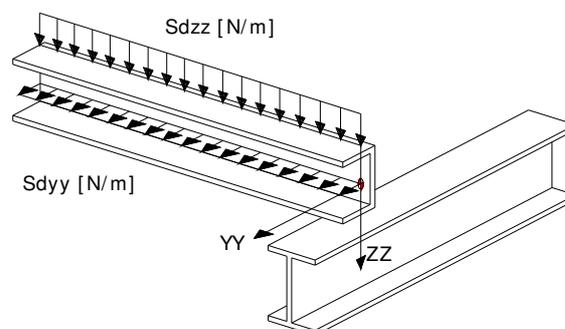


Fig. 60 – Decomposição da acção segundo as direcções principais do perfil (madre).

$$G_{zz} = 247 \text{ [N / m]} \times \cos(10^\circ) = 243 \text{ [N / m]}$$

$$G_{yy} = 247 \text{ [N / m]} \times \sin(10^\circ) = 42,9 \text{ [N / m]}$$

Relativamente à sobrecarga, será necessário converter o valor de 0,3 [kN/m<sup>2</sup>] em plano horizontal para o valor da carga em plano inclinado 0,295 [kN/m<sup>2</sup>], decompondo posteriormente segundo as duas direcções principais.

$$Q_{zz} = 295 \times 1,3 \text{ [N / m]} \times \cos(10^\circ) = 378 \text{ [N / m]}$$

$$Q_{yy} = 295 \times 1,3 \text{ [N / m]} \times \sin(10^\circ) = 66,9 \text{ [N / m]}$$

Relativamente ao vento, será necessário afectar o valor de 0,7 [kN/m<sup>2</sup>] pelo valor do coeficiente de pressão  $\delta_p = 1,4$ , projectando-se apenas segundo a primeira direcção principal de inércia, zz.

$$W_{zz} = 1,4 \times 0,7 \times 1,3 \text{ [N / m]} = -1274 \text{ [N / m]}$$

Depois de quantificadas as diferentes acções, será necessário proceder à respectiva combinação, utilizando a equação fundamental. Neste contexto deverão ser consideradas dois tipos de combinações. A combinação que se destina à verificação do estado limite último e a combinação que se destina à verificação do estado limite de utilização.

Para verificação do estado limite último, os coeficientes de segurança são iguais a  $\gamma_f = 1,5$ , excepto no caso em que as acções permanentes possuem efeito favorável ( $\gamma_f = 1,0$ ). Neste caso a combinação deverá ser feita pela equação que se segue.

$$S = \gamma S_G + \gamma \left[ S_{Q1k} + \sum \psi_{0j} S_{Qjk} \right]$$

No caso de se considerar o vento como acção variável de base, deverá ter-se em consideração o artigo 9 do RSA, que estabelece um valor unitário para o coeficiente de segurança afecto à acção permanente, considerando que estas possuem um efeito favorável relativamente à acção do vento. O coeficiente de redução associado à variável sobrecarga (Q) é nulo, pelo que:

$$S_{dyy} = 1,0 G_{yy} = 0,247 \times \sin(10^\circ) = 0,04289 \text{ [kN / m]}$$

$$S_{dzz} = 1,0 G_{zz} + 1,5 [W_{zz} + 0 \times Q] = 1,0 \times 0,243 + 1,5 \times (-1,274) \text{ [kN / m]} = -1,668 \text{ [kN / m]}$$

No caso de se considerar a sobrecarga como acção variável de base, deve considerar-se também o efeito do vento como favorável, implicando a parcela correspondente ao valor reduzido da acção nulo.

$$S_{dy} = 1,5 S_{Gyy} + 1,5 [Q_{yy} + 0,4 \times (W = 0)] = 1,5 \times 0,04289 + 1,5 [0,0669] = 0,1647 \text{ [kN / m]}$$

$$S_{dzz} = 1,5 S_{Gzz} + 1,5 [Q_{zz} + 0,4 \times (W = 0)] = 1,5 \times 0,243 + 1,5 [0,378] = 0,9315 \text{ [kN / m]}$$

Depois de verificada a hipótese de carregamento mais crítica, o dimensionamento das madres deverá obedecer à verificação dos vários estados limites últimos verosímeis (de resistência sem plastificação, varejamento, bambeamento, de resistência com plastificação). Neste caso, para verificação do estado limite último de resistência sem plastificação, deve-se verificar se o elemento estrutural UPN 100 verifica ou não a seguinte inequação:

$$S_d \leq R_d \Leftrightarrow \sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd} \Leftrightarrow \frac{M_{yy}}{W_{yy}} + \frac{M_{zz}}{W_{zz}} \leq 235 \text{ [MPa]} \Leftrightarrow \frac{q_{zz} L^2}{41,2 \times 10^{-6}} + \frac{q_{yy} L^2}{8,49 \times 10^{-6}} \leq 235 \text{ [MPa]} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1668 L^2}{41,2 \times 10^{-6}} + \frac{42,89 L^2}{8,49 \times 10^{-6}} \leq 235 \text{ [MPa]} \Leftrightarrow 113,8 \times 10^6 \leq 235 \text{ [MPa]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 113,8 \times 10^6 \text{ [MPa]} \leq 235 \text{ [MPa]}$$

A verificação da resistência é efectuada através da fórmula da flexão desviada (desprezando o efeito das tensões de corte), em que  $W_{yy}$  e  $W_{zz}$  representam o valor do módulo elástico de resistência à flexão, enquanto  $M_{yy}$  e  $M_{zz}$  deverão representar o máximo valor do momento flector em cada uma das direcções. Assim se conclui que este perfil verifica a segurança relativamente ao estado limite considerado, numa percentagem de 48%.

Para verificação do estado limite de utilização, deverão ser considerados valores unitários para os coeficientes de segurança respeitantes às acções ( $\gamma_f = 1,0$ ) e escolhido o tipo de duração admissível para cada caso (muito curta duração = combinações raras, curta duração = combinações frequentes e longa duração = combinações quase permanentes). Segundo o REAE, para o estado limite de curta duração relativos aos elementos de edifícios, bastará, em geral, considerar o estado limite de curta duração, pressupondo-se que a combinação seja feita com os valores reduzidos  $\psi_1$

das acções variáveis de base e os valores reduzidos  $\psi_2$  das restantes acções variáveis, quando consideradas desfavoráveis.

$$S = \gamma S_G + \gamma [\psi_1 S_{Q1k} + \sum \psi_{2j} S_{Qjk}]$$

A condição de segurança impõe que se utilize a teoria da elasticidade e a mecânica dos materiais para determinar a deformação do elemento, considerando o estado limite de utilização de curta duração (combinação frequente das acções) e definido pelos valores limites das flechas para madres de coberturas ordinárias ( $L/200$ ).

Na hipótese de se considerar o vento como acção variável de base, o valor do coeficiente de redução para esta acção vale  $\psi_1 = 0,2$ , enquanto que para a acção da sobrecarga vale  $\psi_2 = 0$ .

$$S_{dyy} = 1,0 S_{Gyy} + 1,0 [\psi_1 \times 0 + (\psi_2 = 0) \times Q] = 0,247 \times \sin(10^\circ) = 0,04289 \text{ [kN / m]}$$

$$S_{dzz} = 1,0 S_{Gzz} + 1,0 [\psi_1 W_{zz} + (\psi_2 = 0) \times Q] = 1,0 \times 0,243 + 1,0 \times [0,2 \times (-1,274) + 0] \text{ [kN / m]} = 0,243 \text{ [kN / m]}$$

Na hipótese de se considerar a sobrecarga como acção variável de base, o valor do coeficiente de redução para esta acção vale  $\psi_1 = 0$ , enquanto que para a acção do vento vale  $\psi_2 = 0$ .

$$S_{dyy} = 1,0 S_{Gyy} + 1,0 [(\psi_1 = 0) \times Q_{yy} + (\psi_2 = 0) \times (W = 0)] = 1,0 \times 0,04289 = 0,04289 \text{ [kN / m]}$$

$$S_{dzz} = 1,0 S_{Gzz} + 1,0 [(\psi_1 = 0) \times Q_{zz} + (\psi_2 = 0) \times (W = 0)] = 1,0 \times 0,243 = 0,243 \text{ [kN / m]}$$

Depois de verificada a hipótese de carregamento mais crítica, o dimensionamento das madres deverá obedecer à verificação da condição de segurança, isto é:

$$\delta_{adm} \leq L/200$$

O deslocamento resultante do efeito das acções poderá ser determinado em função do tipo de solução construtiva adoptado. Na figura seguinte são apresentados os tipos correntes da ligação das madres aos perfis do pórtico.

<p>Deslocamento máximo:</p> $y_{\max} = \frac{qL^4}{384EI}$	<p>Deslocamento máximo:</p> $y_{\max} = \frac{qL^4}{185EI}$	<p>Deslocamento máximo:</p> $y_{\max} = 5 \frac{qL^4}{384EI} = \frac{qL^4}{76,8EI}$
<p>Momento flector máximo:</p> $M_{\max} = \frac{qL^2}{10}$	<p>Momento flector máximo:</p> $M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$	<p>Momento flector máximo:</p> $M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$
<p>Reacções nos apoios:</p> $R_A = R_B = qL/2$	<p>Reacções nos apoios:</p> $R_A = R_C = 0,375qL$ $R_B = 1,25qL$	<p>Reacções nos apoios:</p> $R_A = R_B = qL/2$
<p>a) viga contínua (madre) aplicada em pelo menos 3 tramos.</p>	<p>b) viga contínua (madre) aplicada em dois tramos.</p>	<p>c) viga contínua (madre) duplamente apoiada.</p>

Fig. 61 – Tipos de ligações estáticas possíveis para as madres.

Os deslocamentos deverão ser determinados segundo as duas direcções principais:

$$\delta_{yy} = \frac{S_{yy}L^4}{384EI_{zz}} = \frac{42,89 \times (5)^4}{384 \times 2,06 \times 10^{11} \times 29,3 \times 10^{-8}} = 0,001156[m]$$

$$\delta_{zz} = \frac{S_{zz}L^4}{384EI_{yy}} = \frac{243 \times (5)^4}{384 \times 2,06 \times 10^{11} \times 206 \times 10^{-8}} = 0,000932[m]$$

$$\delta_{adm} = \sqrt{0,001156^2 + 0,000932^2} = 0,00148 \leq 0,025$$

Pode-se concluir que o perfil escolhido verifica, também, o estado limite de utilização, sendo possível escolher um perfil de dimensões inferiores.

#### 4.6.6 – Combinação das acções e verificação da estabilidade de um pórtico

Quantifique as acções num pórtico construído em Braga interior e zona urbana, com duas águas de inclinação de 10°. O comprimento total do pavilhão é de 20 [m], sendo a distância entre

pórticos de 5 [m] e a distância entre madres igual a 1,3[m]. Considere ainda que a direcção do vento actua na direcção normal às fachadas permeáveis e que a cobertura se caracteriza sem acesso do tipo sandwich metálica (ex: painel 2000), com 50 [mm] de espessura e com as seguintes características: ( $\rho = 0,11$  [kN/m<sup>2</sup>] e  $\lambda = 0,41$  [W/mK]). Despreze a acção da neve.

Deverá considerar um perfil inicial IPE330 para as vigas da cobertura e um perfil HEA 160 para os pilares, ambos em material S235, no processo de projecto.

Verifique a segurança do pórtico central (mais solicitado) numa análise bidimensional.

De acordo com o RSA, artigo 9º - 9.2, a combinação fundamental deverá ser utilizada para determinar o efeito das acções exteriores. Estas deverão ser quantificadas de acordo com os anexos deste regulamento.

Na figura seguinte encontram-se representadas as diferentes acções em presença numa edificação tipo porticada, sendo de salientar o facto de nem todas as acções se encontrarem definidas no mesmo plano de acção, sendo necessário recorrer à respectiva projecção.

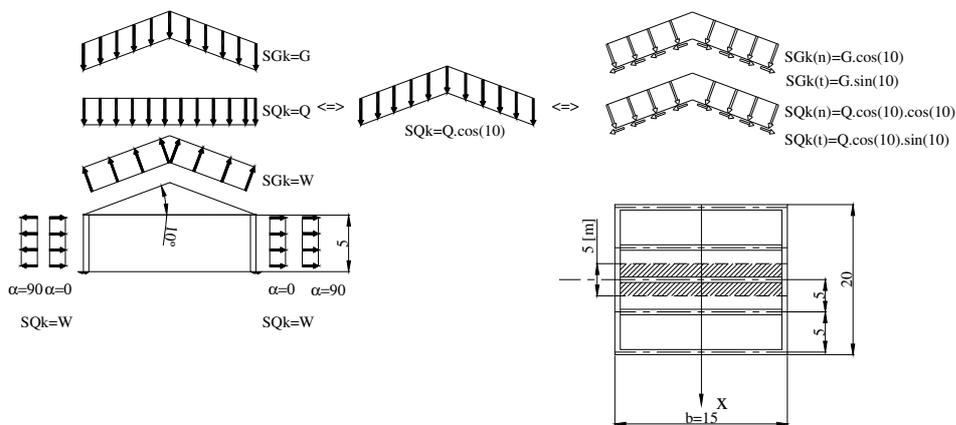


Fig. 62 – Plano de actuação das acções presentes no pórtico.

As acções permanentes devem ter em consideração o valor do peso próprio dos elementos estruturais. Assim, para além do peso das madres e do material da cobertura (ver figura seguinte), deverá ser considerado o peso do perfil escolhido para a viga da cobertura IPE330 (carga distribuída de 481,67 [N/m]) e o perfil HEA 160 para os pilares, conforme se representam na figura seguinte. Foi ainda considerada uma solução agrupada com o objectivo de uniformizar os perfis.

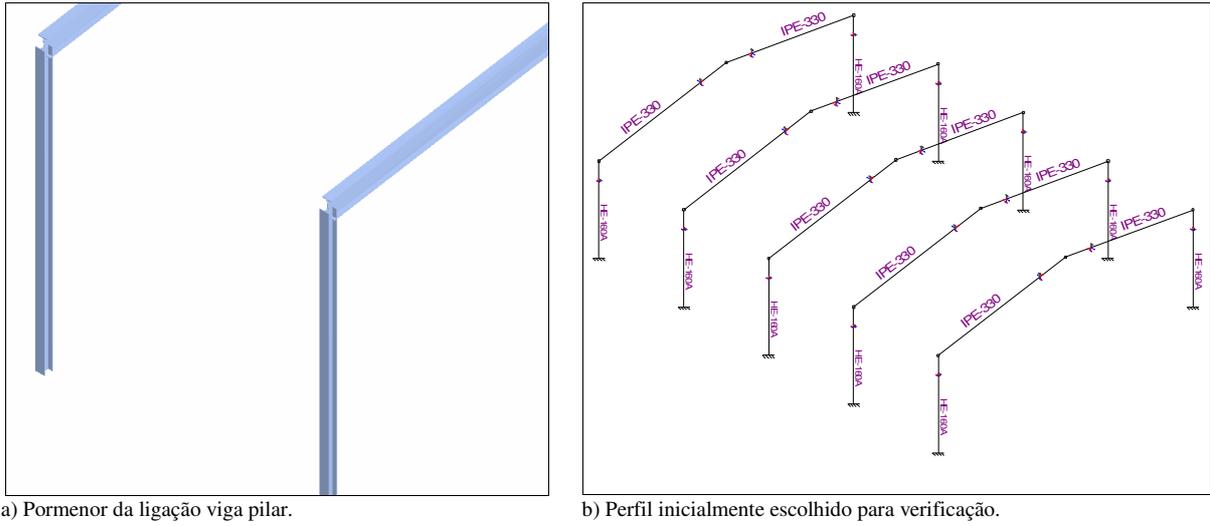


Fig. 63 – Perfis inicialmente escolhidos para o processo iterativo de projecto.

O efeito das acções permanentes encontra-se representado na figura seguinte.

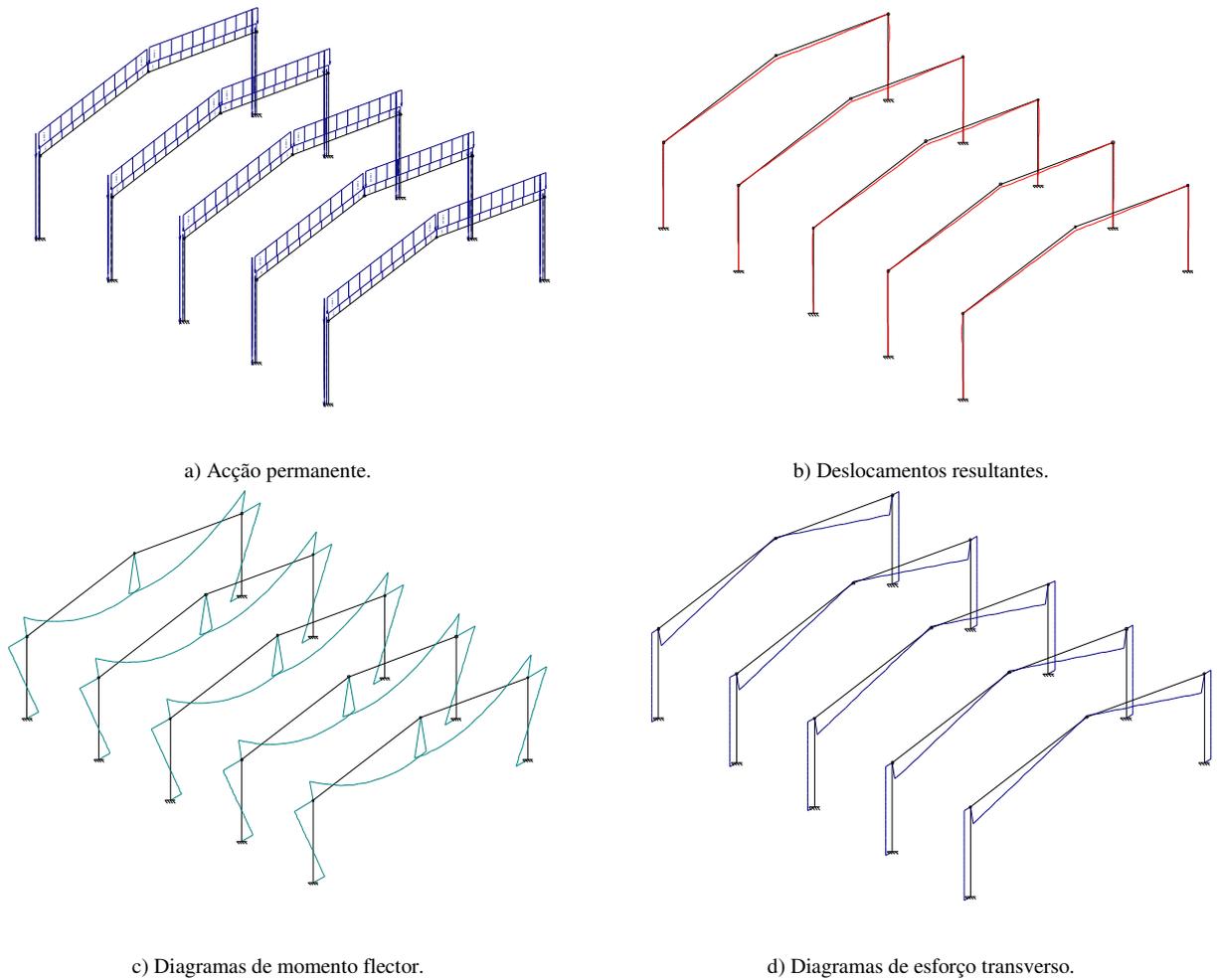


Fig. 64 – Efeito isolado das acções permanentes.

$$\begin{aligned}
 G &= G_1 + G_2 + G_3 = 0,11 \left[ \text{kN} / \text{m}^2 \right] \times 5 \left[ \text{m} \right] + \left[ (10,6 \times 9,81) \times 5 \left[ \text{m} \right] \right] / (1,3 \left[ \text{m} \right]) + 481,67 \left[ \text{N} / \text{m} \right] \\
 &= 550 \left[ \text{N} / \text{m} \right] + 399,94 \left[ \text{N} / \text{m} \right] + 481,67 \left[ \text{N} / \text{m} \right] \\
 &= 949,9 + 481,67 \\
 &= 1431,57 \left[ \text{N} / \text{m} \right]
 \end{aligned}$$

Relativamente à acção da sobrecarga e de acordo com o artigo 34.2 do RSA, esta determina-se em função da respectiva utilização, sendo que para coberturas ordinárias vale, ver figura seguinte:

$$S_{Qk} = 0.3 \left[ \text{kN} / \text{m}^2_{ph} \right] = 0.295 \left[ \text{kN} / \text{m}^2 \right] \times 5 \left[ \text{m} \right] \cong 1.5 \left[ \text{kN} / \text{m} \right]$$

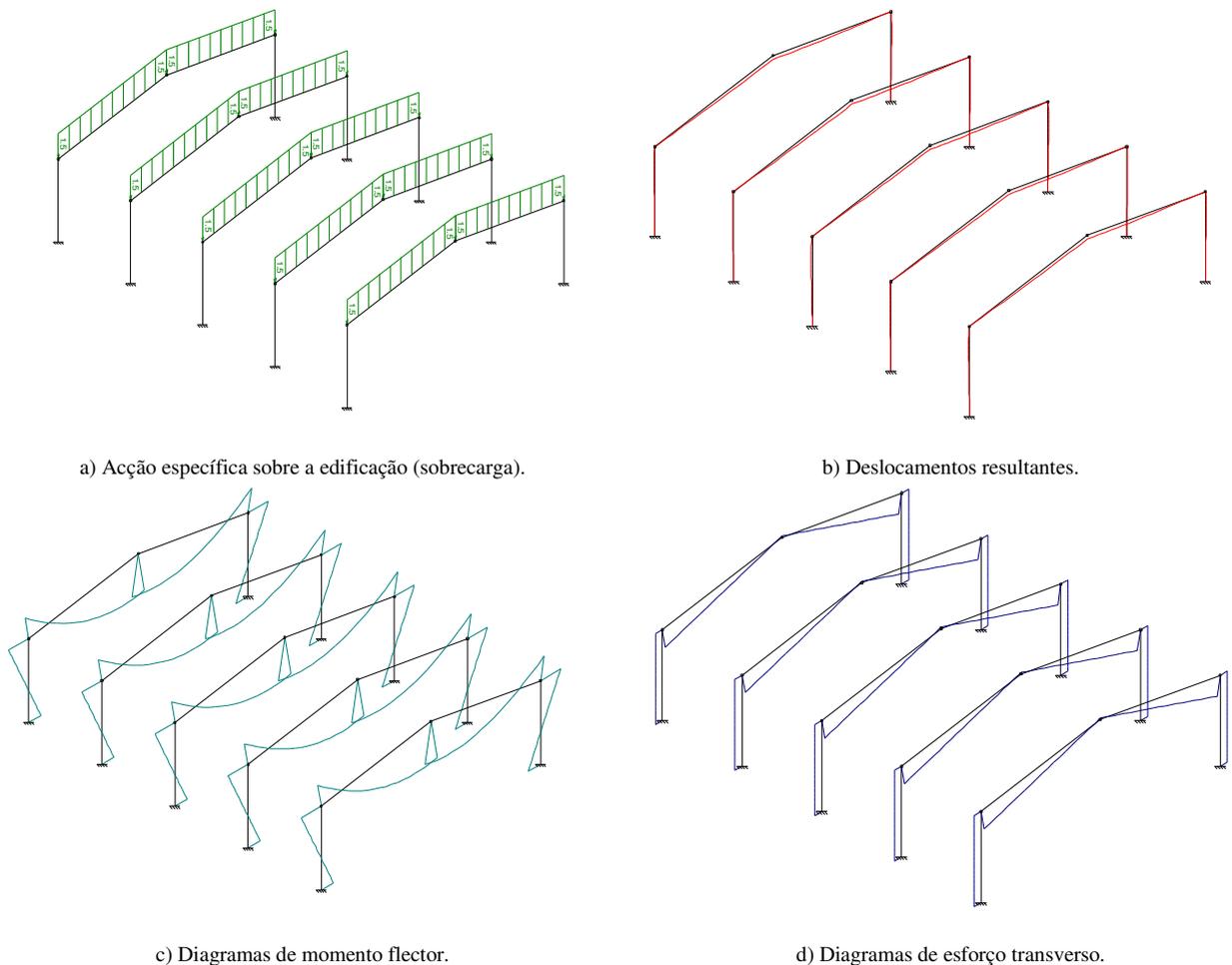


Fig. 65 – Efeito isolado da acção específica sobre edifícios (sobrecarga).

A acção do vento é determinada em função da rugosidade aerodinâmica do solo (tipo I) e do zonamento da edificação (zona A).

O valor da pressão estática  $p$  é determinada em função da pressão dinâmica  $W$ . Neste caso, o valor da força por unidade de área iguala  $W = 0.7 [kN / m^2]$ , a qual deverá ser transformada num valor de força por unidade de comprimento, multiplicando pelo valor da cota de influência,  $W_L = 0.7 \times 5 = 3.5 [kN / m]$ .

A pressão estática depende ainda dos coeficientes de pressão exteriores e interiores. Considerando o vento normal às fachadas permeáveis, implica  $\delta_{pi} = +0.2$ . Os valores dos coeficientes de pressão exterior dependem da forma da edificação exterior, devendo ser contabilizados para as fachadas e para a cobertura.

Para a relação geométrica da estrutura  $a/b = 1.33(3)$  e  $h/b = 0.33(3)$ , determinam-se os coeficientes de pressão exteriores nas fachadas, tendo em consideração a tabela seguinte.

Tabela 19 – Coeficientes de pressão exterior para as fachadas.

$\delta_{pe}$				
Vento	Fachadas			
$\alpha$	A	B	C	D
0	+0.7	-0.2	-0.5	-0.5
90	-0.5	-0.5	+0.7	-0.2

Para o tipo de cobertura com duas águas, o coeficiente de pressão exterior depende da localização em planta do pórtico em estudo, ver tabela seguinte.

Tabela 20 - Coeficientes de pressão exterior para a cobertura.

$\delta_{pe}$				
Vento	Cobertura			
$\alpha$	EF	GH	EG	FH
0	-1.2	-0.4	-	-
90	-	-	-0.8	-0.6

O efeito da acção do vento pode ser representado em função da orientação prevista no regulamento, ver figura seguinte. Deverá ser verificada qual é a orientação do vento que produzirá uma situação mais crítica.

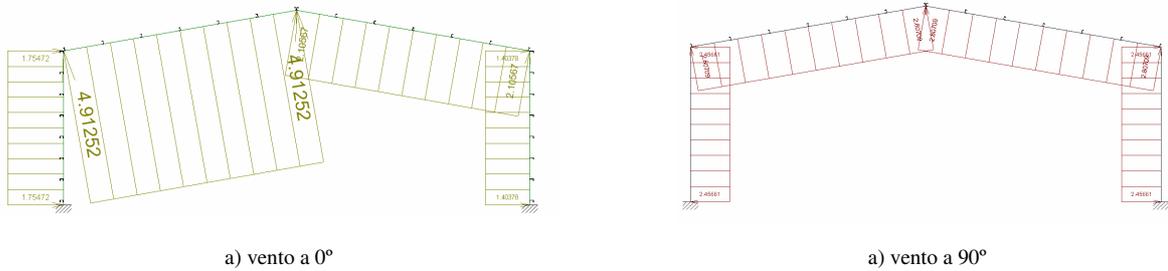


Fig. 66 – Acção do vento em duas orientações possíveis.

Em resumo, a acção do vento pode ser quantificada de acordo com os valores representados na figura que se segue.

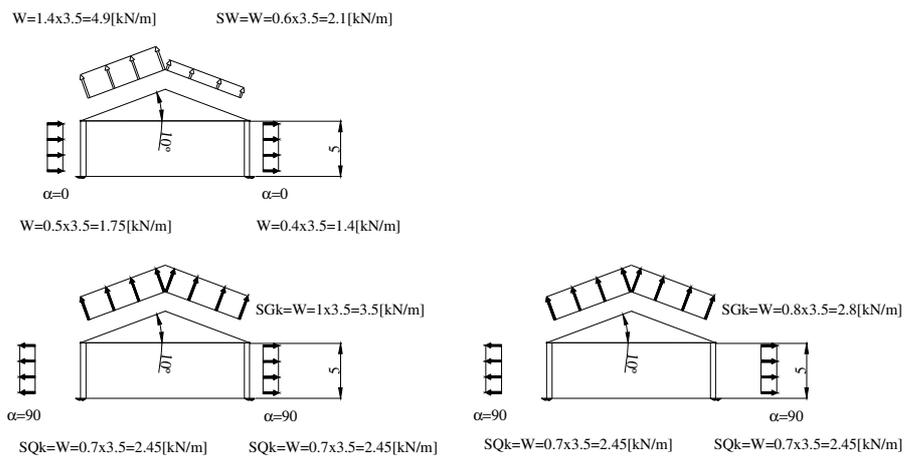


Fig. 67 – Efeito da acção do vento, em duas direcções.

Admitindo a solicitação do vento mais crítica como sendo a que corresponde a  $\alpha = 0$ , os deslocamentos contrariam a tendência das outras acções, conforma se pode observar nas imagens da figura seguinte.

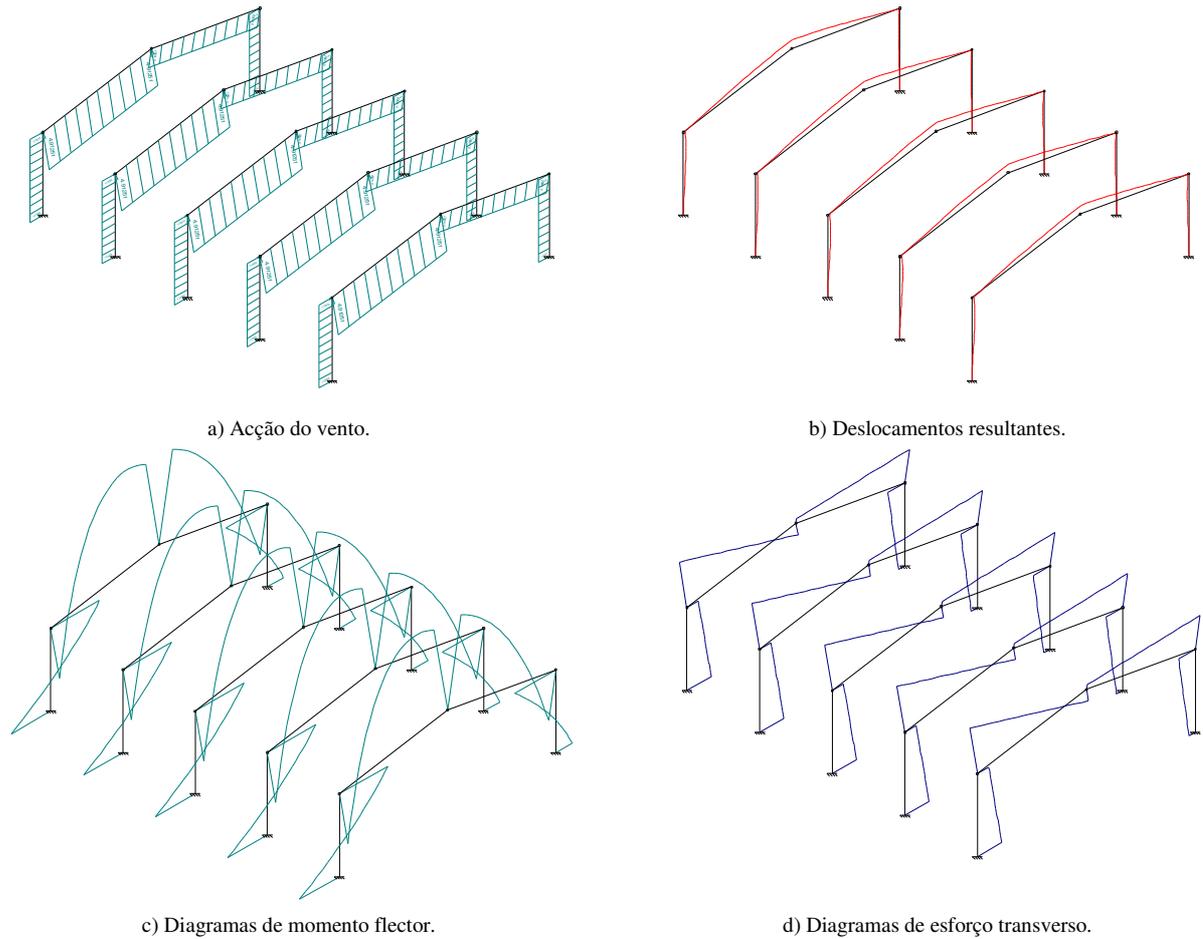


Fig. 68 – Efeito isolado da acção do vento.

A combinação deve ser interpretada como uma pseudo soma das acções, tendo em consideração as diferentes acções variáveis de base e o respectivo posicionamento relativo aos elementos que fazem parte do pórtico (vigas e colunas). Na tabela seguinte estão apresentadas as duas combinações previstas para a estrutura porticada, tendo em consideração o estado limite último de resistência.

Tabela 21 – Valores das acções combinadas nas vigas e pilares.

Caso	Acção Variável de base	Elemento	Combinação
1	$W$	Cobertura (vigas)	$S = 1.0 \times G + 1.5 \times [W + 0 \times Q]$
2	$Q$	Cobertura (vigas)	$S = 1.5 \times G + 1.5 \times [Q + 0.4 \times (W = 0)]$
3	$W$	pilares	$S = 1.5 \times G + 1.5 \times [W + (Q = 0)]$

Desta tabela apenas poderão resultar dois casos possíveis a aplicar numa solução porticada (viga coluna), devendo-se considerar o efeito mais desfavorável a aplicar nos elementos da cobertura.

Na figura seguinte estão representados os efeitos combinados das acções na estrutura porticada. Deve-se ainda salientar o facto de que o pórtico deve ser modelado considerando as imperfeições materiais e geométricas dos vários elementos que constituem a estrutura. Neste sentido, as recomendações são para que se introduza no modelo de cálculo uma imperfeição global equivalente, a que corresponde uma inclinação do pórtico definida em função da altura da edificação [10]. A consideração das imperfeições de forma explícita implica que se efectue a análise da estrutura muito próxima da realidade, onde são incluídos os erros de verticalidade dos pilares, ou curvatura dos elementos que constituem a estrutura.

Na figura estão representados valores de deslocamentos e tensões para pontos singulares da estrutura, considerando a combinação mais desfavorável para verificação do estado limite último de resistência.

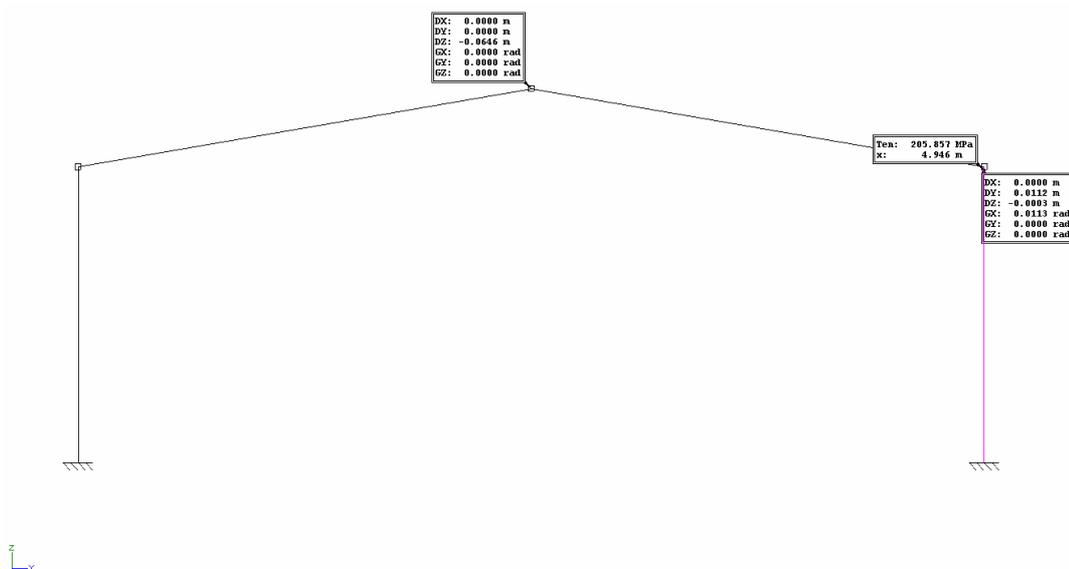


Fig. 69 – Deslocamentos e tensões máximas do pórtico, determinados em função do estado limite último.

Um dos processos de análise preconizados no Eurocódigo são os métodos avançados de cálculo, pelo que se poderá optar por uma análise bidimensional com elementos finitos de viga.

Na figura seguinte é apresentada a discretização efectuada neste modelo, tendo em consideração a dimensão geométrica do pórtico.

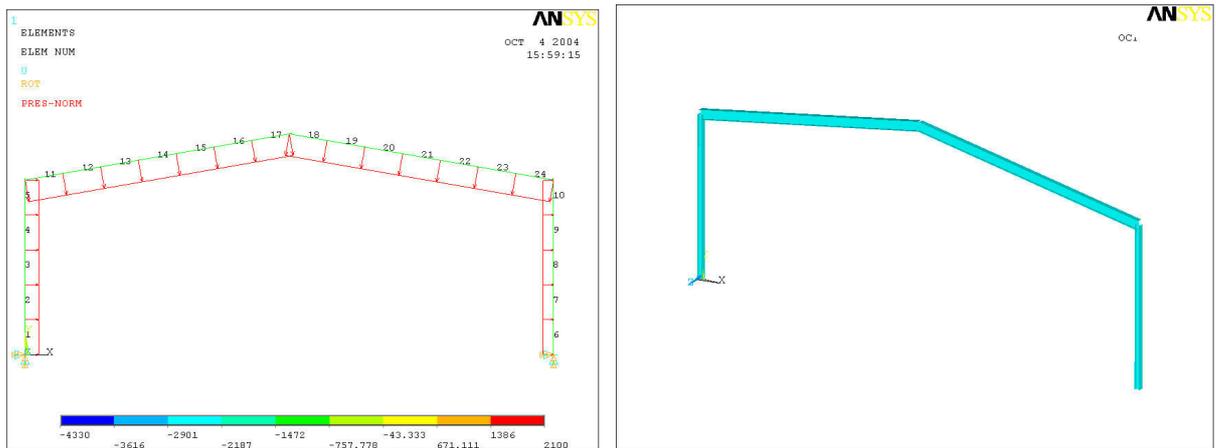
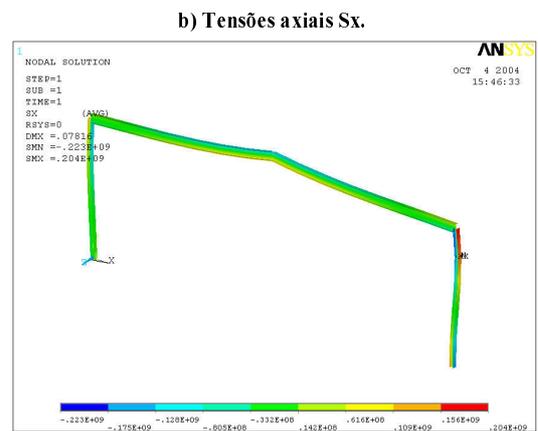
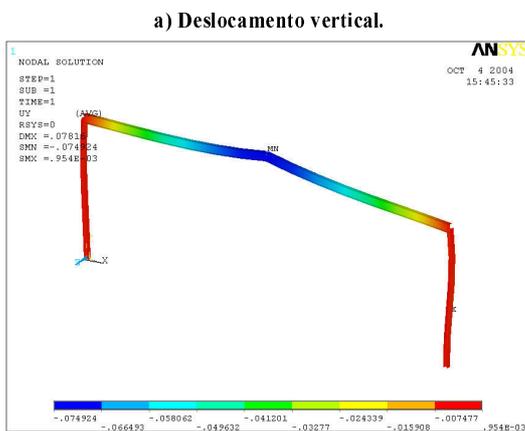


Fig. 70 – Discretização e carregamento num pórtico plano.

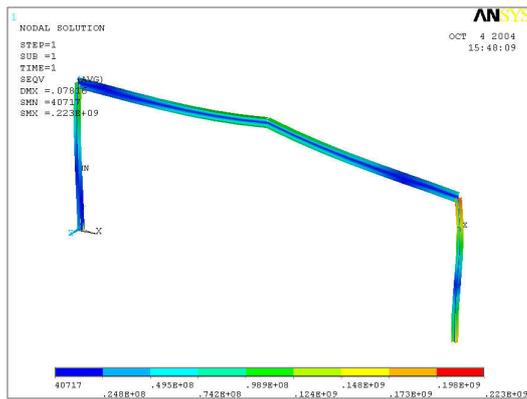
Com a possibilidade de utilização de elementos unidimensionais (linha), com comportamento no plano do pórtico (elemento de viga plano), optou-se por uma discretização mais elaborada, com um elemento baseado na teoria de Timoshenko (BEAM 188), capaz de reproduzir o estado da secção do elemento, com a forma escolhida para a secção recta e com comportamento tridimensional (seis graus de liberdade por nó). O excesso de graus de liberdade deverá ser constringido em função do comportamento previsto da estrutura ( $UZ=0$ ,  $ROTX=0$ ,  $ROTZ=0$ ).

Na figura seguinte encontram-se os resultados para o estado limite último.

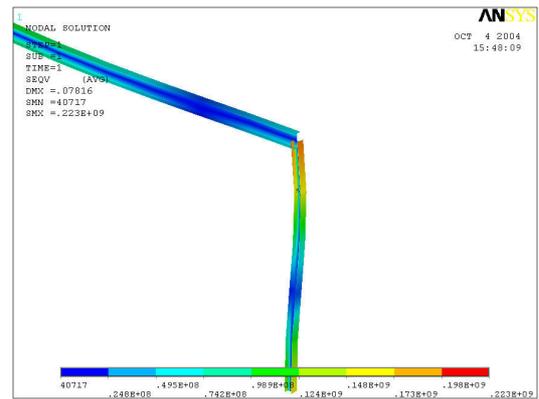


c) Tensão equivalente Von Mises.

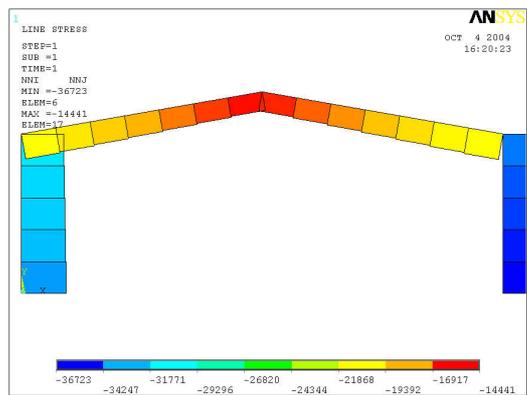
d) Tensão equivalente Von Mises (pormenor).



e) Esforço normal [N].



f) Esforço transverso [N].



g) Esforço momento flector.

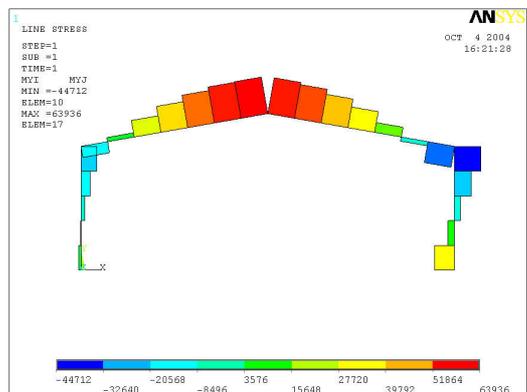
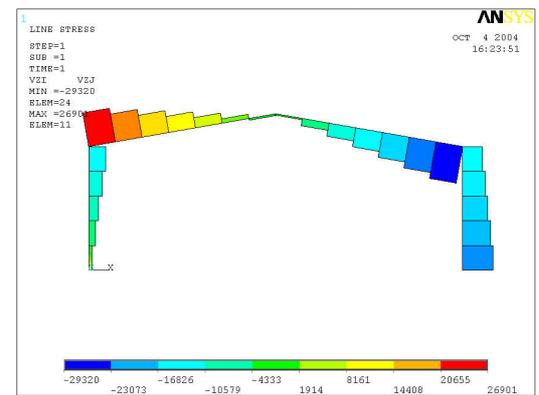


Fig. 71 – Resultados para o estado limite último.

A representação dos esforços pode não estar de acordo com a convenção habitual de sinais, sendo de referir que os respectivos valores confirmam os resultados esperados.

Resultados semelhantes podem ser obtidos por outros programas de cálculo, disponíveis no mercado. Os resultados que se apresentam na figura seguinte foram obtidos com o programa Cype, sendo de salientar pequenas diferenças relacionadas com o modelo de cálculo utilizado em cada programa.

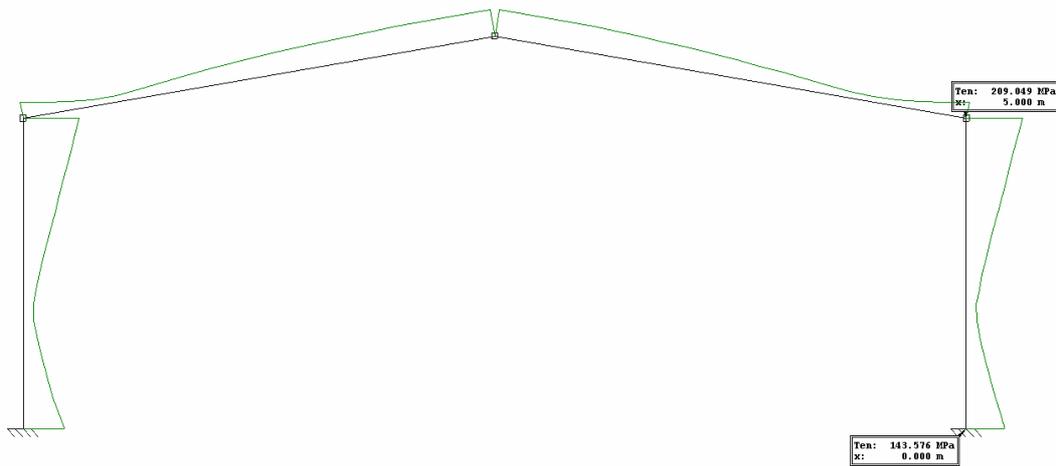


Fig. 72 – Envoltório da tensão no pórtico, para a combinação fundamental ELU de resistência.

Os perfis seleccionados são claramente suficientes, verificando ambos as condições de segurança (estado limite último de resistência sem plastificação).

#### 4.6.7 – Determinação dos esforços internos

Para as condições do exercício 4.6.3, verifique os diagramas de esforços internos obtidos através de um código de elementos finitos.

#### 4.7 – Exercício proposto de aplicação RSA.

A figura seguinte representa-se um conjunto de vigas em consola, pertencentes a um edifício tipo industrial e que tem como função suportar um pavimento em grelha metálica. Cada viga é constituída por uma estrutura articulada (treliça), utilizando perfis IPN nas cordas e montantes (com a alma no plano da viga) e cantoneiras nas diagonais (soldadas a “gussets” nos nós da viga. Em função das condições de apoio, e sabendo que a estrutura está sujeita às acções descritas, dimensione os perfis IPN (cordas e montantes) e as cantoneiras (diagonais) em aço S235, de acordo com a regulamentação Portuguesa.

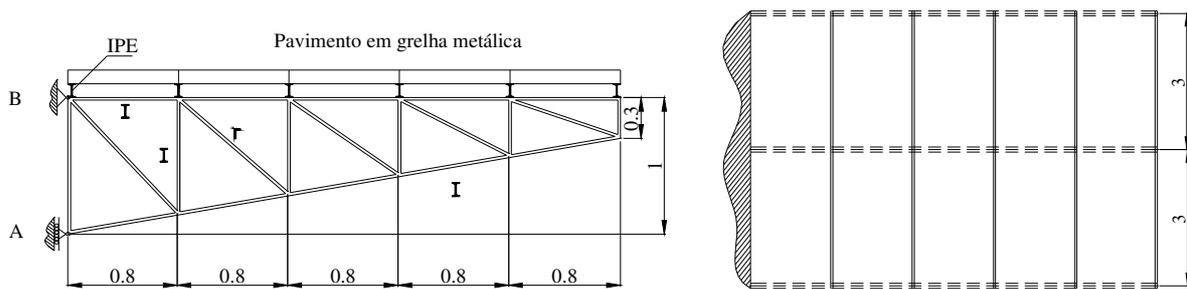
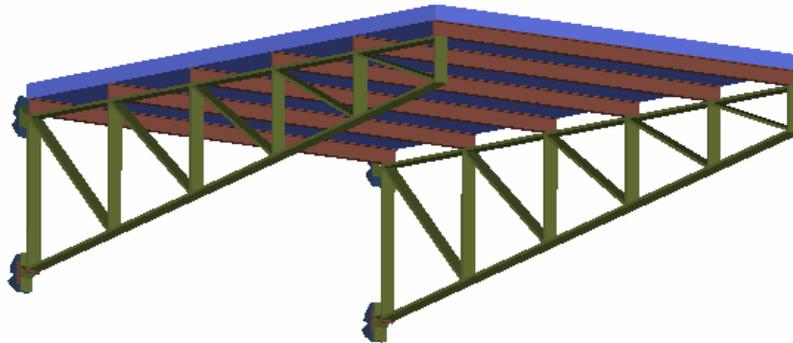


Fig. 73 – Modelo de um pavimento em edificação industrial.

A estrutura apresentada deverá considerar o peso próprio do pavimento e treliças – equivalente a uma carga uniformemente distribuída de  $750 \text{ [N/m}^2\text{]}$ , assim como o peso próprio das vigas metálicas de suporte do pavimento –  $100 \text{ [N/m]}$  e uma sobrecarga no pavimento de  $6900 \text{ [N/m}^2\text{]}$

Deverá verificar os estados limites últimos plausíveis, considerando apenas as acções referidas.



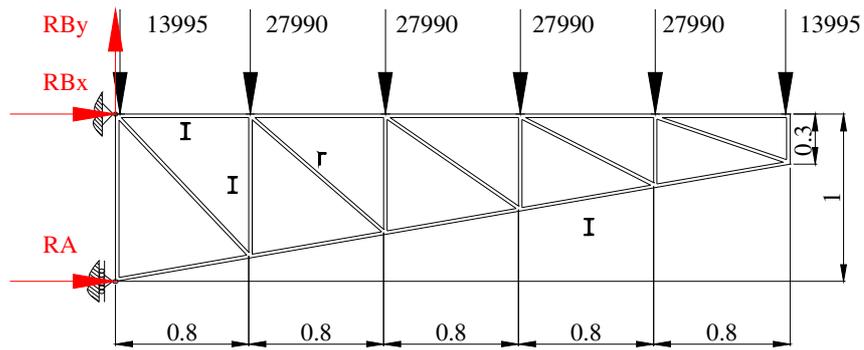
$$S_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{gi} S_{Gik} + \gamma_q \left[ S_{Q1k} + \sum_{j=2}^n \psi_{0j} S_{Qjk} \right]$$

$$S_d = 1.5 [750 \times (3 \times 0.8) + (100 \times 3)] + 1.5 \times [6900 \times 3 \times 0.8]$$

$$S_d = 3150 + 24840$$

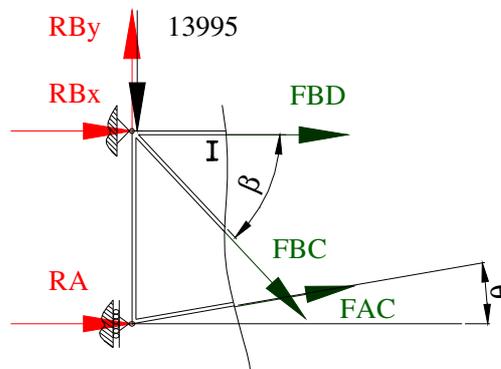
$$S_d = 27990 \text{ [N]}$$

Determinação das reacções nos apoios, considerando este carregamento concentrado em cada nó da treliça.



$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} RA + RBx = 0 \\ RBy - 27990 \cdot 2 - 13995 \cdot 4 = 0 \\ RA - 27990 \cdot (0.8 + 1.6 + 2.4 + 3.2) - 13995 \cdot 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} RBx = -279900 \\ RBy = 139950 \\ RA = 279900 \end{cases}$$

Determinação dos esforços internos: Os elementos da treliça mais solicitados encontram-se localizados próximo dos apoios. Os elementos homólogos (constituídos pelas mesmas secções) encontram-se menos solicitados, pelo que apenas será necessário determinar os esforços nas barras AB, BC, CD, AC e BD.

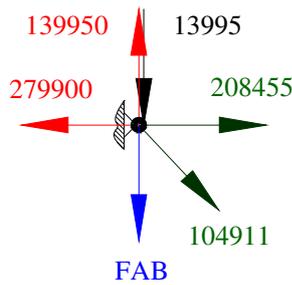


$$\text{tg}(\theta) = 0.7/4 \Rightarrow \theta = 9.96^\circ$$

$$\text{tg}(\beta) = 0.86/0.8 \Rightarrow \beta = 47.07^\circ$$

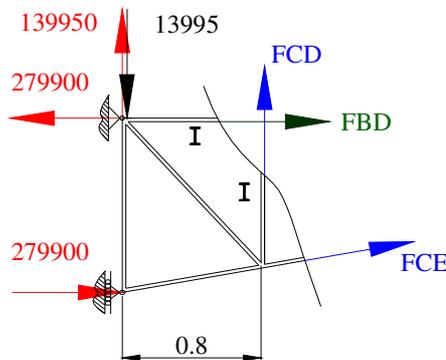
$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} FAC \times 0.985 + FBC \times 0.681 + FBD = 0 \\ -13995 + 139950 + FAC \times 0.173 - FBC \times 0.732 = 0 \\ 279900 \times 1 + FAC \times 0.985 \times 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} RBx = 208455 \\ FBC = 104911 \\ FAC = -284162 \end{cases}$$

Determinação do esforço na barra FAB.



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 208455 + 104911 \times 0.681 - 279900 = 0 \\ 139950 - 13995 - FAB - 104911 \times 0.732 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} FAB = 49160 \\ - \end{cases}$$

Determinação do esforço na barra CE e CD.



$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} FCE \times 0.985 + 208455 = 0 \\ 139950 - 13995 + FCD + FCE \times 0.173 = 0 \\ 279900 \times 1 + FCD \times 0.8 + FCE \times 0.985 \times 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ FCE = -211629 \\ FCD = -89343 \end{cases}$$

Dimensionamento da corda AC: Trata-se de um perfil no estado de compressão ( $L=0.8121[m]$ ), submetido a uma carga de  $284162 [N]$ , pelo que deverá ser verificado o artigo 42 do REAE.

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi}$$

$N_{Sd}$  representa o valor de cálculo do esforço normal actuante,  $A$  refere-se à área da secção transversal do elemento em estudo,  $\varphi$  representa um coeficiente de encurvadura, função da esbelteza  $\lambda$ . A esbelteza do elemento estrutural, definida como sendo igual ao quociente entre comprimento de encurvadura  $L_e$  e o raio de giração da secção  $i_y$  ou  $i_z$ .

Admitindo um perfil IPN 140  $\Rightarrow i_z = 1.4[cm]$ ,  $A = 18.3[cm^2]$

TIPO DE AÇO	COEFICIENTE DE ESBELTEZA $\lambda$	COEFICIENTE DE ENCURVADURA $\varphi$
S235	$\lambda \leq 20$ $20 < \lambda \leq 105$ $\lambda = \frac{0.8121}{0.014} = 58$ $\lambda > 105$	$\varphi = 1$ $\varphi = 1.1328 - 0.00664\lambda$ $\varphi = 0.7476$ $\varphi = 4802/\lambda^2$

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} = 207[MPa]$$

Perfil IPN 140 é adequado.

Dimensionamento do montante CD: Trata-se de um perfil no estado de compressão ( $L=0.86[m]$ ), submetido a uma carga de  $89343[N]$ , pelo que deverá ser verificado o artigo 42 do REAE.

Admitindo um perfil IPN 120  $\Rightarrow i_z = 1.23[cm]$ ,  $A = 14.2[cm^2]$

$$\lambda = \frac{0.86}{0.0123} = 69.9 \Rightarrow \varphi = 0.6685 \Rightarrow \sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} = 94[MPa]$$

Perfil IPN 120 é adequado.

Dimensionamento da diagonal BC: Trata-se de um perfil no estado de tracção, submetido a uma carga de  $104911[N]$ , não devendo adoptar uma esbelteza exagerada, pois pode ocorrer compressão para uma qualquer outra combinação de acção. Na prática procura-se que a esbelteza seja inferior a 200.

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

O valor de cálculo das tensões resistentes é dado por:

$$\sigma_{Rd} = f_{yd}$$

O valor de cálculo das tensões solicitantes de cálculo é dado por:

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A} \Rightarrow A \geq 4.46410^{-4} [m^2] \Rightarrow \text{Perfil L100x100x10.}$$

**4.8 – Exercício de aplicação sobre acções sísmicas.**

Determine o valor das acções sísmicas características, actuantes na estrutura esquematizada, utilizando o método estático. Trata-se de um edifício de quatro pisos, estrutura de betão armado, destinado a escritórios, a construir na região de Lisboa (zona A), sendo o terreno de fundação em argilas duras (tipo II). A estrutura modulada apresenta ductilidade normal  $\eta = 2.5$ , com dimensões em planta de 18x30 [m] e altura  $h=12$  [m].

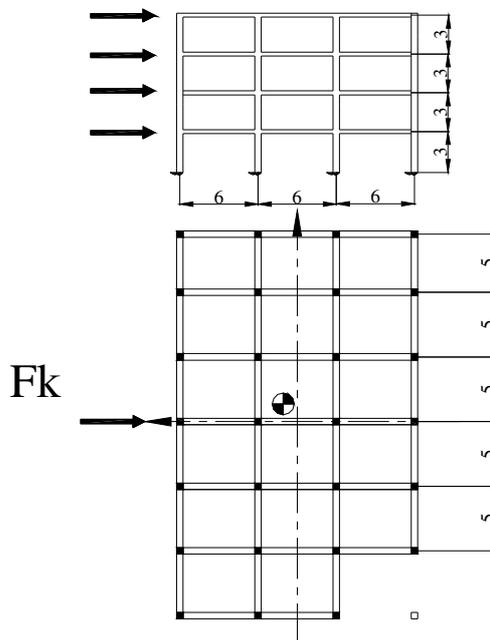
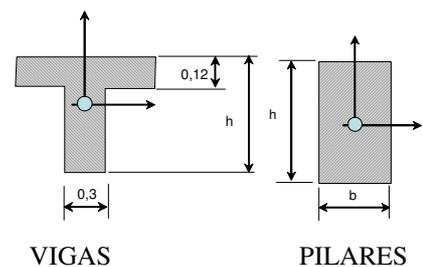


Fig. 74 - Modelo de uma estrutura quase simétrica.

As características dos elementos estruturais resistentes são as que se apresentam na tabela seguinte.

Tabela 22 – características dos perfis estruturais.

VIGAS Ref.	h (cm)	PILARES				
		Ref.	B (cm)	H (cm)	Ixx (dm <sup>4</sup> )	Iyy (dm <sup>4</sup> )
V1-V2	50	P1 P2 P3	30	40	16	9
V3-V4	50	P4 P5	30	40	16	9
V5-V6	55	P6 P7	40	45	30.37	24
V7-V8	55	P8	40	45	30.37	24



Em função do número de pisos ( $n=4$ ), é possível determinar de uma forma aproximada o valor da frequência própria fundamental  $f$ .

$$f = \frac{12}{n} = \frac{12}{4} = 3 \text{ [Hz]}$$

O coeficiente sísmico de referência é determinado em função da frequência.

$$\beta_0 = 0,2\sqrt{f} = 0,35$$

Para o coeficiente de sismicidade igual a 1 (zona de Lisboa) e para as características de comportamento da estrutura porticada, é possível determinar o valor do coeficiente sísmico.

$$\beta = \beta_0 \frac{\alpha}{\eta} = 0,14 \quad \alpha = 0,14$$

O valor característico da força global aplicada no piso  $i$ , depende da altura do respectivo piso e do valor relativo das massas associadas, conforme expressão seguinte.

$$F_{ki} = \beta \times h_i \times G_i \times \frac{\sum_{i=1}^n G_i}{\sum_{i=1}^n h_i \times G_i}$$

Nesta equação  $\beta$  representa o coeficiente sísmico,  $h_i$  representa a altura do piso  $i$ , enquanto que  $G_i$  representa a soma dos valores das cargas permanentes e dos valores quase permanentes das acções variáveis correspondentes ao piso  $i$ . O somatório deverá ser aplicada ao número de pisos da edificação  $n$ .

A distribuição destas forças encontra representada no gráfico da figura que se segue, sendo que estas se consideram aplicadas com excentricidades relativas ao centro de massa, para a situação mais desfavorável.

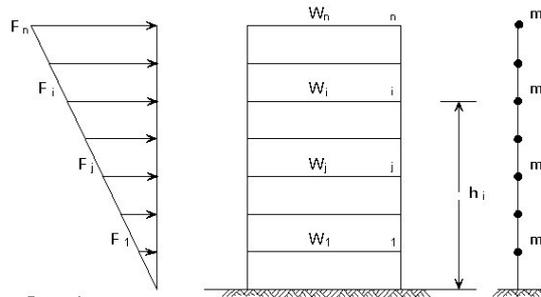


Fig. 75 – Distribuição das forças resultantes por pisos.

Para verificação das condições de aplicabilidade do método simplificado, (artigo 30 do RSA), a distância entre o centro de rigidez e o centro de massa não deve exceder 15% da dimensão do edifício perpendicular à direcção das forças consideradas. Esta condição obriga que se proceda ao cálculo do centro de massa e de rigidez. A determinação do centro de massa em cada piso deve ser determinada pela resultante das forças verticais aplicadas ao eixo de cada pilar, de grandeza proporcional às massas suportadas por cada um, considerando o pé direito por baixo das vigas no R/C e 1º andar igual a 2,45 [m] e o pé direito do 2º / 3º andar igual a 2,60 [m]. O centro de rigidez é determinado do mesmo modo que o anterior, considerando forças de grandeza proporcional ao momento de inércia de cada um dos pilares, para cada uma das direcções x e y.

O valor das acções específicas é função das cargas permanentes e do valor quase permanente da acção variável sobrecarga.

Tabela 23 – Valor característico das massas dos elementos.

MASSA DO EDIFÍCIO ELEMENTO	VALOR CARACTERÍSTICO	TIPO: P- PERMANENTE V- VARIÁVEL
Laje	370 [kg/m <sup>2</sup> ]	P
Parede da fachada	430 [kg/m <sup>2</sup> ]	P
Enchimento cobertura	280 [kg/m <sup>2</sup> ]	P
Viga V1...V4	310 [kg/m]	P
Viga V5...V8	350 [kg/m]	P
Pilar P1...P5	350 [kg/m]	P
Pilar P6...P8	560 [kg/m]	P
Sobrecarga terraço	200 [kg/m <sup>2</sup> ]	V
Sobrecarga pavimento	300 [kg/m <sup>2</sup> ]	V
Sobrecarga divisórias	130 [kg/m <sup>2</sup> ]	V

O cálculo tem de ser efectuado para cada piso, considerando as cargas permanentes e o valor 40% (sobre carga) das cargas variáveis. Concretizando para o piso da cobertura e do 3º andar, a acção concentrada vale:

Tabela 24 – Massa correspondente ao piso cobertura.

MASSA DO EDIFÍCIO	VALOR CARACTERÍSTICO	MASSA [KG]
Elemento		
Laje	370 [kg/m <sup>2</sup> ]	554x370=204 980
Enchimento cobertura	280 [kg/m <sup>2</sup> ]	554x280=115 120
Viga V1...V2	310 [kg/m]	241x310= 74 710
Pilar P1...P2	350 [kg/m]	1/2x70 x 350 = 12 250
Sobrecarga terraço	200 [kg/m <sup>2</sup> ]	40%(554x200)=44 320
total		491 380

Tabela 25 – Massa correspondente ao 3º piso

MASSA DO EDIFÍCIO	VALOR CARACTERÍSTICO	MASSA [KG]
Elemento		
Laje do pavimento	370 [kg/m <sup>2</sup> ]	554x370=204 980
Viga V3...V4	310 [kg/m]	241x310= 74 710
Divisórias leves		554x130=72 020
Pilar P3...P4	350 [kg/m]	70 x 350 = 24 500
Paredes de fachada	430 [kg/m <sup>2</sup> ]	145x430=62 3500
Sobre carga	300 [kg/m <sup>2</sup> ]	40%(554x300)=66 480
total		505 040

A determinação da massa para os pisos, 1 e 2, deverá ser feita de maneira semelhante.

Para determinação do centro de massa afecto a cada piso, deverá ser considerado o valor da força correspondente a cada área de influência dos pilares, ver figura seguinte.

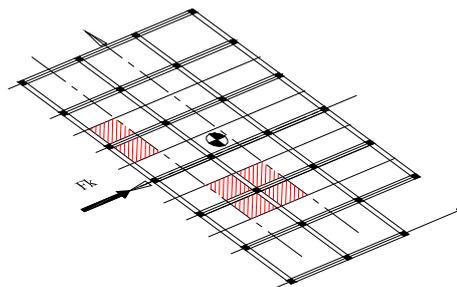


Fig. 76 – Área de influência das forças de massa concentradas.

O resultado da aplicação desta fórmula ao piso da cobertura, dá origem a:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i m_i}{m_i} = 0,41 \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i m_i}{m_i} = 0,24$$

Resultado semelhante pode ser encontrado para os restantes pisos, ver tabela seguinte.

Tabela 26 – Posição do centro de massa de cada piso.

PISO	SMI	XI	YI
1	491380	0,41	0,24
2	505040	0,41	0,24
3	529380	0,41	0,24
4	529380	0,41	0,24

O centro de rigidez deverá ser calculado do mesmo modo que o parâmetro anterior, considerando forças de grandeza proporcional ao momento de inércia de cada pilar, considerando, a título de exemplo, para o piso da cobertura:

$$y_{cr} = \frac{\sum \bar{y}_i I_{xxi}}{\sum I_{xxi}} = \frac{I_{xx} \times 9}{27 I_{xx}} = 0.33 \quad x_{cr} = \frac{\sum \bar{x}_i I_{yyi}}{\sum I_{yyi}} = \frac{I_{yy} \times 15}{27 I_{yy}} = 0.55$$

A condição de aplicabilidade do método estático (artigo 30 do RSA), obriga que se determine a distância entre o centro de rigidez e o centro de massa. No caso do piso da cobertura, esta condição é verificada, de acordo com:

$$b_{ix} = 0,55 - 0,41 = 0,15 < 15\%(30) = 4,5[m]$$

$$b_{iy} = 0,33 - 0,24 = 0,09 < 15\%(18) = 2,7[m]$$

O valor característico da força global aplicada a cada piso pode ser determinado em função dos valores apresentados nas duas tabelas seguintes.

Tabela 27 – Valores dos factores de cálculo de cada força global.

ID	PESO DAS MASSAS [KN]	MOMENTO DAS MASSAS [KNM]
cobertura	<b>G4=4817</b>	<b>M4=4817x12</b>
3°	<b>G3=4951</b>	<b>M3=4951x9</b>
2°	<b>G2=5190</b>	<b>M2=5190x6</b>
1°	<b>G1=5190</b>	<b>M1=5190x3</b>
Total	$\sum G_i = 20148$	$\sum h_i G_i = 149073$

Tabela 28 – Valor da força característica de cada piso.

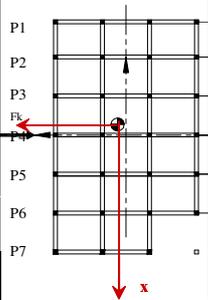
ID	FORÇA PISO [KN]	
cobertura	Fk4=0,14x12x4817x0,135	Fk4=1092
3°	Fk3=0,14x9x4951x0,135	Fk3=842
2°	Fk2=0,14x6x5190x0,135	Fk2=589
1°	Fk1=0,14x3x5190x0,135	Fk1=294

No caso de estrutura simétrica em relação ao plano que contém a direcção da acção sísmica, pode considerar-se que as resultantes das forças estáticas equivalentes actuam segundo esse plano, distribuindo o seu efeito pelos elementos localizados em paralelo, de acordo com a expressão:

$$F_{ki}^{pi} = \frac{F_{ki}}{7} (1 \pm 0,02x)$$

Os valores distribuídos pelos sete pórticos dão origem ao seguinte quadro de forças:

Tabela 29 – Valores das forças distribuídas por pórtico.

P1 P2 P3 Fk P5 P6 P7		VALORES DAS FORÇAS NOS PÓRTICOS TRANSVERSAIS							FK1 [KN]
		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	
	x	-14,59	-9,59	-4,59	0,41	5,41	10,41	15,41	
	xi	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
	Fk4	109,2	124,8	140,4	156,0	171,6	187,2	202,3	1092
	Fk3	84,2	96,2	108,3	120,3	132,3	144,3	156,4	842
	Fk2	58,9	67,3	75,7	84,1	92,6	101,0	109,4	589
	Fk1	29,4	33,6	37,8	42,0	46,2	50,4	54,6	294
	Total								2817

A quantificação do efeito da acção sísmica equivalente considera-se efectuada, sendo agora necessário recorrer a um processo de análise estática comum.

### 5 - MÉTODOS ENERGÉTICOS

Estes métodos são de grande importância em análise estrutural. Os domínios de aplicação são diversos, podendo realçar o cálculo de deslocamentos em elementos lineares e curvas, a determinação de incógnitas em sistemas hiperestáticos simples, a análise elementar da mecânica do impacto, etc.

Quando um corpo elástico se deforma sob a acção de forças externas aplicadas, estas realizam trabalho que fica armazenado no interior do corpo, sob a forma de energia elástica de deformação, ver figura seguinte.

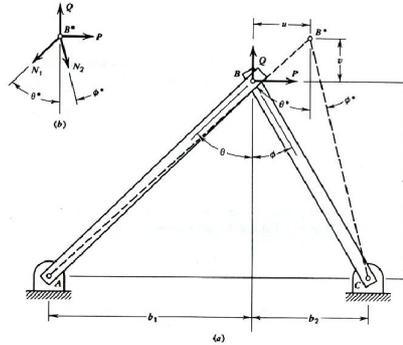


Fig. 77 – Configuração inicial e deformada.

Na formulação clássica, o equilíbrio de forças é efectuado com cálculo de tensões e deformações. A formulação alternativa prevê métodos baseados no trabalho e energia das forças exteriores e interiores que actuam numa estrutura, à qual facilmente se aplicam métodos numéricos de resolução, MEF.

### 5.1 - Energia de Deformação

A determinação da configuração de equilíbrio de um corpo deformável pode ser estabelecida com base em métodos energéticos. Estas técnicas são de grande importância em análise estrutural. Destes métodos são de destacar os métodos baseados no teorema dos trabalhos virtuais e seus derivados.

Segundo o primeiro principio da termodinâmica, a variação de energia  $\Delta E$  verificada num corpo sob a acção de forças exteriores  $P_i$  será dada por:

$$\Delta E = W_E + Q \quad (\text{eq. 58})$$

em que  $W_E$  é o trabalho realizado pelas forças exteriores e  $Q$  a quantidade de calor cedida pelo meio ambiente ao corpo. Admitindo tratar-se de um processo adiabático, sem trocas de calor com o exterior, teremos simplesmente.

$$\Delta E = W_E \quad (\text{eq. 59})$$

Se por outro lado, considerarmos que o carregamento do corpo se produz de forma incremental, a variação de energia cinética será nula ( $\Delta T = 0$ ) e a variação de energia do corpo será só acompanhada de variação de energia interna  $\Delta U$ . Teremos então:

$$\Delta U = W_E \quad (\text{eq. 60})$$

## 5.2 - Teoremas sobre energia de deformação

A variação da energia interna de um corpo elástico designa-se por: Energia de Deformação. O valor da energia de deformação  $U$  armazenada numa barra de comprimento  $L$  quando a carga cresce de 0 a  $F$  será dado pela equação seguinte.

$$U = \frac{1}{2} Fd \quad (\text{eq. 61})$$

Nesta expressão está implícito que a relação carga/deslocamento é linear, sendo portanto a energia de deformação armazenada pela barra, representada pela área triangular do diagrama da figura que se segue, no caso do material apresentar comportamento linear elástico.

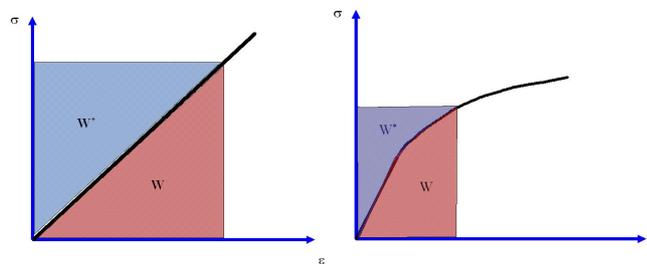


Fig. 78 – Energia de deformação a) material linear elástico, b) material não linear elástico.

Na dedução das expressões para o trabalho de um sistema de forças exteriores admite-se, por simplicidade, que a sollicitação exterior apenas compreende forças, excluindo variações de

temperatura e assentamentos de apoio, pelo que o trabalho total de todo o sistema ser em regime elástico perfeito.

Se um corpo, no início descarregado, isento de variações de temperatura e de assentamentos de apoios, é solicitado por uma força incremental crescente de zero até ao valor final, o trabalho produzido na deformação elástica do corpo é independente da ordem de aplicação de forças e da sua lei de variação, tendo metade do valor que teria se as forças fossem aplicadas com o seu valor final, desde o início.

Nas estruturas articuladas, as barras estão sujeitas só a esforços normais, constantes ao longo da barra e portanto nas condições da barra representada na figura seguinte.

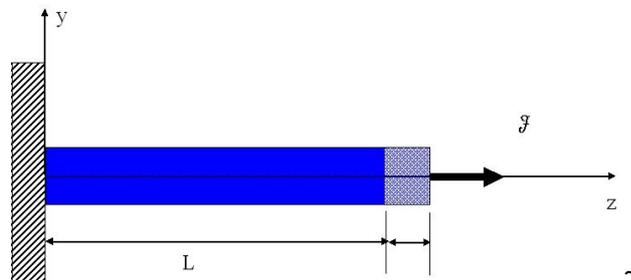


Fig. 79 – Barra deformada por aplicação de uma força.

O valor da energia de deformação armazenada numa estrutura articulada, quando a carga cresce de forma quase-estática de 0 a F. será dada por:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i^2 L_i}{E_i A_i} \quad (\text{eq. 62})$$

em que  $N_i$  representa o esforço normal, admitido como constante,  $L_i$  o comprimento do elemento,  $E_i$  o módulo de elasticidade e  $A_i$  a área da secção recta de cada barra  $i$ .

Para o caso de uma estrutura continua, num elemento de volume  $V$  de forma e dimensões arbitrárias, o cálculo da energia de deformação pode ser feito através do tensor das tensões e das deformações. Para o regime linear podemos escrever:

$$U = \int W_o dV \quad (\text{eq. 63})$$

em que

$$W_o = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (\text{eq. 64})$$

representa o valor da energia de deformação por unidade de volume.

A aplicação da equação 63 pressupõe o conhecimento do tensor das tensões e do tensor das deformações em todos os pontos do corpo. A solução analítica só será possível no caso de elementos com geometria simples e submetidos a solicitações simples. Estamos novamente no domínio de barras ou peças lineares sujeitas a solicitações como tracção simples, flexão pura, etc. Casos mais complexos exigem um tratamento numérico da equação (63).

De uma forma genérica, o tipo de estruturas reticuladas é constituída por associação de elementos lineares. Neste caso o cálculo da energia de deformação pode ser feito através dos esforços internos, como se indica na secção seguinte.

### 5.3 – Energia de deformação de elemento submetidos a esforço normal

Considerando um segmento de comprimento  $dx$  do elemento estrutural, com área da secção recta  $A$ , e sujeito a um esforço normal  $N$ , a tensão normal deverá ser determinada através de  $\sigma_x = N/A$  e a deformação axial  $\varepsilon_x = N/(EA)$ . A energia de deformação absorvida pelo elemento de comprimento  $L$ , será dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx \quad (\text{eq. 65})$$

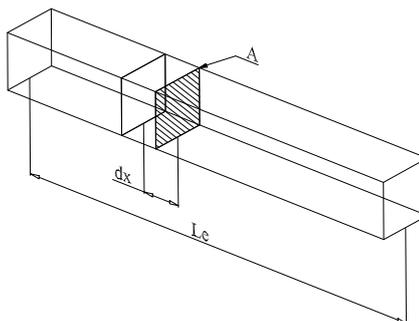


Fig. 80 - Representação geométrica do elemento barra

#### 5.4 – Energia de deformação de elemento submetidos a esforço de flexão

Considere-se outro tipo de elemento, agora sujeito a um carregamento de flexão. Para as fibras localizadas na cota  $y$ , a tensão normal será  $\sigma_x = M y / I_z$  e a deformação axial associada  $\epsilon_x = M y / (E I_z)$ .

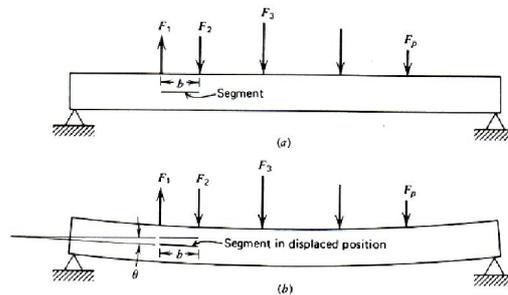


Fig. 81 – Elemento de viga. Energia de deformação.

Por aplicação de equação 63 determina-se o valor da energia de deformação no elemento.

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 y^2}{E I_z^2} dA dl \quad (\text{eq. 66})$$

Atendendo ao facto de que o valor do integral de área da função  $(y^2 dA)$  é numericamente igual a  $I_z$ , o valor da energia de deformação na viga de comprimento  $L$  é obtido através da seguinte expressão.

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E I_z} dl \quad (\text{eq. 67})$$

#### 5.5 – Energia de deformação de elementos submetidos a esforço transversal

Considere-se um elemento estrutural submetido a um estado de corte puro, conforme se representa na figura seguinte. O estado de tensão criado encontra-se representado para diferentes tipos de secções rectas.

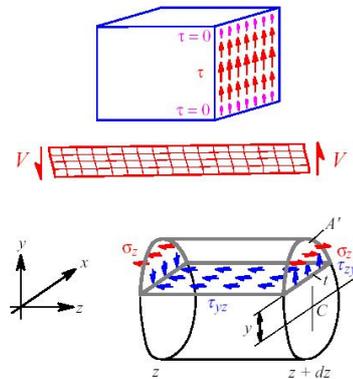


Fig. 82 – Elemento submetido a um estado de corte puro.

A energia de deformação devida ao esforço cortante V para o elemento infinitesimal será dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{\tau}{G} dA dl \tag{eq. 68}$$

em que  $\tau$  é a tensão de corte e G o módulo de elasticidade transversal. O valor da tensão de corte  $\tau$  não é constante ao longo da secção recta e depende da forma do perfil.

Para a secção rectangular indicada na figura anterior, a variação da tensão é efectuada de acordo com a seguinte expressão.

$$\tau = \frac{V}{2I_z} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \tag{eq. 69}$$

Assim, o valor da energia de deformação infinitesimal correspondente vale:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{V}{4GI_z} \left[ \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) b dy \right] dl \tag{eq. 70}$$

Para o caso geral é possível escrever.

$$dU = \frac{1}{2} \frac{V^2}{GA_r} dl \quad (\text{eq. 71})$$

em que  $A_r$  representa a área reduzida da secção. Para uma secção rectangular  $A_r=A/1,2$ . Para os perfis I normalizados, em que se admite que o esforço cortante é absorvido pela alma do perfil, a secção reduzida será a secção da alma do perfil.

Para uma viga de comprimento  $L$ , a energia de deformação devida ao esforço cortante  $V$  será dada por:

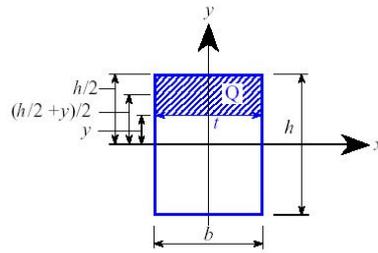
$$U = \frac{1}{2} \int \frac{V}{GA_r} dL \quad (\text{eq. 72})$$

em que  $A_r = A / m$ , representando  $m$  o valor do factor de corte da secção em estudo, caracterizado pela expressão seguinte.

$$m = k = \frac{A}{I^2} \iint \frac{Q^2}{t^2} dA \quad (\text{eq. 73})$$

em que  $Q$  representa o valor do momento estático de primeira ordem,  $t$  representa o valor da largura do perfil e  $I$  o respectivo valor do momento de segunda ordem.

Para o caso de um perfil com uma secção recta, o valor do factor de corte pode ser determinado, conforme figura seguinte.



$$A = hb, \quad I = \frac{h^3b}{12}, \quad Q = \left(\frac{h}{2} - y\right)b\bar{y} = \left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\frac{b}{2}, \quad t = b$$

$$k = \frac{A}{I^2} \iint \frac{Q^2}{t^2} dy dz = \frac{36}{h^5b} \iint \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dy dz = \frac{36}{h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dy$$

$$k = \frac{72}{h^5} \int_0^{h/2} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2y^2}{2} + y^4\right) dy = \frac{72}{h^5} \left[\frac{h^4y}{16} - \frac{h^2y^3}{6} + \frac{y^5}{5}\right]_0^{h/2} = \frac{6}{5}$$

Fig. 83 –Determinação do factor de corte.

Para outros tipos de secção recta, os valores podem igualmente ser determinados por integração, resumindo-se aos valores apresentados na tabela seguinte.

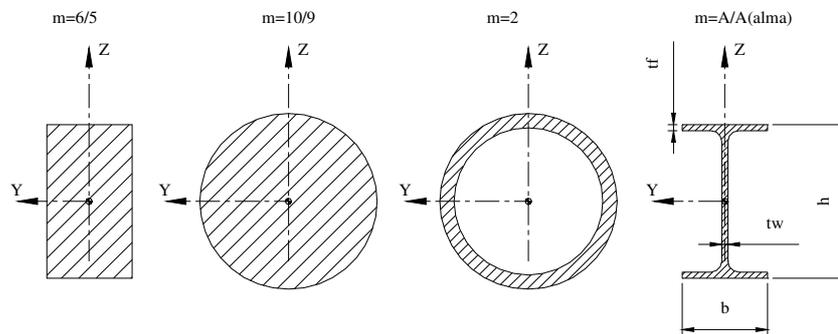


Fig. 84 - Valores do factor de corte para diferentes secções de elementos estruturais.

### 5.6 – Energia de deformação de elementos submetidos a esforço de torção

Para um elemento infinitesimal  $dL$ , sujeito a um momento torsor  $M_t$ , a tensão tangencial para um ponto à distância  $r$  do eixo será  $\tau = M_t r/l_p$ .

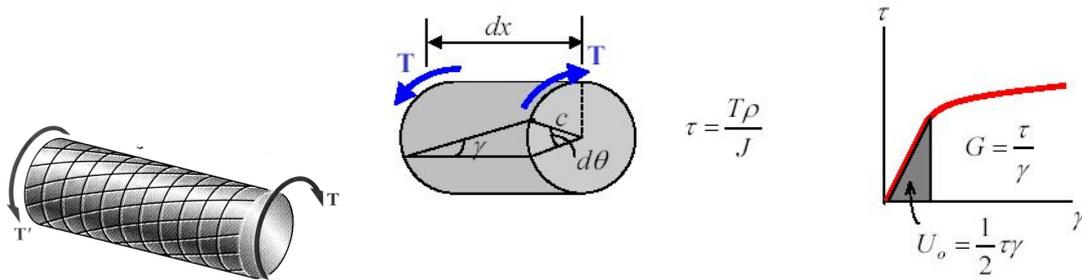


Fig. 85 – Energia de deformação devido ao esforço de torção.

O valor da energia de deformação infinitesimal pode ser determinada, de acordo com a seguinte expressão.

$$dU = \frac{1}{2} \int \frac{M_t r^2}{G I_p^2} dA dl \quad (\text{eq. 74})$$

Por integração, o valor da energia de deformação do elemento será determinado de acordo com:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M_t^2}{G I_p} dl \quad (\text{eq. 75})$$

### 5.7 – Energia de deformação de elementos submetidos a variação de temperatura uniforme

No caso de verificar uma variação de temperatura uniforme, de amplitude  $\Delta T$ , o elemento sofre uma deformação  $\epsilon_{xx}$  e uma tensão  $\sigma_{xx}$  de valor igual a:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \alpha \Delta T \\ \sigma_{xx} &= E \epsilon_{xx} = E \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (\text{eq. 76})$$

A energia de deformação será determinada pela expressão seguinte.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_v E (\alpha \Delta T)^2 dV = \frac{1}{2} \int_L EA (\alpha \Delta T)^2 dL \quad (\text{eq. 77})$$

**5.8 – Energia de deformação de elementos submetidos a variação de temperatura diferencial**

Admitindo um aumento de temperatura na face superior,  $\Delta T_s$ , e um aumento de temperatura diferenciada, na face inferior,  $\Delta T_i$ , será de prever o aparecimento de esforços normais e de flexão, os quais deverão ser devidamente considerados.

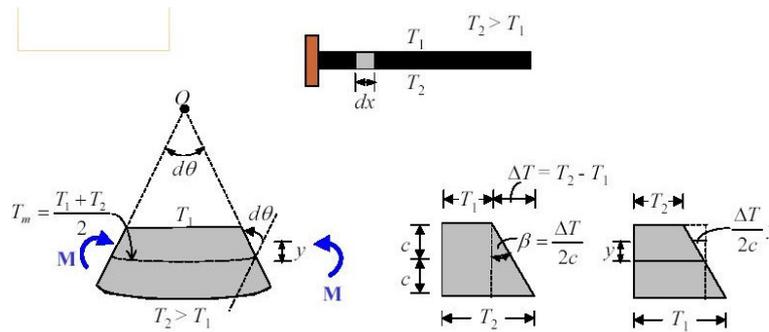


Fig. 86 –Elemento submetido a um aquecimento não uniforme.

Origem relacionada com esforços normais:

$$\epsilon_N = \frac{\alpha}{2} (\Delta T_i + \Delta T_s)$$

$$\sigma_N = E \frac{\alpha}{2} (\Delta T_i + \Delta T_s) \tag{eq. 78}$$

Origem relacionada com o esforço de flexão :

$$\theta_M = \frac{\alpha}{h} (\Delta T_i - \Delta T_s) = \frac{M}{EI} \tag{eq. 79}$$

A energia de deformação poderá ser determinada pela expressão seguinte:

$$U = \frac{1}{2} \int_L EA \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta T_i + \Delta T_s) \right)^2 dL + \frac{1}{2} \int_L EI \left( \frac{\alpha}{h} (\Delta T_i - \Delta T_s) \right)^2 dL \tag{eq. 80}$$

### 5.9 – Energia de deformação de elementos submetidos a um carregamento genérico

No caso mais geral, um elemento linear estará sujeito a solicitações que lhe criam simultaneamente todos ou quase todos os esforços indicados anteriormente. Assim, para o caso de estruturas planas sob a ação das solicitações apresentadas deverá ser necessário considerar simultaneamente os esforços  $N$ ,  $V$ ,  $M$  e  $M_t$ , originando:

$$U = \frac{1}{2} \left( \int \frac{N^2}{EA} dl + \int \frac{M^2}{EI_z} dl + \int \frac{V^2}{GA_r} dl + \int \frac{M_t^2}{GI_p} dl \right) \quad (\text{eq. 81})$$

Para o caso de elementos estruturais tridimensionais devem ser consideradas as seis componentes dos esforços internos para o cálculo do valor a energia de deformação.

$$U = \frac{1}{2} \left( \int \frac{N^2}{EA} dl + \int \frac{V_y^2}{GA_r} dl + \int \frac{V_z^2}{GA_r} dl + \int \frac{M_x^2}{GI_p} dl + \int \frac{M_y^2}{EI_y} dl + \int \frac{M_z^2}{EI_z} dl \right) \quad (\text{eq. 82})$$

Para cada um destes casos de solicitação, poderá ser necessário adicionar o efeito da presença da variação de temperatura.

### 5.10 – Exercícios de aplicação

Para o componente representado na figura seguinte e para um material com um módulo de elasticidade igual a  $E=75$  [GPa], determine a energia de deformação na barra de Alumínio.

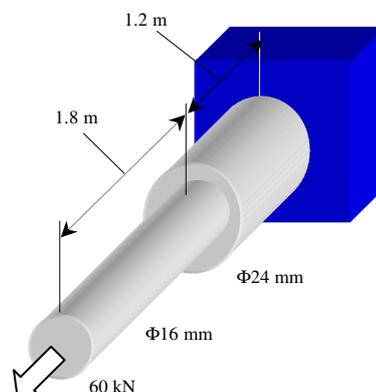


Fig. 87 – Modelo de elementos submetidos a esforço normal.

Para as estruturas representadas na figura seguinte e para as secções transversais indicadas, determine a energia de deformação sabendo que ao material corresponde  $E=200$  [GPa].

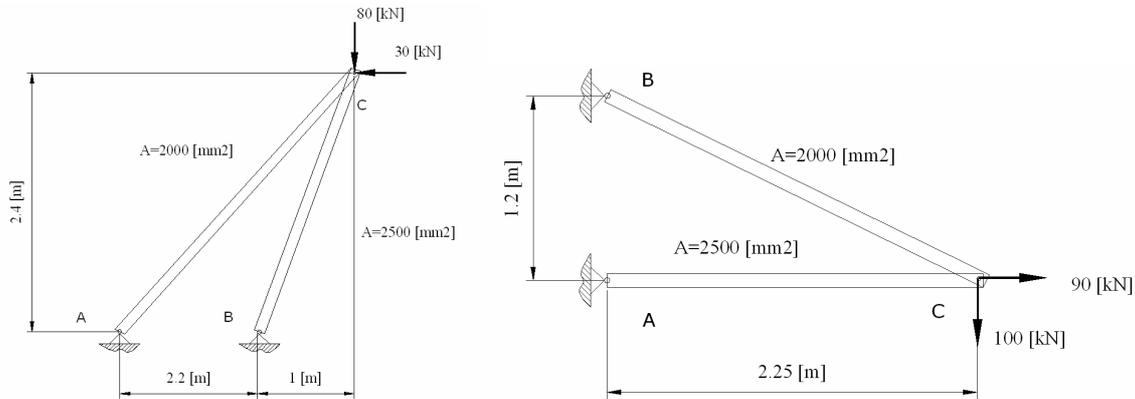


Fig. 88 – Modelos de estruturas articuladas.

Para a viga representada na figura seguinte, determine a energia de deformação devida à flexão, despreze a energia devida às tensões de corte. Considere o material com um módulo de elasticidade,  $E=200$  [GPa].

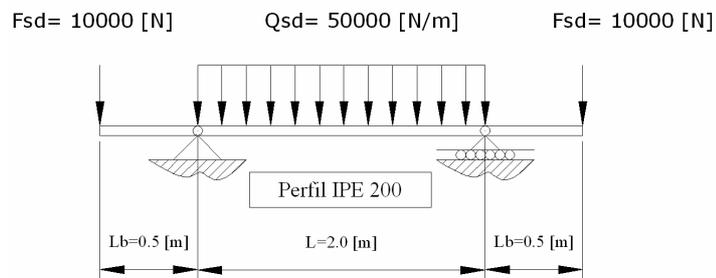


Fig. 89 – Modelo de uma viga submetida a carregamento concentrado e distribuído.

## 6 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Num sistema isolado em que não se verifique a variação de outras formas de energia (térmica, cinética,...) existe uma igualdade entre o trabalho de deformação realizado pelas forças exteriormente aplicadas numa estrutura e a variação de energia elástica que esta estrutura sofre. Um trabalho elementar realizado pelas forças exteriores provocará uma variação elementar de energia elástica.

$$\delta W_E = \delta U \quad (\text{eq. 83})$$

$$\{F\}^T \{\delta D\} = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} dV \quad (\text{eq. 84})$$

A condição de equilíbrio de um corpo deformável pode ser expressa em termos do Teorema dos Trabalhos Virtuais. Para um sólido deformável em equilíbrio o trabalho virtual das forças exteriores, para qualquer deslocamento virtual  $\delta d$  aplicado ao corpo, é igual à variação  $\delta U$ , da energia interna de deformação. Diz-nos ainda o princípio do trabalho virtual que é condição necessária e suficiente para que um sistema de forças esteja em equilíbrio, que seja nula a soma dos trabalhos realizados por todas elas, num deslocamento virtual arbitrário dos respectivos pontos de aplicação.

Para o caso do corpo representado na figura seguinte, considere-se  $Q_i$  o valor das cargas exteriores e por  $\delta q_i$  a componente do deslocamento virtual  $\delta d$  na direcção e sentido da carga  $Q_i$ . O trabalho virtual produzido pelas forças exteriores será então dado por:

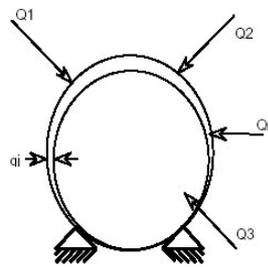


Fig. 90 – Trabalho virtual realizado pelas cargas exteriores.

$$\delta W_E = \sum_i Q_i \delta q_i \quad (\text{eq. 85})$$

Se designarmos por  $\delta \varepsilon_{ij}$  a deformação virtual associada ao deslocamento virtual  $\delta d$ , a variação de energia interna de deformação será dada por:

$$\delta U = \int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{eq. 86})$$

Das equações anteriores resulta a seguinte expressão:

$$\sum Q_i \delta q_i = \int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{eq. 87})$$

ou seja o trabalho virtual das forças exteriores é o trabalho realizado pelas forças reais sobre os deslocamentos virtuais e que o trabalho virtual de deformação é o trabalho realizado pelas tensões reais sobre as deformações virtuais.

### 6.1 - Teorema do deslocamento virtual unitário para cálculo de forças

O Teorema dos Trabalhos Virtuais (TTV) pode ser utilizado para a determinação da configuração de equilíbrio de uma estrutura ou dos esforços que estão a actuar, conhecida a configuração de equilíbrio. Por exemplo, suponhamos que para o corpo da figura seguinte são conhecidos os valores dos deslocamentos  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  e  $d_4$  e se pretende determinar o valor da carga  $Q_4$ . Consideremos um deslocamento virtual tal que  $\delta d_4=1$ , por aplicação das equações anteriores podemos escrever:

$$Q_4 = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \quad (\text{eq. 88})$$

em que  $d\varepsilon_{ij}$  representa as deformações associadas ao deslocamento virtual  $\delta d_4=1$  e  $\sigma_{ij}$  as tensões associadas às cargas  $Q_i$ , as cargas reais aplicadas. De notar que a consideração de um deslocamento virtual  $\delta q_i=0$  com  $\delta q_4=1$  é possível, desde que tal deslocamento respeite as condições fronteira impostas ao corpo. A equação anterior corresponde ao enunciado do Teorema do Deslocamento Unitário que refere que numa estrutura em equilíbrio, o esforço  $Q_j$  pode ser calculado considerando um deslocamento virtual unitário  $\delta q_j = 1$  a partir de:

$$Q_j = \int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{eq. 89})$$

A utilização desta equação depende da possibilidade de cálculo do seu segundo membro. O caso mais simples é o das estruturas articuladas, razão pela qual se apresentarão algumas aplicações.

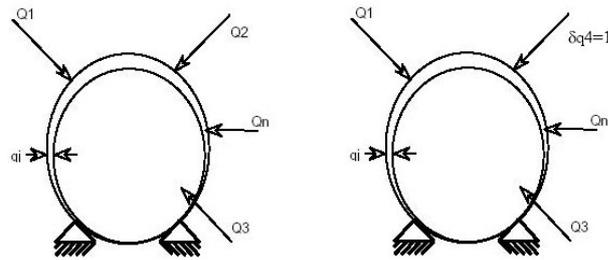
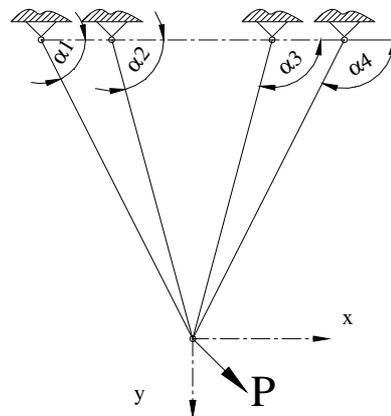


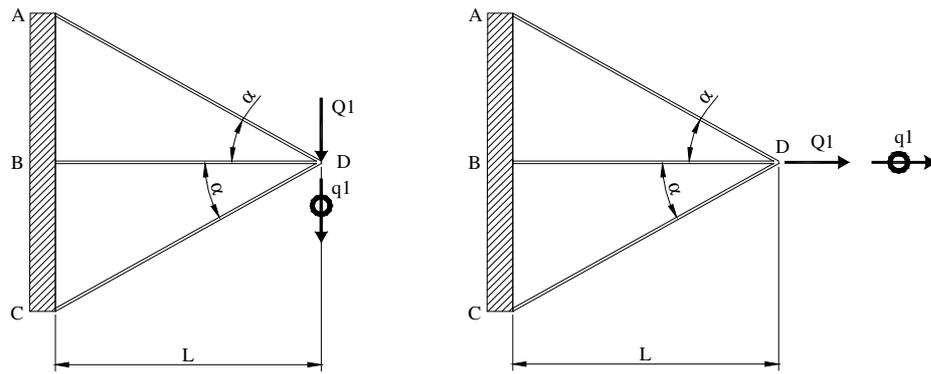
Fig. 91 – Teorema do deslocamento unitário.

**6.2 – Aplicações sobre TDU**

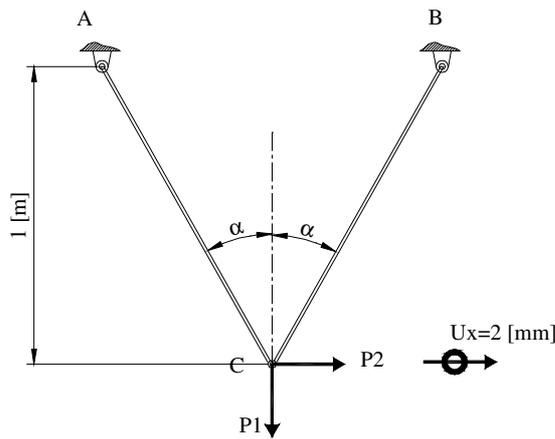
1- Consideremos o sistema de n barras articuladas representado na figura. Designemos por  $\alpha_n$  o ângulo da barra n com a horizontal. Qual a configuração de equilíbrio do sistema quando ao ponto A é aplicada uma força P?



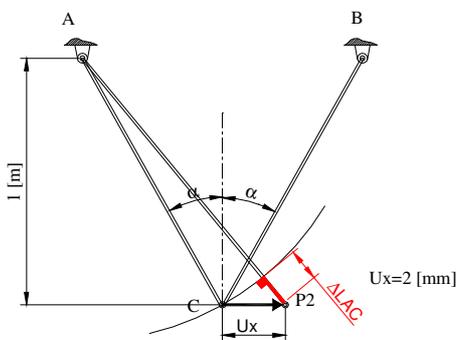
2 – Para a estrutura representada na figura seguinte, determine a força Q1 (vertical), associada a um deslocamento vertical q1 do ponto D da estrutura,  $\alpha = 45^\circ$ . Resolva o mesmo problema calculando agora uma força Q2 (horizontal), associada a um deslocamento horizontal q2 do ponto D.



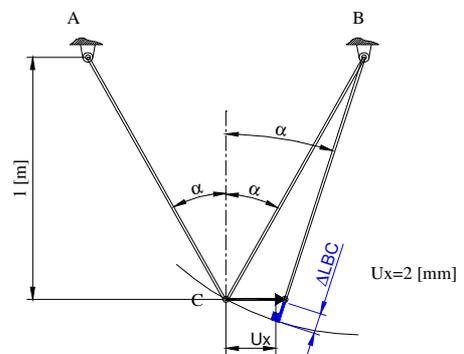
3 – Determine as forças P1 e P2 da estrutura articulada apresentada, sabendo que na situação de equilíbrio resulta um deslocamento horizontal  $U_x=2\text{mm}$ , para  $\alpha=30^\circ$ . Considere  $E=200\text{GPa}$  e o diâmetro da barra igual a 10 mm.



Considerando o sistema real de carregamento, determina-se o campo de tensões real associado. Para calcular as tensões reais será necessário determinar as deformações reais.



a) Extensão da barra AC.



b) Contração da barra BC.

Aos valores correspondentes ao aumento e diminuição de comprimento real, estão associados os valores das deformações que originam:

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\Delta L_{AC}}{L_{AC}} = \frac{Ux \cdot \cos(60)}{\frac{1}{\cos(30)}} = Ux \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sigma_{AC} = E\varepsilon_{AC} = EUx \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\Delta L_{BC}}{L_{BC}} = \frac{-Ux \cdot \sin(30)}{\frac{1}{\cos(30)}} = -Ux \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sigma_{BC} = E\varepsilon_{BC} = -EUx \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Considerando o sistema virtual de deslocamento, determina-se o campo de deformações associado.

$$\varepsilon_{AC}^* = \frac{\Delta L_{AC}}{L_{AC}} = \frac{1 \cdot \cos(60)}{\frac{1}{\cos(30)}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\varepsilon_C^* = \frac{\Delta L_C}{L_C} = \frac{-1 \cdot \sin(30)}{\frac{1}{\cos(30)}} = -1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Por aplicação do teorema do deslocamento unitário:

$$F d^* = \int_v \langle \sigma \rangle \{ \varepsilon^* \} dv \Leftrightarrow F \cdot 1 = \int_L A \langle \sigma_{AC} \rangle \{ \varepsilon_{AC}^* \} dx + \int_L A \langle \sigma_{BC} \rangle \{ \varepsilon_{BC}^* \} dx$$

$$P2 = EUx \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \left( A \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + (-EUx) \frac{\sqrt{3}}{4} \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \left( A \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

$$P2 = EUxA \frac{12}{16\sqrt{3}}$$

$$P2 = 13,6 \text{ [kN]}$$

4 – Relativamente ao problema 3 verifique as tensões máximas obtidas nas barras AC e CB, sabendo que as mesmas são construídas em aço S235. Qual o nível de segurança imposto.

5 – Refaça o problema 3 e 4 impondo agora um deslocamento vertical  $U_y = 2 \text{ cm}$ .

### 7 - TEOREMA DO TRABALHO VIRTUAL COMPLEMENTAR

Se a um corpo C em equilíbrio sob a acção de um sistema de forças  $Q_i$  for aplicado um sistema de forças virtuais  $\delta Q_i$ , o trabalho virtual complementar  $\delta W_E^*$  produzido pelas forças  $\delta Q_i$  será igual à variação da energia de deformação complementar  $\delta U^*$  e podemos escrever:

$$\delta W^* = \delta U^*$$

$$\sum_i^n \delta Q_i q_i = \int \delta \sigma \epsilon dV \tag{eq. 90}$$

O Teorema do Trabalho Virtual Complementar (TTVC), tal como o Teorema dos Trabalhos Virtuais (TTV), pode ser utilizado na determinação da configuração de equilíbrio de uma estrutura sob a acção de um sistema de forças. Consideremos por exemplo a viga simplesmente apoiada da figura seguinte sob a acção de um conjunto de forças  $Q_i$  ( $i=[1, 4]$ ) e represente-se por  $d_i$  o deslocamento do ponto de aplicação das cargas na direcção e sentido destas.

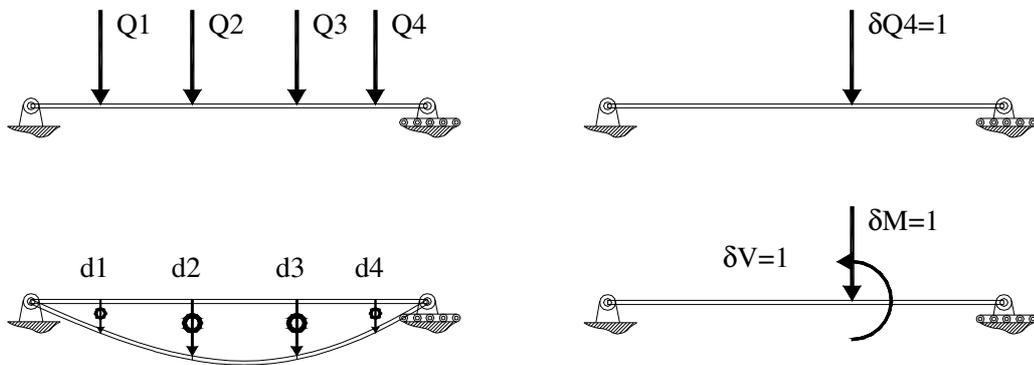


Fig. 92 – Teorema da carga unitária.

Se aplicarmos uma carga virtual unitária  $\delta Q_4=1$  na direcção e sentido de  $d_4$ , de acordo com o TTVC pode-se escrever:

$$1 \times d_4 = \int_v \delta \sigma \epsilon_y dV \tag{eq. 91}$$

em que  $\delta\sigma$  é a variação de tensões associada à carga virtual  $\delta Q_4=1$  e o 2º membro representa a variação correspondente, da energia complementar de deformação.

### 7.1 - Teorema da carga virtual unitária

A equação anterior representa o enunciado do teorema da carga unitária. “Num corpo deformável o deslocamento de um ponto P na direcção  $d_j$  é dado pela variação da energia complementar de deformação associada à aplicação de uma carga virtual  $\delta Q_j$  constituída pela solitação unitária de  $d_j$ ”.

A solitação unitária correspondente ao deslocamento  $d_j$  é uma carga unitária aplicada na direcção e sentido de  $d_j$ . Na figura anterior está indicada a solitação unitária de  $d_4$ ,  $\delta Q_4=1$ . De igual modo estão indicadas as solitações unitárias  $\delta V=1$  e  $\delta M=1$ , que são respectivamente as solitações unitárias do deslocamento vertical e da rotação da secção da viga. Isto é, a solitação unitária de um deslocamento linear é uma força e a solitação unitária de uma rotação deverá ser um momento.

A imposição de uma força generalizada virtual na direcção de um deslocamento generalizado, implica a utilização de um sistema real e outro virtual. Por aplicação do princípio dos trabalhos virtuais ao sistema virtual, escolhendo um campo de deslocamento e deformação real que verifique as condições cinemáticas do problema, permite escrever a equação já conhecida e que obriga determinar o produto das tensões virtuais pelas deformações reais. Assim, para cada tipo de esforço interno podem-se definir:

ESFORÇO	TENSÃO VIRTUAL	DEFORMAÇÃO REAL
Normal	$\sigma^* = N^*/A$	$\varepsilon = N/EA$
Flector	$\sigma^* = M^*y/I_{zz}$	$\varepsilon = My/EI_{zz}$
Transverso	$\tau^* \approx V/Ar$	$\gamma \approx V/GAr$
Torsor	$\tau^* = Mt^*r/I_p$	$\gamma = Mt^*r/GI_p$
Aquecimento uniforme	$\sigma^* = N^*/A$	$\varepsilon = \alpha \Delta T$
Aquecimento diferencial	$\sigma^* = N^*/A + M^*y/I_{zz}$	$\varepsilon = \alpha/2 (\Delta T_i - \Delta T_s) + \alpha/h (\Delta T_i - \Delta T_s)y$

A equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma genérica:

$$1 \times d = \int_L \frac{NN^*}{EA} dx + \int_L \frac{MM^*}{EI} dx + \int_L \frac{VV^*}{GAr} dx + \int_L \frac{Mt Mt^*}{GI_p} dx + \int_L N^* \alpha \Delta T dx + \int_L N^* \frac{\alpha}{2} (\Delta T_i - \Delta T_s) dx + \frac{M^* \alpha}{I_{zz} h} (\Delta T_i - \Delta T_s) dx \quad (\text{eq. 92})$$

### 7.1.1 – Aplicação a estruturas articuladas

O Teorema da Carga Unitária é particularmente útil no cálculo de deslocamentos em estruturas articuladas. Dado que neste caso as barras estão sujeitas só a esforços normais, constantes ao longo do comprimento de cada barra, a equação pode ser reescrita sob a forma:

$$d_j = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{N}_{ij} N_i}{E_i A_i} L_i \quad (\text{eq. 93})$$

em que  $m$  representa o número total de barras na estrutura,  $N_i$  o esforço na barra  $i$  devido às cargas reais,  $\bar{N}_{ij}$  o esforço na barra  $i$  devido à carga unitária aplicada segundo a direcção de  $d_j$ .  $A_i$ ,  $L_i$  e  $E_i$  representam, respectivamente, a área da secção recta, o comprimento e o Módulo de elasticidade da barra  $i$ .

Para a barra  $i$ , o alongamento  $\Delta L_i$  provocado pelas cargas reais será dado por  $\Delta L_i = N_i L_i / (E_i A_i)$ . A equação anterior pode então tomar a seguinte forma:

$$d_j = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{N}_{ij} N_i}{E_i A_i} L_i = \sum_{i=1}^m \bar{N}_{ij} \left( \frac{\Delta L_i A_i E_i}{L_i} \right) L_i = \sum_{i=1}^m \bar{N}_{ij} \Delta L_i \quad (\text{eq. 94})$$

Esta equação pode igualmente ser utilizada para o cálculo de deslocamentos devidos a variações de temperatura. Para a barra  $i$  o alongamento ou extensão produzido por uma variação de temperatura  $T$  será dado por:

$$\Delta L_i = \alpha_i \times \Delta T \times L_i \quad (\text{eq. 95})$$

em que  $\alpha_i$  representa o coeficiente de expansão térmica do material.

Na presença de assentamentos, conforme se representa na figura seguinte, o cálculo de deslocamentos efectua-se conforme a equação 90. O efeito do aumento da temperatura também foi considerado.

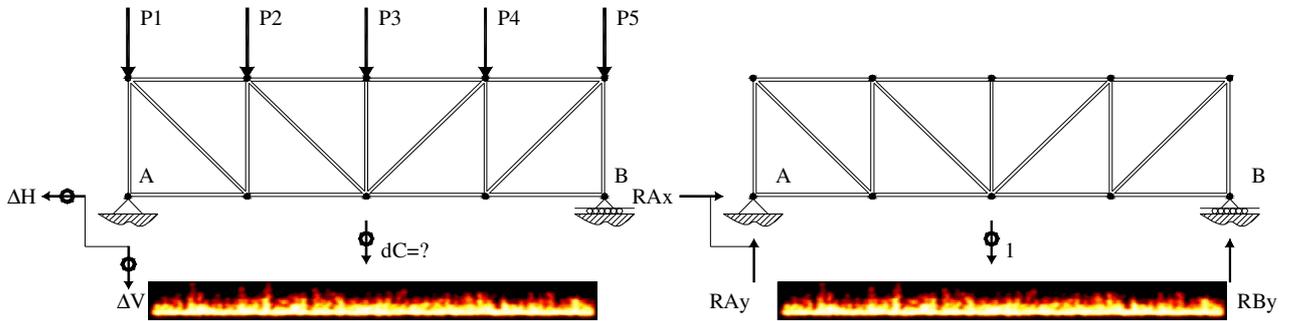


Fig. 93 – Estrutura sujeita a um assentamento e a uma variação de temperatura uniforme.

Utilizando o teorema da carga unitária, obtém-se:

$$-\Delta h R_{Ax} - \Delta v R_{Ay} + 1x_{dc} = \sum \frac{\bar{N}_i N_i L_i}{A_i E_i} + \sum \bar{N}_i \alpha \Delta T L_i \tag{eq. 96}$$

### 7.1.2 – Aplicação a estruturas contínuas

No caso de se utilizarem elementos como os que se representam na figura seguinte, os esforços internos podem ser variados. Assim as próximas equações, resultantes da aplicação do TFV, dando genericamente o efeito combinado desses esforços para cálculo de deslocamentos.

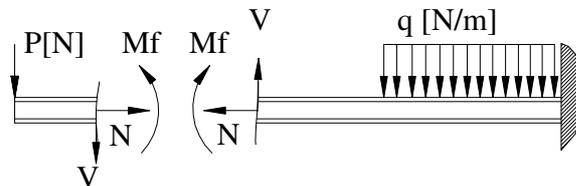


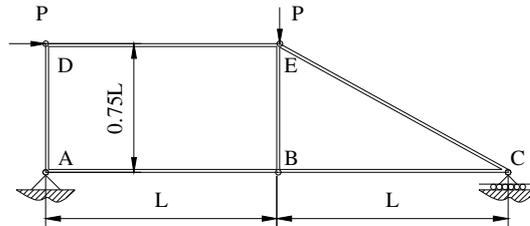
Fig. 94 – Sistemas contínuos.

$$1x_{di} = \int \delta \sigma \epsilon dV = \int \left( \frac{M y}{I} \right) \left( \frac{\sigma}{E} \right) A dl = \int \frac{M \bar{M}}{IE} dl \tag{eq. 97}$$

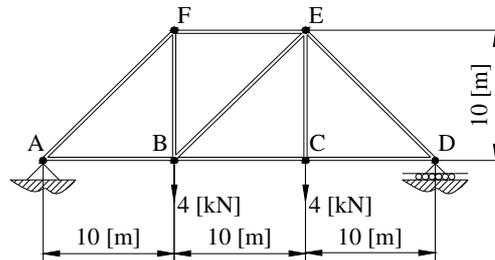
$$\sum P_i d_i = \int \frac{N \bar{N}}{EA} dl + \int \frac{M \bar{M}}{EI} dl + \int \frac{V \bar{V}}{GA_s} dl + \int \frac{M_t \bar{M}_t}{GI_p} dl + \int \bar{N} \alpha \Delta T dl \tag{eq. 98}$$

**7.2 – Exercícios de aplicação**

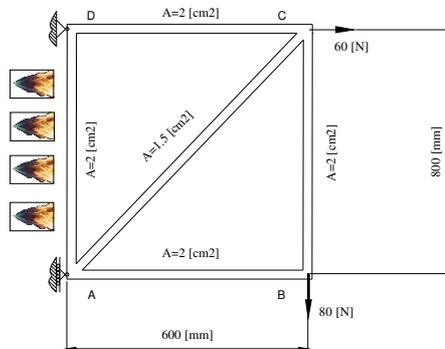
1 - A estrutura articulada, representada na figura seguinte, está carregada conforme se indica. Determine o deslocamento horizontal D1 do nó C.



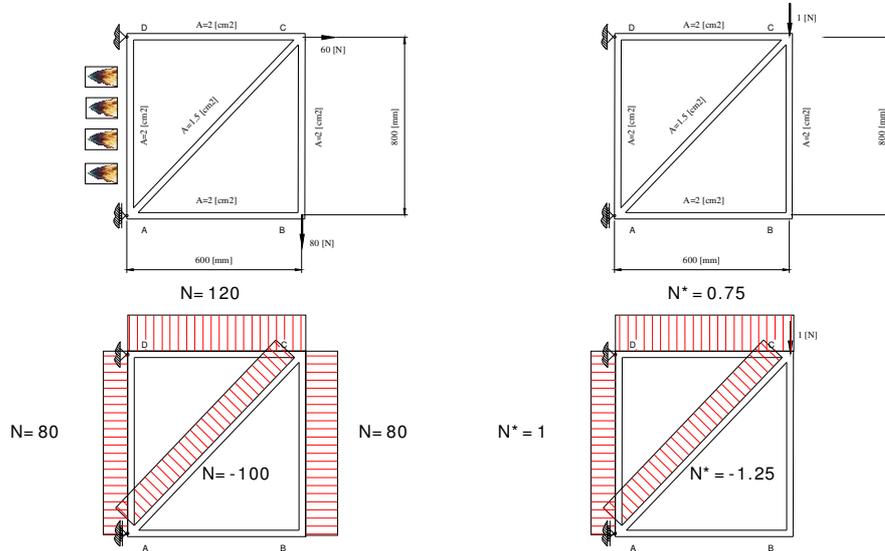
2 – Determine o deslocamento vertical em C da estrutura articulada em aço. A secção recta de cada elemento estrutural é  $A=0,5\text{m}^2$  e  $E=29 \times 10^3 \text{ KPa}$ .



3 – Determine o deslocamento vertical em C, durante um aquecimento da barra AD, sujeita a uma variação de temperatura de  $120^\circ\text{C}$ . O coeficiente de expansão térmica é de  $0,6 \times 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$  e  $E=29000 \text{ KN/m}^2$ .



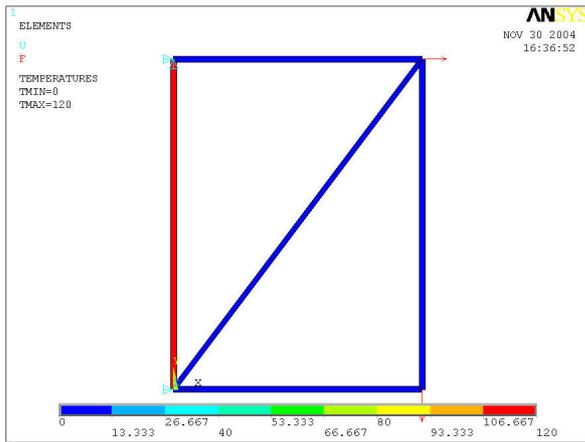
A aplicação do teorema da carga unitária implica a escolha de um sistema auxiliar. Na figura seguinte é apresentado o diagrama de esforços flectores para o sistema real de carregamento e para o sistema virtual.



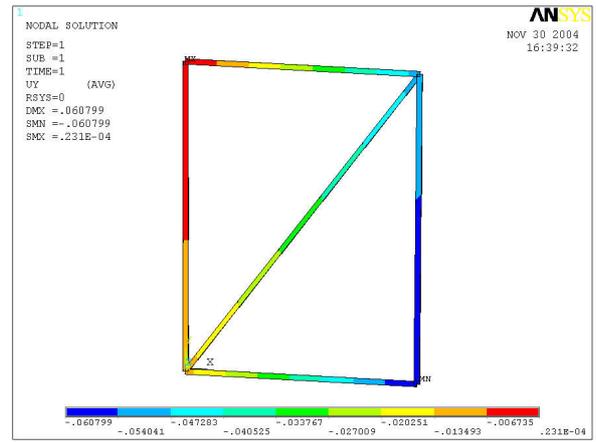
A aplicação da carga unitária na direcção pretendida para o cálculo do deslocamento, dá origem à seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 1.d_C &= \int_{vol} \langle \sigma \rangle \{ \epsilon \} dV \\
 &= \int_{L_{AC}} \frac{N_{AC} N_{AC}^*}{EA_{AC}} dx + \int_{L_{AD}} \frac{N_{AD} N_{AD}^*}{EA_{AD}} dx + \int_{L_{DC}} \frac{N_{DC} N_{DC}^*}{EA_{DC}} dx + \int_{L_{AD}} N_{AD}^* \alpha \Delta T dx \\
 &= \frac{1}{EA_{AC}} [(-100)(-1.25)l] + \frac{1}{EA_{AD}} [(80)(1)0.8] + \frac{1}{EA_{DC}} [(120)(0.75)0.6] + 1 \times \alpha \times 120 \times 0.8 \\
 &= 0.04908 + 0.000576 \\
 &= 0.049656 [m]
 \end{aligned}$$

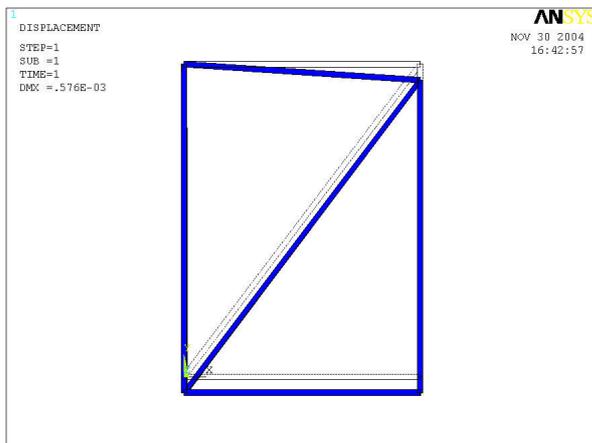
Para comprovação e comparação, é apresentada a solução numérica do problema. Foi utilizado o programa ANSYS, com o elemento de barra LINK.



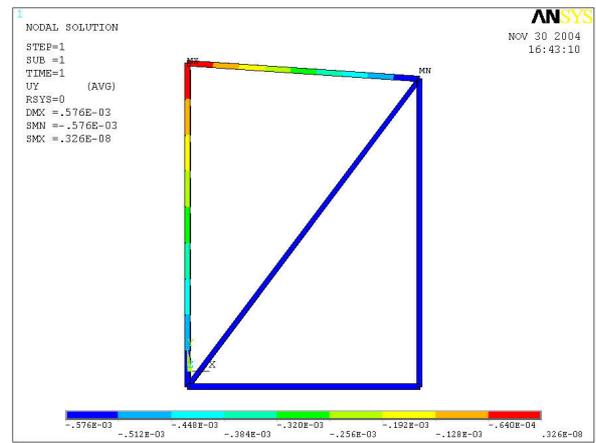
a) Carregamento térmico.



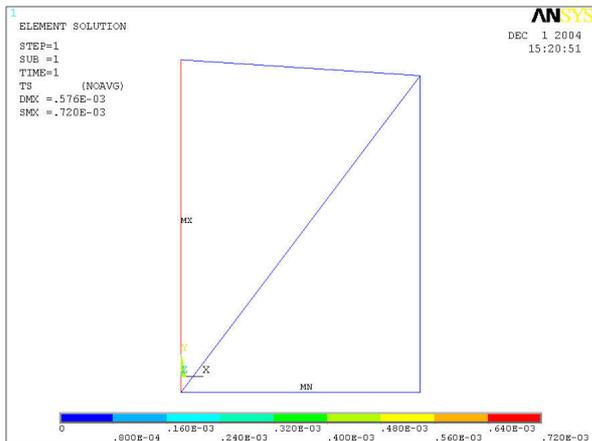
b) Deslocamento total(térmico + mecânico) na direção Y.



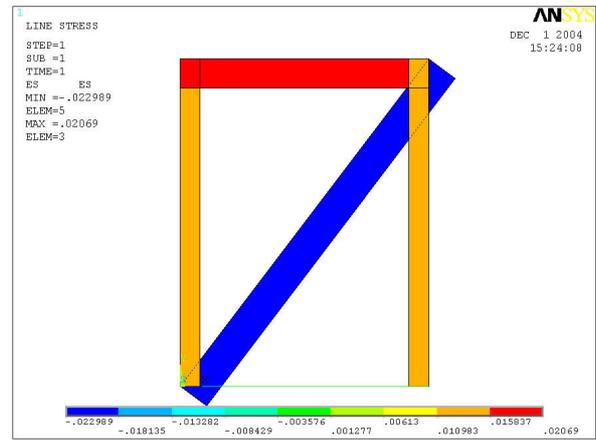
c) Deformada térmica.



d) Deslocamento térmico na direção Y.

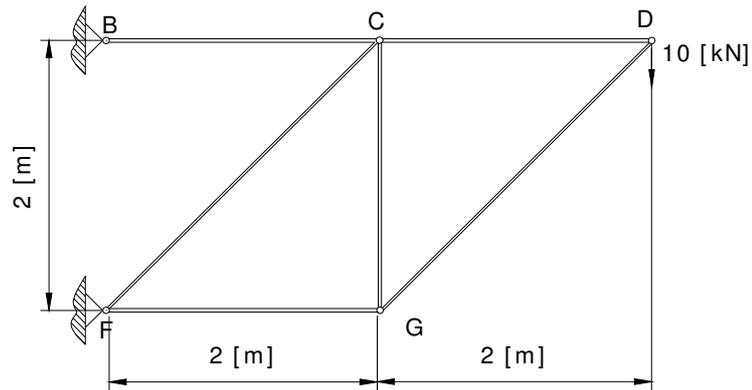


e) Deformação térmica.



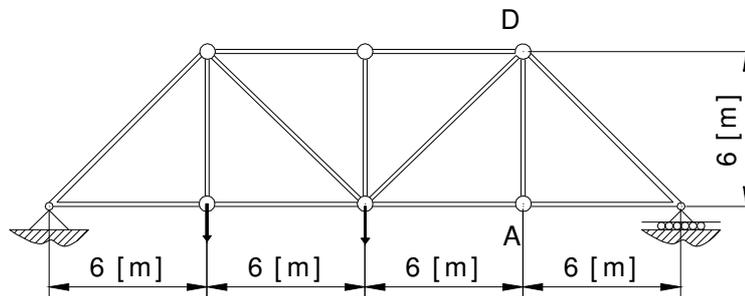
f) Deformação elástica mecânica.

4 – Calcule o deslocamento vertical e horizontal do nó D da estrutura plana articulada representada. As barras à tracção têm uma área de  $890\text{mm}^2$  e as que trabalham à compressão  $1100\text{mm}^2$ .  $E=2,07 \times 10^5$  MPa.

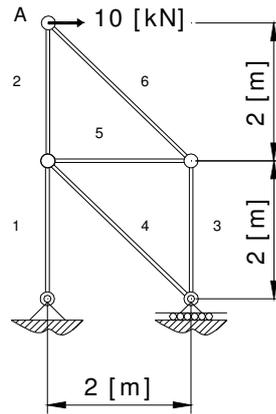


5 - Considere a estrutura articulada, em que as propriedades mecânicas das barras são iguais a  $EA/L = \text{const} = 10^6 \text{ KN/m}$ . Calcule:

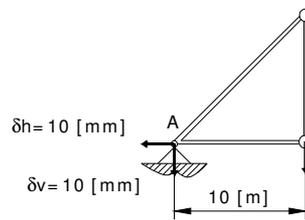
- a) o deslocamento vertical no nó A
- b) o deslocamento horizontal do nó A
- c) a rotação da barra AD



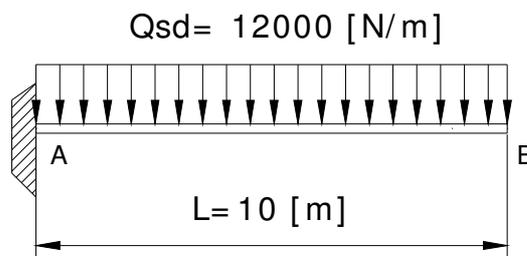
6 – Calcule o deslocamento horizontal e vertical do nó A da estrutura plana articulada, admita que todas as barras sofrem um aumento de temperatura de  $10^\circ\text{C}$  e que o coeficiente de dilatação térmica vale  $10^{-5}/^\circ\text{C}$ . Sabe-se que:  $A_1=A_2=A_5=0.89 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ;  $A_3=A_4=A_6=1.1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ;  $E=2.07 \times 10^5 \text{ MPa}$ .



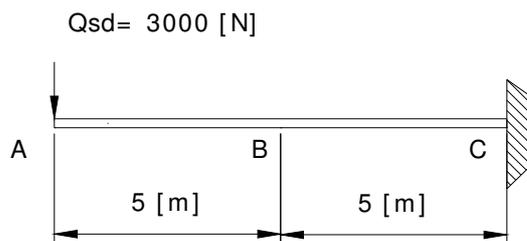
7 – Refaça o problema 2 impondo a existência de assentamentos no apoio A.



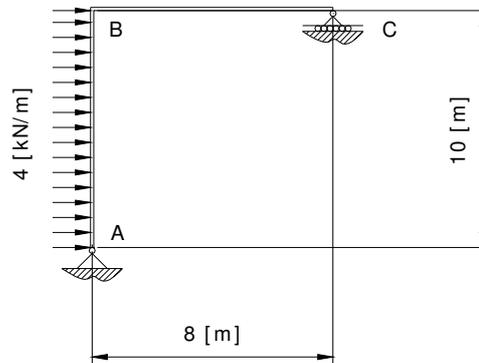
8 – Determine o deslocamento em B da viga em aço.  $E=200\text{GPa}$ ,  $I=500 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



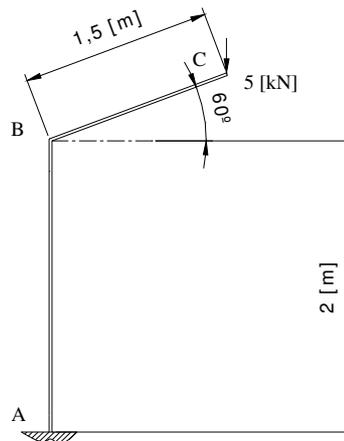
9 – Determine a rotação do ponto B da viga em aço.  $E=200\text{Gpa}$ ,  $I=60 \times 10^6 \text{ mm}^4$



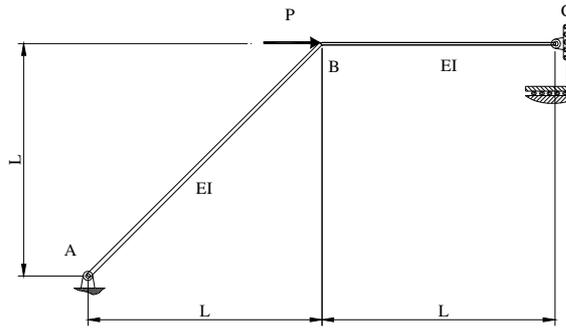
10 – Determine o deslocamento horizontal do ponto C do pórtico apresentado.  $E = 29 \times 10^3$  KN/cm<sup>2</sup>,  $I = 60000$  cm<sup>4</sup>,  $G = 12 \times 10^3$  KN/cm<sup>2</sup>,  $A = 80$  cm<sup>2</sup>



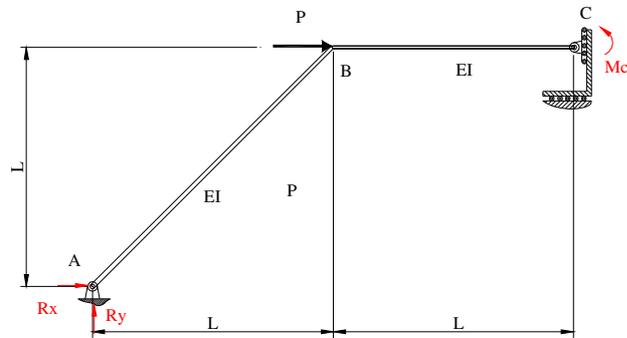
11 – Determine a rotação no ponto C da estrutura apresentada.  $E = 200$  Gpa,  $I = 15 \times 10^6$  mm<sup>4</sup>.



12 – Para a estrutura apresentada na figura seguinte, determine o deslocamento transversal em C utilizando o teorema da carga unitária. Considere ainda as propriedades do material e da secção com valores genéricos:  $E$ ,  $I$ ,  $N$ ,  $A_r$ ,  $A$ .



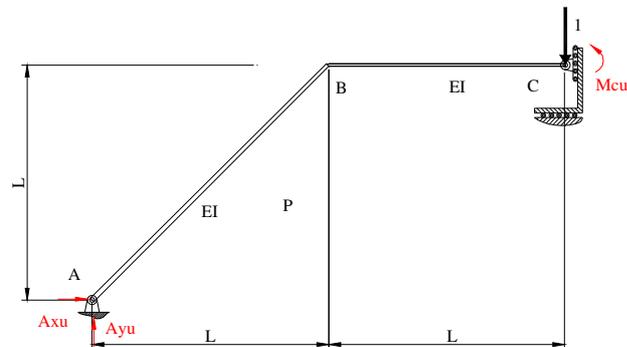
A resolução deste problema foi feita recorrendo a um manipulador simbólico (Maple 9). Primeiro foi feita a caracterização dos esforços internos no sistema real:



```

solve({RX+F=0, RY=0, F*L+MC=0}, {RX,RY,MC});
MAB:=F*sqrt(2)/2*x;
VAB:=-F*sqrt(2)/2;
MBC:=F*L;
VBC:=0;
E:=E;
IZZ:=IZZ;
    
```

De seguida foi efectuada a caracterização do sistema virtual de carga unitária:



```

solve({AXU=0, AYU=1, -1*2*L+MCU=0}, {AXU,AYU,MCU});
MABU:=sqrt(2)/2*x;
    
```



$$\delta U = \int \frac{N \bar{N}}{EA} dl \quad (\text{eq. 100})$$

Considerando sucessivamente todas as componentes dos esforços, o cálculo do trabalho virtual de deformação é dado, no caso geral de solitação, por:

$$\delta U = \int \frac{N \bar{N}}{EA} dl + \int \frac{M \bar{M}}{EI} dl + \int \frac{V \bar{V}}{GA_s} dl + \int \frac{Mt \bar{Mt}}{GI_p} dl \quad (\text{eq. 101})$$

em que  $\bar{N}dl/EA$  representa a componente axial da deformação virtual no segmento  $dl$  e  $N$  o esforço normal associado à posição de equilíbrio ( $P1, d1$ ).

De modo análogo, a variação da energia complementar de deformação  $\delta U^*$ , associada a uma carga virtual  $\delta P$  será representada pela área BCHG. Temos portanto  $\delta U = \delta P \times d1$ . Isto é, será o produto (carga virtual x deslocamento real). No caso geral, considerando a contribuição de todos os esforços internos, podemos escrever:

$$\delta U^* = \int \frac{N \bar{N}}{EA} dl + \int \frac{M \bar{M}}{EI} dl + \int \frac{V \bar{V}}{GA_s} dl + \int \frac{Mt \bar{Mt}}{GI_p} dl \quad (\text{eq. 102})$$

em que  $N$  será o esforço normal associado à carga virtual  $P$  e  $Ndl/EA$  o deslocamento devido às cargas reais, etc.

Considerando sucessivamente como deslocamento virtual o deslocamento unitário ou, como carga a carga unitária, temos respectivamente para expressão, do teorema do deslocamento unitário e do teorema da carga unitária:

$$Q_j = \int \frac{N \bar{N}}{EA} dl + \int \frac{M \bar{M}}{EI} dl + \int \frac{V \bar{V}}{GA_s} dl + \int \frac{Mt \bar{Mt}}{GI_p} dl \quad (\text{eq. 103})$$

e

$$dj = \int \frac{N \bar{N}}{EA} dl + \int \frac{M \bar{M}}{EI} dl + \int \frac{V \bar{V}}{GA_s} dl + \int \frac{Mt \bar{Mt}}{GI_p} dl \quad (\text{eq. 104})$$

O segundo membro das expressões originais pode ser calculado de forma expedita através dos diagramas de esforços. Por um lado os diagramas correspondentes as cargas reais N, M, V e Mt e os diagramas correspondentes a sollicitação unitária (carga ou deslocamento) – N, M, V e Mt.

**8.1 - Método de Bonfim Barreiros**

Um método expedito para o calculo de integrais, em que a função integranda é do tipo  $M\bar{M}/EI$  para o caso de estruturas reticuladas, foi apresentado por um engenheiro português (Bonfim Barreiros). Na prática um dos diagramas definidores da função integranda deverá apresentar uma variação linear ao longo de todo, ou de parte do comprimento do elemento em causa.

No caso de se pretender determinar o deslocamento vertical ds da secção s, a meio vão da viga CD da estrutura representada na figura seguinte, por aplicação do teorema da carga unitária, podemos escrever:

$$ds = \int \frac{N \bar{N}}{EA} dl + \int \frac{M \bar{M}}{EI} + \dots \tag{eq. 105}$$

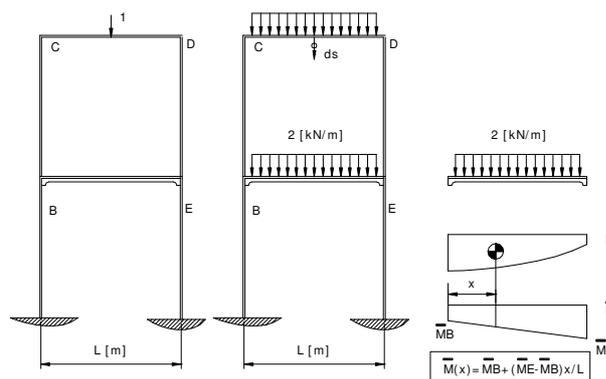


Fig. 96 – Exemplo de aplicação do método Bonfim Barreiros.

Para verificar a contribuição do integral  $M\bar{M}/EI$  referente ao elemento BE, viga de secção recta variável, representam-se os diagramas M/EI referentes ao diagrama de momentos provocado

pelas cargas reais e o diagrama de momentos  $\bar{M}$  devido à carga unitária  $\delta Q_s = 1$ . Podemos então escrever:



Se atendermos a que a área do diagrama  $M/EI$  pode ser calculada através do valor do integral representado na equação (101) e que o valor do momento estático do diagrama  $M/EI$  em relação ao eixo que contém o ponto B é determinado pelo valor do integral da equação (102).

$$\int_{BE} M/EI dx = \Omega_M \quad (\text{eq. 106})$$

$$\int_{BE} (M/EI) \bar{x} dx = \Omega_M \bar{X} \quad (\text{eq. 107})$$

Então, pode-se escrever o integral em análise da seguinte forma.

$$\int_{BE} \frac{M \bar{M}}{L} dl = \bar{M} b \Omega_M + \left( \frac{\bar{M} E - \bar{M} B}{L} \right) \bar{X} \Omega_M = \Omega_M \left[ \bar{M} B + (\bar{M} E - \bar{M} B) \frac{\bar{X}}{L} \right] \quad (\text{eq. 108})$$

em que o termo entre parêntesis recto é a ordenada do diagrama de momentos  $\bar{M}$  para a secção que contém o centroide do diagrama  $M/EI$  (abscissa  $\bar{x}$ ).

É possível concluir que o integral em análise pode ser determinado pela equação seguinte:

$$\int \frac{M \bar{M}}{EI} dx = \Omega_M \bar{M}(\bar{x}) \quad (\text{eq. 109})$$

Os restantes integrais que ajudam na determinação do deslocamento pretendido também poderão ser aproximados por métodos de cálculo semelhantes, ver equação que se segue.

$$\int \frac{V \bar{V}}{GA_R} dx = \Omega_V \bar{V}(\bar{x}) \quad \int \frac{N \bar{N}}{EA} dx = \Omega_N \bar{N}(\bar{x}) \quad \int \frac{M_t \bar{M}_t}{GI_p} dx = \Omega_{M_t} \bar{M}_t(\bar{x}) \quad (\text{eq. 110})$$

$\Omega M$ ,  $\Omega V$ ,  $\Omega N$  e  $\Omega Mt$  são as áreas dos diagramas  $M/EI$ ,  $V/GAr$ ,  $N/EA$ ,  $Mt/GIp$ , enquanto que  $\bar{M}(\bar{x})$ ,  $\bar{V}(\bar{x})$ ,  $\bar{N}(\bar{x})$ ,  $\bar{M}_l(\bar{x})$  representam os valores dos diagramas  $M$ ,  $V$ ,  $N$  e  $Mt$  para a secção correspondente ao centróide das áreas.

Até agora foi considerado que o diagrama dos esforços unitários, por exemplo  $M$ , deverá apresentar uma variação linear ao longo de todo o comprimento da barra em questão. Caso não se verifique, deverá optar-se por subdividir o elemento em troços, em que a variação dos diagramas unitários seja linear.

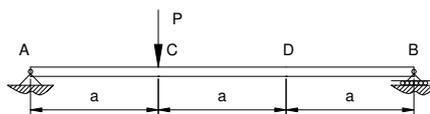
O cálculo do segundo membro das expressões é feito, na prática, recorrendo a tabelas como se apresenta de seguida, na qual estão representadas diversas combinações de carregamento.

**Tabela 30 – Resultados da aplicação do método BB para aplicação a integrais que resultam dos teoremas CU.**

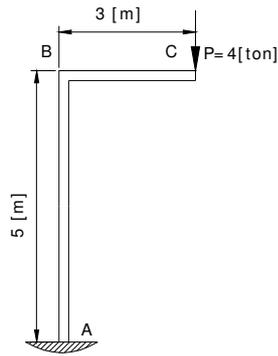
$Mu$						
$M$		$abL$	$1/2 abL$	$1/2 abL$	$aL/2(b1 + b2)$	$1/2 abL$
	$bL/2(a1 + a2)$	$bL/6(a1 + 2a2)$	$bL/6(2a1 + a2)$	$L/6(2a1b1 + a1b2) + L/6(2a2b2 + a2b1)$	$bL/6 \left[ \frac{(1 + \beta)a1 + (1 + \alpha)a2}{(1 + \alpha)a2} \right]$	
	$1/2 abL$	$abL/6(1 + \alpha)$	$abL/6(1 + \beta)$	$aL/6 \left[ \frac{(1 + \beta)b1 + (1 + \alpha)b2}{(1 + \alpha)b2} \right]$	$1/3 abL$	
	$2/3 abL$	$1/3 abL$	$1/3 abL$	$aL/3(b1 + b2)$	$abL/3(1 + \alpha\beta)$	
	$1/3 abL$	$1/4 abL$	$1/12 abL$	$aL/12(b1 + 3b2)$	$abL/12(1 + \alpha + \alpha^2)$	
	$2/3 abL$	$5/12 abL$	$1/4 abL$	$aL/12(3b1 + 5b2)$	$abL/12(5 - \beta - \beta^2)$	

### 8.2 - Aplicações

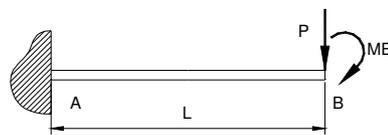
1 - Para a viga da figura determine a flecha nas secções C e D pelo método da carga unitária.



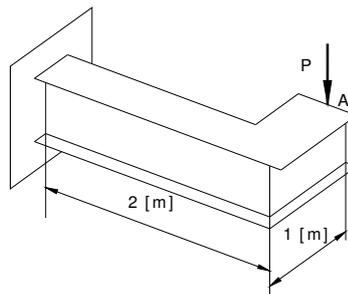
2 – Determine o deslocamento vertical do ponto C, da estrutura representada, em que as barras AB e BC são constituídas por perfis IPE 360.



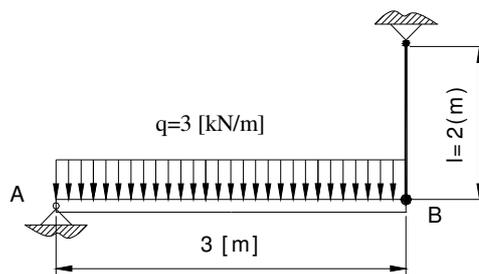
3 – Para a viga apresentada determine a flecha e a rotação em B, usando o teorema da carga unitária.



4- A estrutura apresentada é fabricada em IPE 200. Determine o deslocamento vertical em A.



5 – Determine a flecha a meio vão e o deslocamento do ponto B. CB é um cabo em aço com 20 mm de diâmetro.  $E=200\text{Gpa}$ ,  $I=1,71 \times 10^6 \text{mm}^4$ .



### 9 - TEOREMA DA ENERGIA POTENCIAL MÍNIMA

O trabalho virtual das “forças internas”  $\sigma_{ij}$  associado a uma deformação virtual  $\delta\epsilon_{ij}$  é uma variação da energia de deformação resultante de uma variação no campo de deslocamentos.

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{eq. 111})$$

O trabalho virtual das forças exteriores,  $\delta W_E$  pode ser o trabalho executado pelas forças de superfície  $T_i$  e de volume  $f_i$ , durante a variação  $\delta u_i$  do campo de deslocamentos.

$$\delta W_E = \int_T T_i \delta u_i dT + \int_\Omega f_i \delta u_i d\Omega \quad (\text{eq. 112})$$

em que  $T$  representa a fronteira onde actuam as forças de superfície e  $\Omega$  o volume do corpo sólido.

Para a maioria das forças exteriores é possível definir uma função potencial cuja derivada em ordem às componentes de deslocamento define as componentes da força exterior. Se a função potencial das forças exteriores existir, o trabalho virtual das forças exteriores pode rescrever-se:

$$\delta W_E = \int - \frac{\partial G}{\partial U_i} \delta u_i dS + \int_\Omega - \frac{\partial g}{\partial U_i} \delta u_i d\Omega \quad (\text{eq. 113})$$

pelo que:

$$\delta W_E = -\delta V_E \quad (\text{eq. 114})$$

em que  $V_E$  representa o potencial das forças exteriores, determinadas por:

$$V_E = \int_T G dT + \int_\Omega g d\Omega \quad (\text{eq. 115})$$

Quando as forças de superfície e de volume são só função da posição do corpo, i.e., independentes da deformação estamos na presença de um sistema de forças conservativo. Neste caso podemos escrever:

$$\begin{aligned} G &= - T u_i \\ g &= - f_i u_i \end{aligned} \quad (\text{eq. 116})$$

O potencial das forças exteriores será então dado por:

$$V_E = -\int_T T_i u_i dT - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega \quad (\text{eq. 117})$$

Numa estrutura é possível definir a energia de deformação  $U$  e o potencial das forças exteriores  $V_E$ , sendo que o teorema dos trabalhos virtuais pode ser escrito sob a forma:

$$\delta U - \delta W_E = \delta(U + V_E) = 0 \quad (\text{eq. 118})$$

ou, de outra forma:

$$\delta \Pi = 0 \quad (\text{eq. 119})$$

em que  $\Pi = U + V_E$  representa a energia potencial total da estrutura.

A expressão anterior traduz o enunciado do principio da energia potencial mínima, em que para todas as configurações possíveis, isto é, compatíveis com as condições fronteira do sistema, a configuração de equilíbrio é aquela à qual corresponde a energia potencial mínima da estrutura.

No caso de estruturas lineares isotrópicas sob a acção de um conjunto discreto de forças  $Q_i$ , o potencial das forças exteriores  $V_E$  é dado por:

$$V_E = -\sum_{i=1}^n Q_i q_i \quad (\text{eq. 120})$$

Ao calcularmos variações desta expressão, devemos ter em consideração que são as coordenadas generalizadas  $q_i$  que variam, uma vez que as forças generalizadas  $Q_i$  devem ser tratadas como constantes.

## 9.1 - Teorema de Castigliano

Este teorema resulta directamente do teorema dos trabalhos virtuais e tem uma grande aplicação em mecânica estrutural, principalmente no cálculo de deslocamentos. A figura que se segue representa um corpo elástico submetido a um conjunto de forças  $P_i$  estaticamente independentes.

Seja  $U = f(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n, R)$ . Se for dado um acréscimo  $dP_i$  a uma das cargas  $P_i$ , a energia elástica sofre um acréscimo  $dU$ .

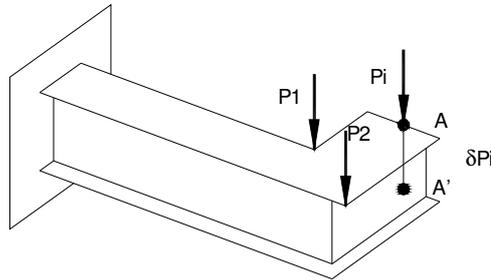


Fig. 97 – Modelo de carregamento generalizado independente.

A energia total passará a ser determinada pela expressão matemática:

$$U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i \quad (\text{eq. 121})$$

Esta energia não pode depender da ordem de aplicação das cargas, e portanto, pode aplicar-se primeiro a carga  $dP_i$  e só depois as cargas  $P_1, P_2$ . Assim:

$$U + dU = U + \delta_i dP_i \quad (\text{eq. 122})$$

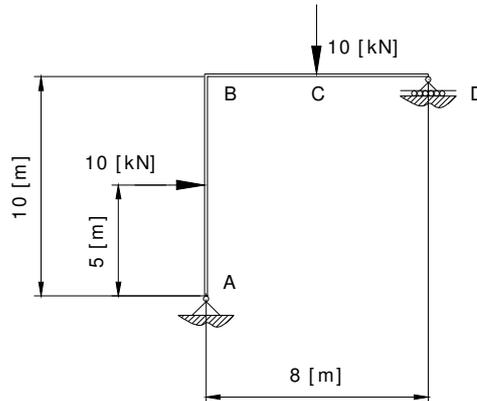
Combinando as equações anteriores, resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i \quad (\text{eq. 123})$$

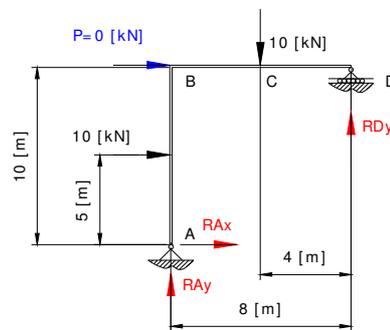
O deslocamento de um ponto  $i$  dum corpo elástico na direcção duma força  $P_i$ , corpo esse submetido a um sistema de forças estaticamente independentes  $P_1, P_2, \dots, P_i, P_n$ , é igual à derivada parcial da energia de deformação do corpo em ordem à carga  $P_i$ .

## 9.2 – Aplicações

1 – A figura seguinte representa uma estrutura plana contínua, constituída por perfis IPE500 em material S235 com um módulo de elasticidade igual a  $2.1 \times 10^{11}$ . Determine o valor do deslocamento horizontal do ponto B, utilizando o teorema de Castigliano e considerando apenas a contribuição do esforço interno momento flector.



A resolução obriga que se determinem as reacções e que se determine a variação dos esforços internos que se julguem convenientes.



Determinação das reacções:

$$R_{Ax} = -10000 - P[N]; R_{Ay} = 10000 - \frac{90000 + 10P}{8} [N]; R_{Dy} = \frac{90000 + 10P}{8} [N]$$

Determinação dos esforços internos:

Para secção 1:  $0 < x < 5[m]$   $M = (10000 + P) \times x [Nm] \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = x$

Para secção 2:  $5 < x < 10[m]$   $M = P \times x + 50000 [Nm] \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = x$

Para secção 3:  $0 < x < 4[m]$   $M = \left(\frac{90000 + 10P}{8}\right) \times x [Nm] \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{10}{8} x$

Para secção 4:  $4 < x < 8[m]$   $M = -10000 \times (x - 4) + \left(\frac{90000 + 10P}{8}\right) \times x [Nm] \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{10}{8} x$

Determinação do deslocamento, utilizando o teorema de Castigliano:

$$\delta_{HB} = \frac{\partial U}{\partial P} \Big|_{P=0}$$

$$\delta_{HB} = \int_0^{10} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int_0^8 \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$\delta_{HB} = \int_0^5 \frac{10000x^2}{EI} dx + \int_5^{10} \frac{50000x}{EI} dx + \int_0^4 \frac{90000x^2}{EI} \frac{10}{64} dx + \int_4^8 \frac{\left[-10000(x-4) + \frac{90000}{8}x\right]}{EI} \frac{10}{8} x dx$$

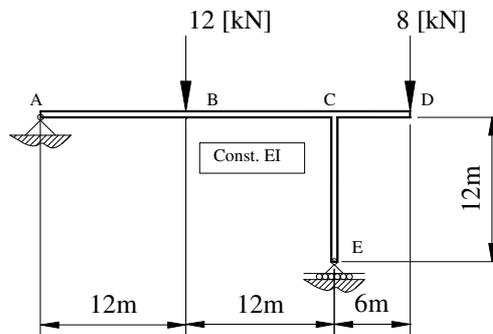
$$\delta_{HB} = .4116446025e-2 + .1852400712e-1 + .2963841139e-2 + .1416057433e-1$$

$$\delta_{HB} = .3976486862e-1 [m]$$

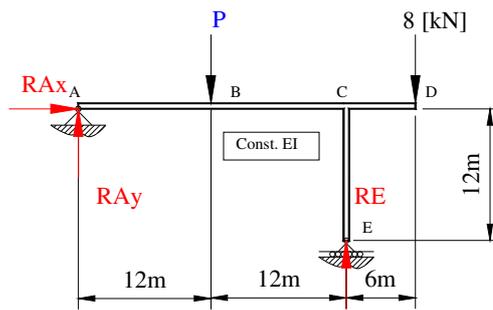
Resultados nodais, obtidos por elementos finitos, vem confirmar os valores determinados.

Node #	X Disp	Y Disp	Z Rotation
1	0	0	-0.0049051
2	0.0226621	2.58799e-006	-0.00378706
3	0.0360072	5.17598e-006	-0.00155099
4	0.0360072	-0.00274033	0.000148424
5	0.0360072	0	0.00095341

2 – Na figura que se segue está representada uma estrutura plana contínua, constituída por perfis IPE400 em material S235 com um módulo de elasticidade igual a  $2.1 \times 10^{11}$ . As características geométricas encontram-se em anexo. Determine o valor do deslocamento vertical do ponto B, utilizando o teorema de Castigliano e considerando apenas a contribuição do esforço interno momento flector.

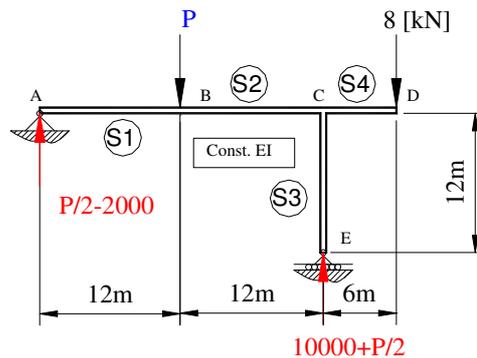


Determinação das reacções:



$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} RAx = 0 \\ RAy + RE - P - 8000 = 0 \\ -12P + 24RE - 30 \cdot 8000 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} RAy = -2000 + P/2 \\ RE = 10000 + P/2 \\ - \end{cases}$$

Determinação dos esforços internos:



Secção 1:  $0 < x < 12$ :  $M = \left(\frac{P}{2} - 2000\right)x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} \Big|_{P=12000} = \frac{x}{2}$

Secção 2:  $12 < x < 24$ :  $M = \left(\frac{P}{2} - 2000\right)x - P(x - 12) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} \Big|_{P=12000} = \frac{x}{2} - x = -\frac{x}{2}$

Secção 3:  $0 < x < 12$ :  $M = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} \Big|_{P=12000} = 0$

Secção 4:  $0 < x < 6$ :  $M = -8000x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} \Big|_{P=12000} = 0$

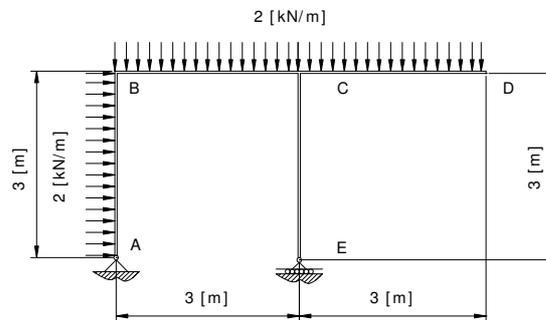
Por aplicação do teorema de castigliano:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} \Big|_P = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \Leftrightarrow$$

$$\delta = \int_0^{12} \left[ \left( \frac{P}{2} - 2000 \right) x \right] \left[ \frac{x}{2} \right] \frac{dx}{EI} + \int_{12}^{24} \left[ \left( \frac{P}{2} - 2000 \right) x - P(x-12) \right] \left[ \frac{-x}{2} \right] \frac{dx}{EI} \Leftrightarrow$$

$$\delta = 0.0355 [m]$$

3 – A figura 3 representa uma estrutura plana contínua, constituída por perfis IPE300 em material S355 com um módulo de elasticidade igual a  $2.1 \times 10^{11} [N/m^2]$ . Determine o valor do deslocamento vertical do ponto D, utilizando o teorema de Castigliano e considerando apenas a contribuição do esforço interno momento flector.



Determinação das reacções, em função da carga fictícia P:

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} R_{Ax} + 2000 \times 3 = 0 \\ R_{Ay} + R_{Ey} - 2000 \times 6 - P = 0 \\ -(2000 \times 3) \times 1.5 - (2000 \times 6) \times 3 - 6 \times P + 3 \times R_{Ey} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Ax} = -6000 \\ R_{Ay} = -3000 - P \\ R_{Ey} = 2P + 15000 \end{cases}$$

Determinação dos esforços internos, em função da carga fictícia P:

Secção S1:  $0 < x < 3$  – troço CD:

$$M_f = -Px - q \frac{x^2}{2} = -Px - 1000x^2 \Rightarrow \frac{\partial M_f}{\partial P} = -x$$

Secção S2:  $3 < x < 6$  – troço BC:

$$M_f = -Px - q \frac{x^2}{2} + R_{Ey}(x-3)$$

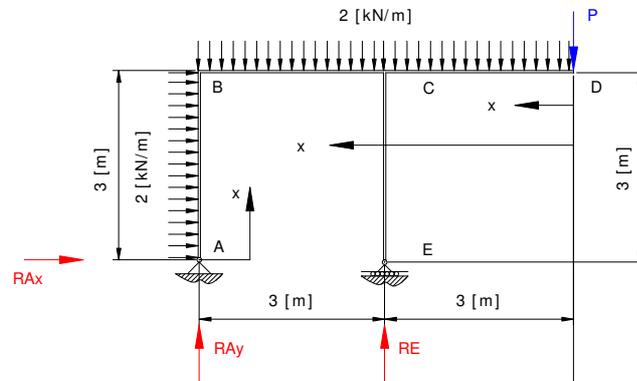
$$M_f = -Px - 1000x^2 + (2P + 15000)(x-3)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial P} = -x - 6$$

Secção S3:  $0 < x < 3$  – troço AB:

$$M_f = 6000 \times x - q \frac{x^2}{2} = 6000x - 1000x^2$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial P} = 0$$



Aplicação do teorema de Castigliano:

$$\delta_v = \left. \frac{\partial U}{\partial P} \right|_{P=0} \Leftrightarrow \delta_v = \int_L \left[ \frac{M_f}{EI} \frac{\partial M_f}{\partial P} \right]_{P=0} dL$$

Resultado:

$$\delta_v = \delta_{v1} + \delta_{v2} + \delta_{v3} = 0.001534 \quad [m]$$

$$\delta_{v1} = \frac{1000}{EI} \int_0^3 x^3 dx = 1.15 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{v2} = \frac{1}{EI} \int_3^6 [-1000x^2 + 15000(x-3)][x-6] dx$$

$$\delta_{v2} = 0.0003846$$

$$\delta_{v3} = 0$$

Este teorema decorre do teorema dos trabalhos virtuais e permite estabelecer uma correspondência entre dois sistemas de carga e de deslocamento. Considere-se a estrutura representada na figura seguinte, sob a acção de cargas  $P_i$  e  $Q_j$ , e represente-se por  $\delta_{ij}$  o deslocamento do ponto de aplicação da carga  $i$ , na direcção e sentido desta, devido à acção da carga  $j$  na estrutura.

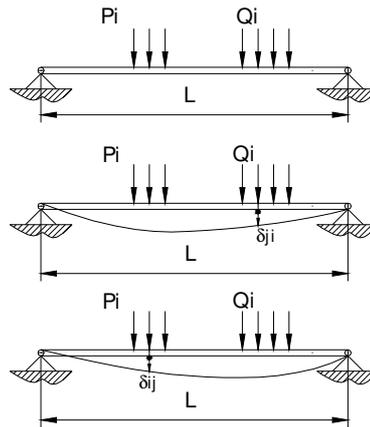


Fig. 98 – Deslocamento provocado por sistemas de carregamento diferentes.

A energia de deformação acumulada na estrutura quando esta é carregada só pelo sistema de forças  $P_i$  deverá ser calculado por:

$$\frac{1}{2} \sum P_i \delta_{ij} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV \tag{eq. 124}$$

Se, quando da aplicação quasi - estática do sistema de cargas  $P_i$  a estrutura já estivesse carregada com as cargas  $Q_j$ , a energia de deformação total acumulada na estrutura seria dada por:

$$\frac{1}{2} \sum P_i \delta_{ii} + \frac{1}{2} \sum Q_j \delta_{ji} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_p \epsilon_p dV + \sigma_Q \epsilon_Q dV \tag{eq. 125}$$

Nesta operação foram adicionados os termos correspondentes ao trabalho e à variação interna motivada pelo sistema de forças  $Q_j$  sobre os deslocamentos  $\delta_{ji}$  originados pelas cargas  $P_i$ . Designando por  $\sigma_p$  as tensões devidas às cargas  $P_i$  e por  $\sigma_Q$  as tensões devidas às cargas  $Q_j$ .

$$\sum \sum Q_j \delta_{ji} = \int_V \sigma_p \varepsilon_p dV \quad (\text{eq. 126})$$

Se invertermos a ordem de aplicação das cargas, é possível calcular o trabalho produzido pelo sistema de cargas  $P_i$  sobre os deslocamentos  $\delta_{ij}$  motivados pelas cargas  $Q_j$ .

$$\frac{1}{2} \sum P_i \delta_{ii} = \int_V \sigma_p \varepsilon_p dV \quad (\text{eq. 127})$$

Para o material em causa, se a relação tensão-deformação for linear pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= [D]^{-1} \sigma_q \\ \varepsilon_p &= [D]^{-1} \sigma_p \end{aligned}$$

em que  $[D]$  representa a matriz de elasticidade.

A utilização das equações anteriores permite chegar ao enunciado do teorema de Betti ou da reciprocidade dos trabalhos.

$$\sum_i P_i \delta_{ij} = \sum_j Q_j \delta_{ji} \quad (\text{eq. 128})$$

Este teorema refere que para um corpo elástico em equilíbrio, sob a acção de dois sistemas de forças independentes  $P_i$  e  $Q_j$ , o trabalho virtual das forças  $P_i$  na deformação  $\delta_{ij}$  produzido pelas forças  $Q_j$  é igual ao trabalho virtual das forças  $Q_j$  na deformação  $\delta_{ji}$  produzido pelas forças  $P_i$ .

Uma das aplicações importantes do teorema de BETTI é conhecido pelo principio de reciprocidade dos deslocamentos ou "Teorema de BETTI-Maxwell". Com efeito, se considerarmos que as solicitações  $P_i$  e  $Q_j$  são constituídos por uma carga unitária actuando respectivamente nas secções  $i$  e  $j$ , é imediato concluir que:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (\text{eq. 129})$$

O deslocamento na secção  $i$  provocado por uma carga unitária  $Q_j = 1$  aplicada na secção  $j$  é numericamente igual ao deslocamento na secção  $j$  provocado por uma carga unitária  $P_i = 1$  aplicado na secção  $i$ .

## 11 – LINHAS DE INFLUÊNCIA

O cálculo de estruturas sob acção de cargas móveis é consideravelmente simplificado pela utilização do conceito de linhas de influência. Linha de Influência é um gráfico que exprime a variação de um factor ( $M$ ,  $V$ , reacção,...) quando uma carga unitária se desloca ao longo de uma estrutura. Tem um significado diferente de diagramas de esforços. Linha de Influência representa a variação de um dado factor, para uma secção fixa, quando a solicitação percorre toda a estrutura. Nos diagramas de esforços representa-se a variação dos mesmos ao longo da estrutura mantendo-se a carga ou cargas aplicada(s) numa posição fixa. O objectivo deste tipo de análise é ajudar o projectista na compreensão do comportamento da estrutura em função das cargas em movimento. Há dois tipos principais de cargas “vivas”, *live loads*: categoria A (cargas naturais - vento, neve,...) e categoria B (cargas rolantes – trens, automóveis, pessoas,...). O exemplo representado na figura seguinte, representa a linha de influência do esforço cortante e do momento flector para a secção  $S$  e linha de influência para o valor da reacção “left” and “right”, respectivamente  $RL$  e  $RR$ .

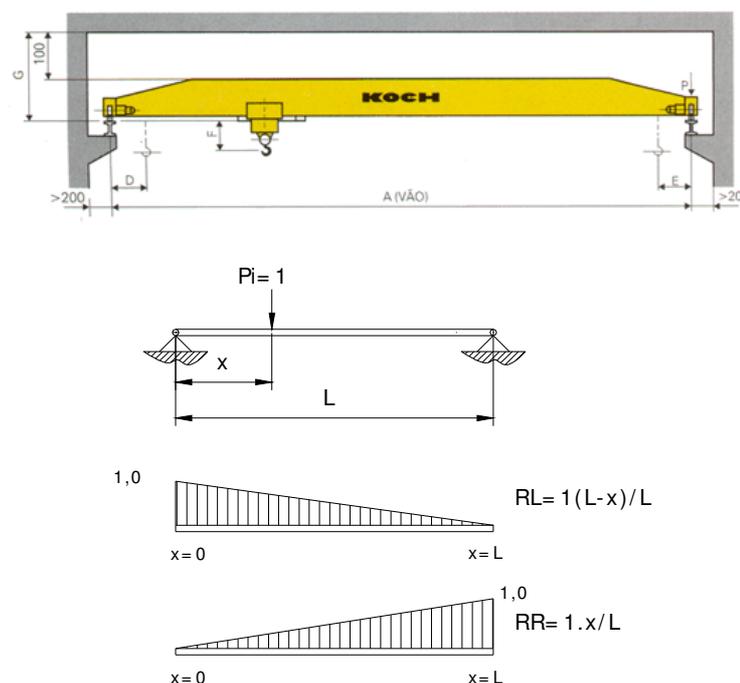


Fig. 99 – Ponte rolante com apoio simples.

Na figura seguinte são apresentados alguns pormenores da ligação de pontes rolantes com a estrutura de suporte.

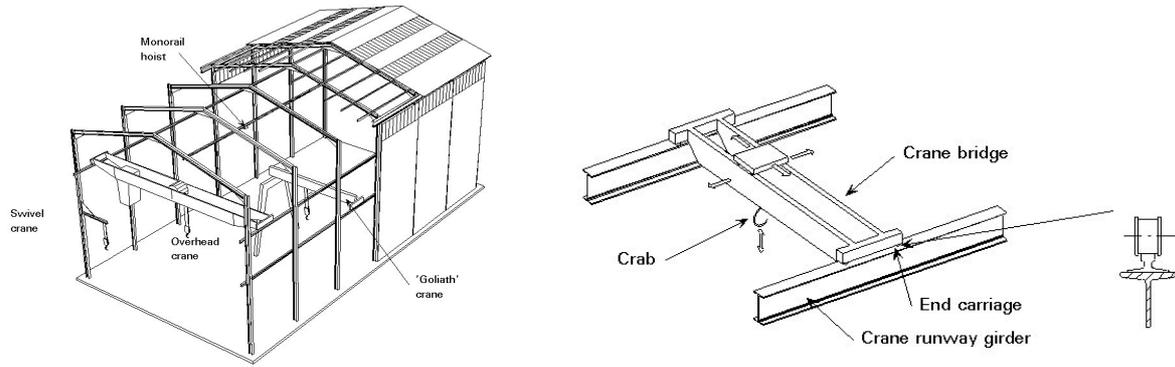


Fig. 100 – Montagem de ponte rolante numa estrutura metálica.

## 12 – MÉTODO DAS FORÇAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS

Este método permite analisar estruturas estaticamente indeterminadas ou “estruturas hiperestáticas”. Consideram-se estruturas hiperestáticas quando o número de equações de equilíbrio estático não permite a determinação das reacções dos apoios ou dos esforços internos.

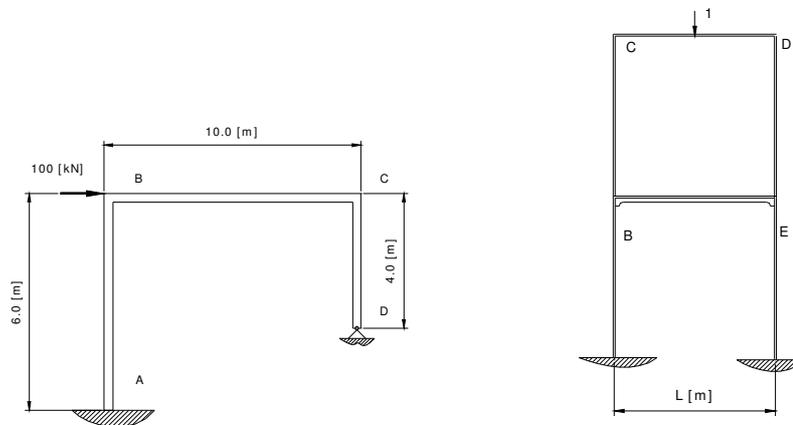


Fig. 101 - Exemplos de estruturas hiperestáticas.

O número de incógnitas deslocamento define o grau de hipergeometricidade ou grau de indeterminação cinemática de uma estrutura.

Numa estrutura plana treliçada, cada nó articulado possui dois deslocamentos admissíveis (translação segundo  $xx$  e translação segundo  $yy$ ), sendo o número de incógnitas deslocamento,  $2n$ , subtraído do nº de ligações ao exterior ( $r$ ). Neste caso o grau de hipergeometricidade vale:

$$b = 2n - r \quad (\text{eq. 130})$$

No caso das estruturas contínuas em que em cada nó existem três deslocamentos generalizados (duas translações e uma rotação) o grau de hipergeometricidade determina-se:

$$b = 3n - r \quad (\text{eq. 131})$$

Para o dimensionamento de estruturas articuladas, os esforços axiais devem ser determinados posteriormente ao cálculo das reacções nos apoios. O número de incógnitas de uma estrutura articulada iguala a soma de  $b+r$ .

Quando o número de incógnitas é superior ao número de equações:  $(r+b) > 2n$ , a estrutura não pode ser calculada unicamente com as equações da estática, a estrutura tem excesso de ligações que podem ser internas ou externas ou ambas as situações. Conforme o excesso do número de incógnitas sobre o número de equações provém de  $r$  ou de  $b$ , assim a estrutura hiperestática toma a designação de hiperestática por condições exteriores ou de hiperestática por condições interiores. Quando a estrutura é hiperestática, as barras ou as componentes das reacções em excesso, tomam a designação de barras ou componentes hiperestáticos ou superabundantes, calculando-se o grau de hiperestaticidade através de  $h=(r+b)-2n$ .

No caso de estruturas reticuladas contínuas, o cálculo do grau de hiperestaticidade consiste em suprimir as ligações em excesso, através de cortes nas vigas da estrutura ou da introdução de rótulas, de modo a obter-se uma estrutura isostática. O grau de hiperestaticidade é igual ao número total de ligações suprimidas. Para cada corte efectuado elimina-se no máximo três ligações internas:  $M_f$ ,  $V$ ,  $N$ , ver figura seguinte.

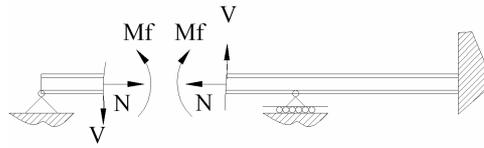


Fig. 102 – Esforços internos numa viga contínua.

O grau de hiperestaticidade calcula-se em função do número de cortes efectuados e do número de graus de liberdade na zona respectiva,  $h=(n^\circ \text{ de cortes efectuados}) \times (3 \text{ incógnitas})$ . Ao suprimirem-se estas ligações, para que a estrutura final seja equivalente à estrutura inicial (real), é necessário manter os esforços internos existentes na viga antes da eliminação da ligação.

Para o caso de problemas estaticamente indeterminados simples, a ligação superabundante é uma ligação para além daquelas necessárias para garantir a estabilidade de estrutura. Em alguns casos, esta ligação aparece para diminuição do deslocamento máximo admissível de um elemento.

Um dos métodos alternativos ao método da força, foi proposto por Navier (1826). Este método baseia-se na compatibilidade de deslocamentos, introduzida na fase de integração da equação diferencial da deformada.

O método das forças consiste basicamente em transformar uma estrutura hiperestática numa estrutura isostática, pela eliminação dos apoios ou pela eliminação de variáveis superabundantes, a qual será carregada simultaneamente pela solicitação real e por uma solicitação suplementar, composta por forças e/ou momentos aplicados nos nós em que foram eliminadas as respectivas variáveis. Em primeiro lugar deve-se definir uma estrutura equivalente à inicial e associar a noção de sistema base ou principal e de sistema correspondente à incógnita hiperestática. O sistema base não é único, podendo ser qualquer estrutura isostática obtida a partir da hiperestática, por supressão das ligações superabundantes, ver figura seguinte.

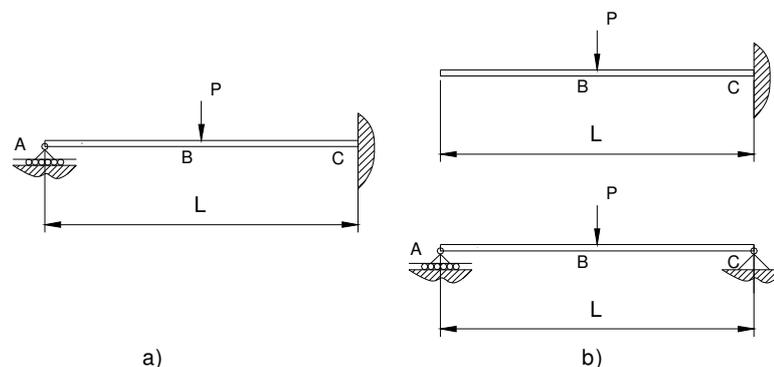


Fig. 103 – a) Sistema real hiperestático, b) sistemas de base possíveis.

Tendo em consideração o exemplo representado, é possível aplicar o princípio da sobreposição de efeitos ao valor do deslocamento em A. Neste caso, o deslocamento em A deverá ser compatibilizado para que se obtenha um resultado nulo. Admitindo uma solução de base por remoção do apoio em A, mantendo o encastramento no apoio C, a equação de compatibilidade pode ser escrita por:

$$\delta_A = (\delta_A)_{SB} + (\delta_A)_{SBIH} = 0 \quad (\text{eq. 132})$$

em que  $(\delta_A)_{SB}$  representa o deslocamento no ponto A do sistema de base provocado pelas cargas exteriores iniciais, enquanto que  $(\delta_A)_{SBIH}$  representa o deslocamento em A do sistema base provocado pela incógnita hiperestática  $R_A$ . A equação anterior é conhecida como equação canónica do método das forças para sistemas simplesmente indeterminados, podendo tomar a seguinte forma:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \times R_A = 0 \quad (\text{eq. 133})$$

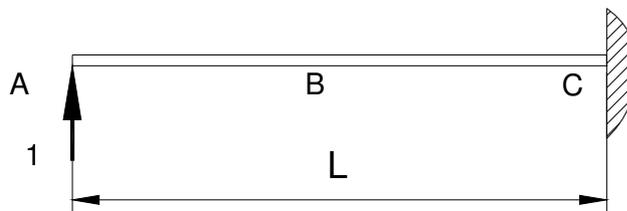


Fig. 104 – Sistema unitário correspondente à incógnita hiperestática aplicado no sistema base.

Para cálculo dos deslocamentos, deverão ser utilizados todos os métodos de análise de estruturas no âmbito da mecânica dos materiais.

No caso de sistemas com maior número de incógnitas hiperestáticas, deverão ser eliminados os graus de liberdade em excesso, escolhido o sistema base e escritas as equações de compatibilidade.

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \dots + \delta_{1n} x_n = 0 \\ \dots \\ \delta_{n0} + \delta_{n1} x_1 + \delta_{n2} x_2 + \dots + \delta_{nm} x_n = 0 \end{cases} \quad (\text{eq. 134})$$

A escolha do sistema base pode e deve ser efectuada de maneira a reduzir o esforço de cálculo. Em estruturas com simetria geométrica poderão ser efectuadas simplificações em função do tipo de carregamento existente. Na figura seguinte encontra-se representada uma destas situações.

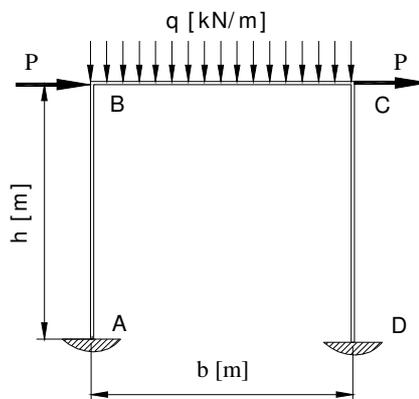


Fig. 105 – Estrutura hiperestática com simetria geométrica.

Parte do carregamento da estrutura representada tem uma característica de simetria (carregamento distribuído), enquanto que as cargas concentradas estão orientadas assimetricamente.

A escolha de um sistema base adequado simplifica a determinação dos coeficientes  $\delta_{ij}$  das equações canónicas. Neste caso convém manter a simetria da geometria no sistema de base, evitando a solução a), conforme representação da figura seguinte.

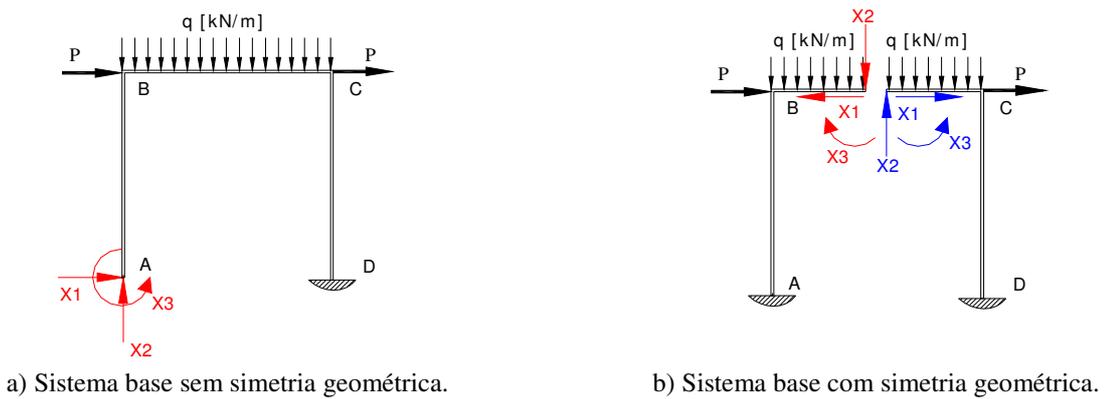


Fig. 106 – Sistemas de base possíveis para estudo da estrutura hiperestática.

Admitindo o sistema de base em que se mantém a simetria da geometria, podemos concluir que a incógnita hiperestática  $X_2$  dará origem a um diagrama de momentos flectores assimétrico, enquanto as incógnitas  $X_1$  e  $X_3$  dão origem a um diagrama com simetria. O carregamento existente também se comporta destas duas formas diferentes, podendo então concluir-se que os integrais associados aos coeficientes que resultam da combinação de dois diagramas de esforços simétricos permitem que se calcule o integral apenas em metade da estrutura e se duplique o seu valor, enquanto que os integrais que resultam da combinação de diagramas simétricos com diagramas assimétricos possuem resultado nulo, conforme se poderá verificar dos gráficos da figura seguinte.

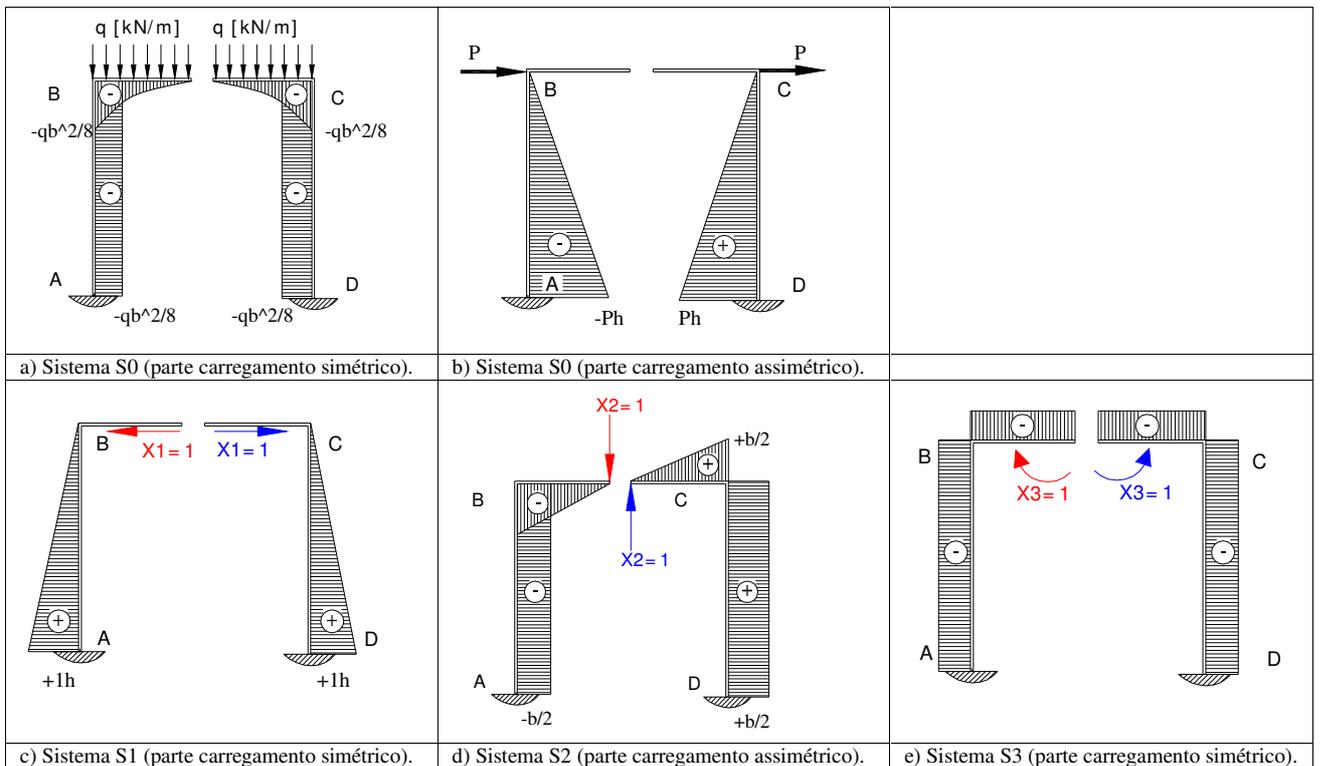


Fig. 107 – Diagrama de momentos flectores para os vários sistemas isostáticos.

O sistema de equações escrito na sua forma canónica é expresso por:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \delta_{13} x_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \delta_{23} x_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31} x_1 + \delta_{32} x_2 + \delta_{33} x_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{eq. 135})$$

Os coeficientes não nulos valem:

$EI \delta_{11} = \int_L M_1 M_1 dx = \frac{2}{3} h^3$	$EI \delta_{10} = \int_L M_1 M_0 dx = -\frac{qb^2 h^2}{8}$
$EI \delta_{13} = \int_L M_1 M_3 dx = h^2$	$EI \delta_{20} = \int_L M_2 M_0 dx = \frac{Ph^2 b}{2}$
$EI \delta_{22} = \int_L M_2 M_2 dx = \frac{b^3}{12} + \frac{b^2 h}{2}$	$EI \delta_{30} = \int_L M_3 M_0 dx = \frac{qb^2 h}{4} + \frac{qb^3 h}{24}$
$EI \delta_{33} = \int_L M_3 M_3 dx = b + 2h$	

A resolução deste sistema dá origem aos seguintes valores para as incógnitas hiperestáticas:

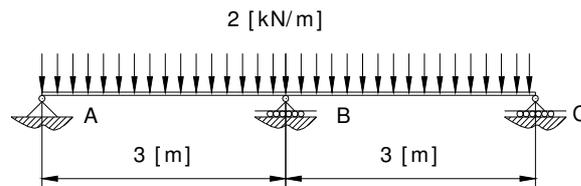
$$X1 = \frac{-qb^2 (12h + 3b + hb)}{8 h(h + 2b)}$$

$$X2 = \frac{6Ph^2}{b(b + 6h)}$$

$$X3 = \frac{qb^2 h (2b + 21)}{24 (h + 2b)}$$

## 12.1 – Aplicação

A figura que se segue representa uma viga contínua aplicada numa cobertura. A viga está submetida a um carregamento distribuído. Determine o digrama de momentos flectores.



A utilização do método da força unitária pressupõe a escolha do sistema de base e um sistema auxiliar. O sistema base pode ser obtido através da introdução de uma rótula a meio vão. A equação canónica pode ser escrita por:

$$\delta_{10} + \delta_{11}x_1 = 0$$

Para determinação dos coeficientes de flexibilidade, recorre-se à aplicação do método em estudo, considerando apenas o efeito do esforço momento flector.

$$\delta_{ij} = \int_L \frac{M_i M_j}{EI} dL$$

$$\text{Coeficiente } \delta_{10}: \delta_{10} = \int_L \frac{M_1 M_0}{EI} dL = \frac{q}{L^3 12 EI}$$

$$\text{Coeficiente } \delta_{11}: \delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} dL = \frac{2L}{3EI}$$

Por aplicação da forma canónica, é possível determinar a incógnita hiper estática.

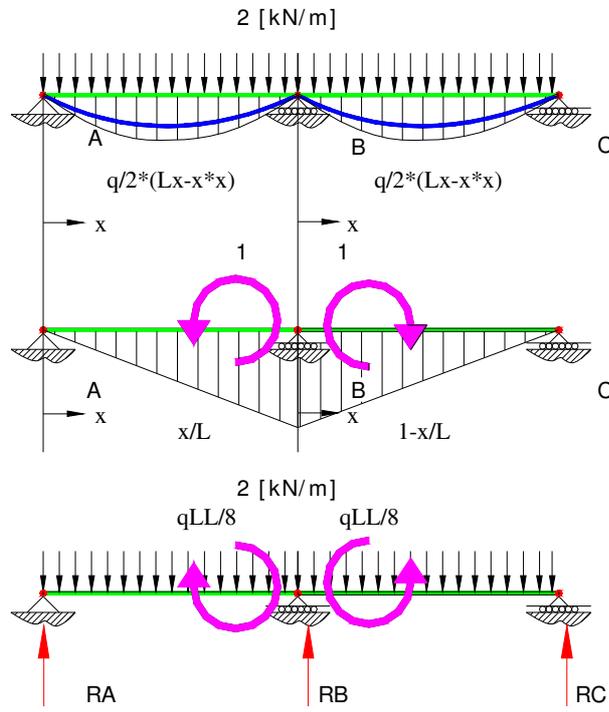
$$\delta_{10} + \delta_{11}x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -qL^2/8 \quad [Nm]$$

$$\text{Determinação das reacções, parte 1: } \begin{aligned} R_A &= 3qL/8 \quad [N] \\ R_B^1 &= 5qL/8 \quad [N] \end{aligned}$$

$$\text{Determinação das reacções, parte 2: } \begin{aligned} R_C &= 3qL/8 \quad [N] \\ R_B^2 &= 5qL/8 \quad [N] \end{aligned}$$

$$\text{Diagrama de momentos, parte 1: } 0 < x < 3: M_f = q \left[ \frac{3}{8} Lx - \frac{x^2}{2} \right]$$

Diagrama de momentos, parte 2:  $3 < x < 6$ : simétrico.



O diagrama de esforço pode então finalmente ser representado por:

