Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

• História: desde os filósofos gregos…

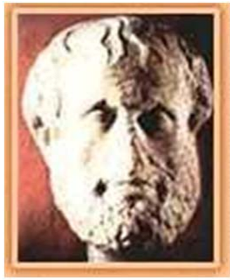
A **<u>Estática</u>** = É parte da mecânica que trata da análise dos corpos em repouso.

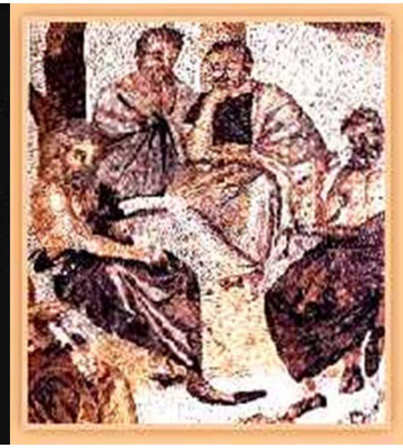
Sócrates, Platão e Aristóteles são os três maiores filósofos da Antiguidade. Foram também grandes estudiosos das fábulas, por verem nelas um bom exercício para desenvolver a competência argumentativa.

Sócrates - filósofo grego (Atenas 470-399 a.C.).

Platão - filósofo grego (Atenas 427a.C. - id.C.347a.C.).

Aristóteles - filósofo grego.

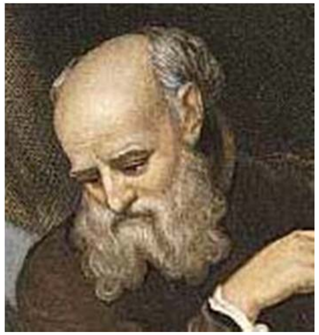




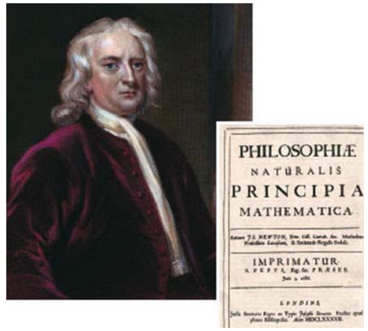
(Desde Galileu 1564-1642)

A **<u>Dinâmica</u>** = É parte da mecânica que trata da análise dos corpos em movimento.

Físico, Matemático e astrónomo Italiano, **Galileu Galilei** (1564-1642) descobriu a lei dos corpos e enunciou o princípio da Inércia.



Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO



(1642-1727, Newton formulou as leis fundamentais do **Movimento**).

A dinâmica divide-se assim em:

-Cinemática, trata da geometria do movimento relacionado com a posição, velocidade, aceleração e tempo, sem referência às causas do movimento.

-Cinética ou propriamente Dinâmica, trata das reacções entre as forças agentes num corpo e o seu movimento, usa-se a dinâmica para se prever o movimento causado pelas forças aplicadas ou para se determinar as forças necessárias à produção de um determinado movimento. Relaciona forças do corpo, massa e movimento.

- A **1ª e 3ª Lei de Newton** é utilizada na **estática** em corpos em repouso, mas também utilizada na **dinâmica** quando os corpos **não têm aceleração**.

- A **2ª Lei de Newton** é utilizada na **dinâmica** quando os corpos **têm aceleração**, para relacionar os efeitos (acelerações) com cargas ou forças aplicadas.

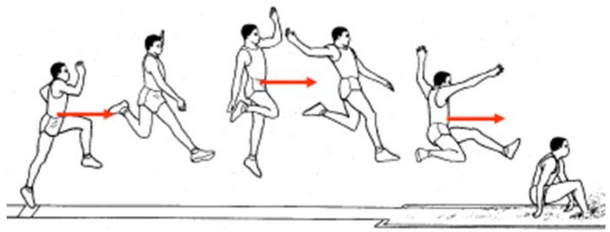
Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **1ª lei de Newton ou Lei da Inércia**

  Se não existem forças aplicadas num corpo então a velocidade do corpo é constante. O corpo permanece em repouso ou com movimento rectilíneo e uniforme.

$$m v = \text{const.}$$

$$\Sigma\, \mathbf{F} = 0$$

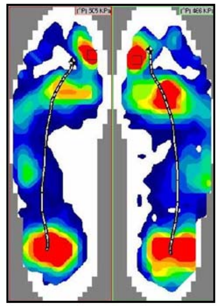


- **2ª lei de Newton ou Lei da Aceleração**

  Um ponto material submetido a uma força não nula adquire uma aceleração com módulo proporcional ao módulo da força e na mesma direcção e sentido desta.

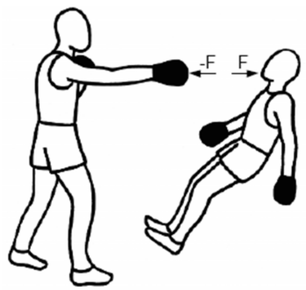
$$F = d/dt(m v) \;\Leftrightarrow\; F = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma\, \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$



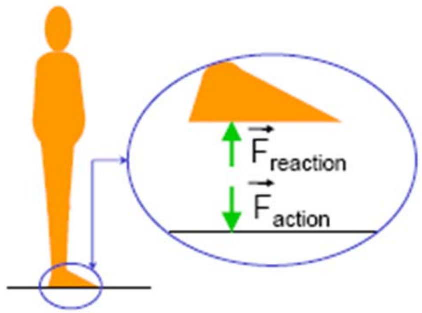
- **3ª lei de Newton ou Lei da Acção**

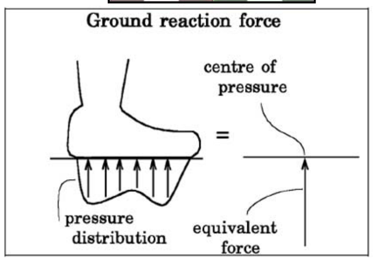
  A qualquer acção opõe-se uma reacção de intensidade igual e de sentido oposto.



$$d/dt(m_1 v_1) = -d/dt\,(m_2 v_2)$$

$$\mathbf{F}_{1\text{-}2} = -\mathbf{F}_{2\text{-}1}$$

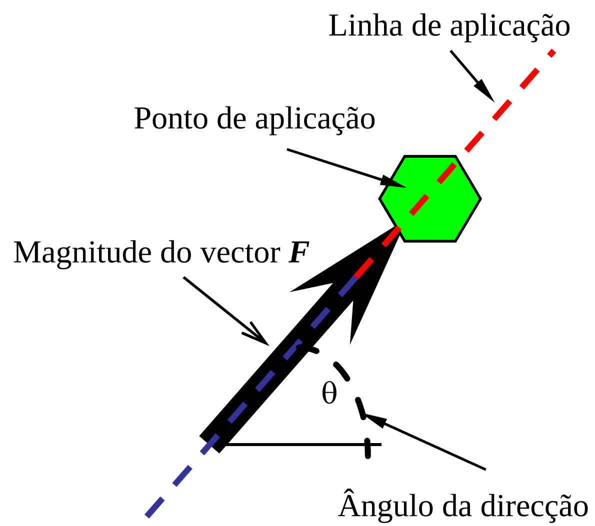


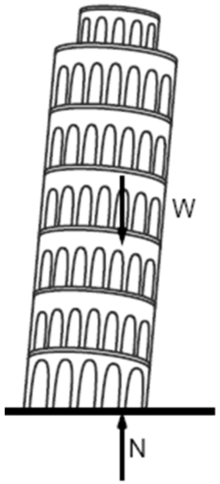


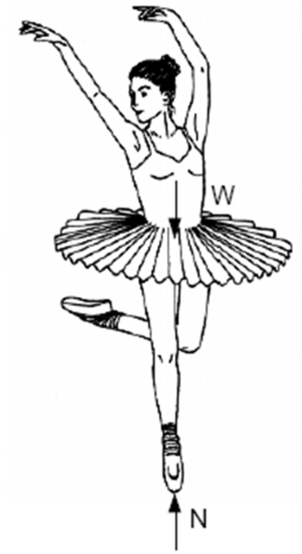
Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Estática: Equilíbrio estático**

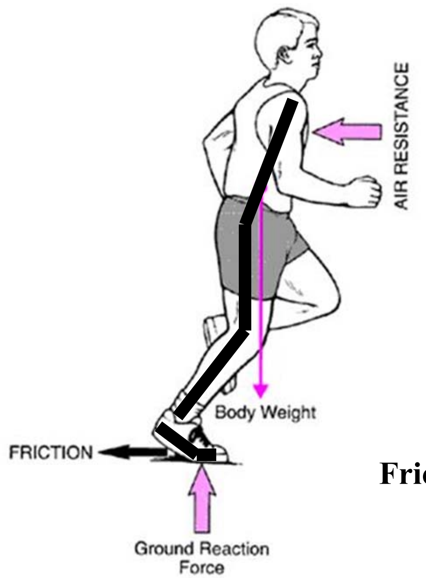
A força *F* é uma quantidade vectorial, função da sua magnitude, direcção e sentido.
As setas designam as forças que actuam em cada objecto.
O símbolo ***W*** utiliza-se geralmente para o peso do corpo e símbolo ***N*** a força reactiva ou de contacto no corpo.

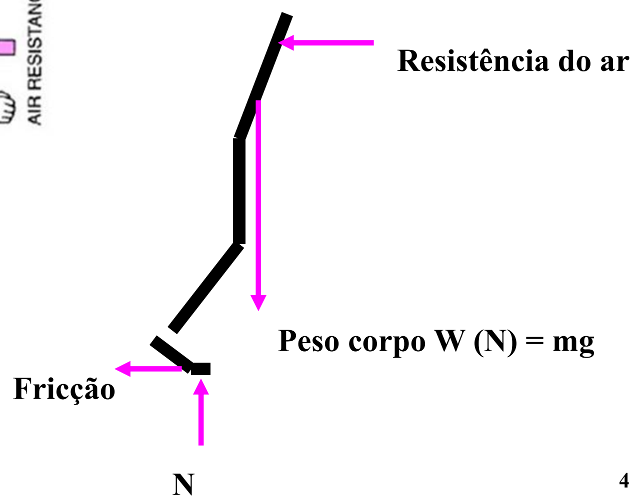






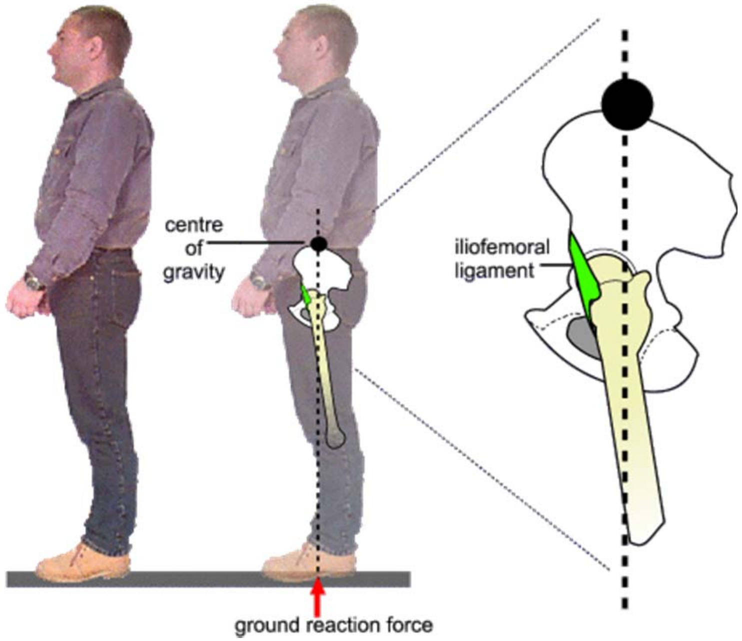
O corpo humano é modelado através de um sistema articulado de corpos rígidos.





Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Estática: Equilíbrio estático**



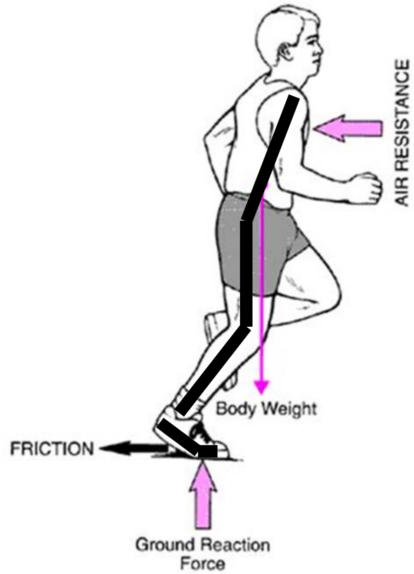
As forças classificam-se de:

forças externas, internas e de contacto.

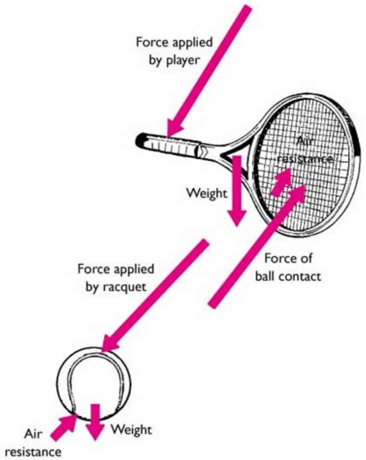
As **forças externas** actuam sobre o sistema em estudo:

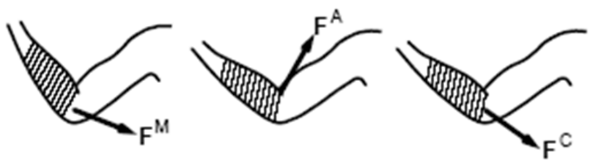
reacções ao solo, peso (mg), forças aplicadas…

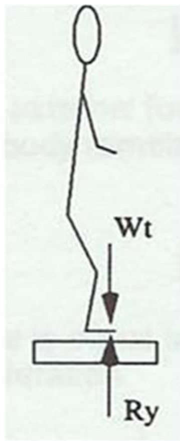
As **forças internas** existem no interior do sistema (forças nos músculos e ligamentos).



As **forças de contacto** existem no contacto entre sistemas.





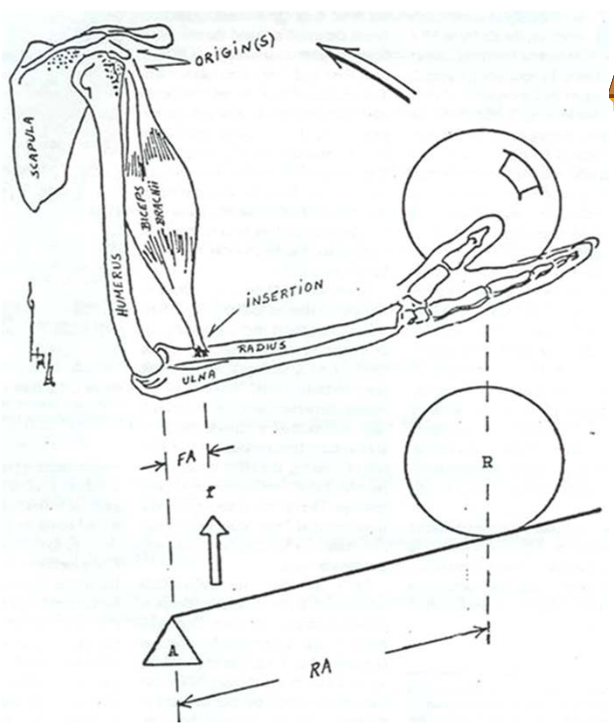


Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

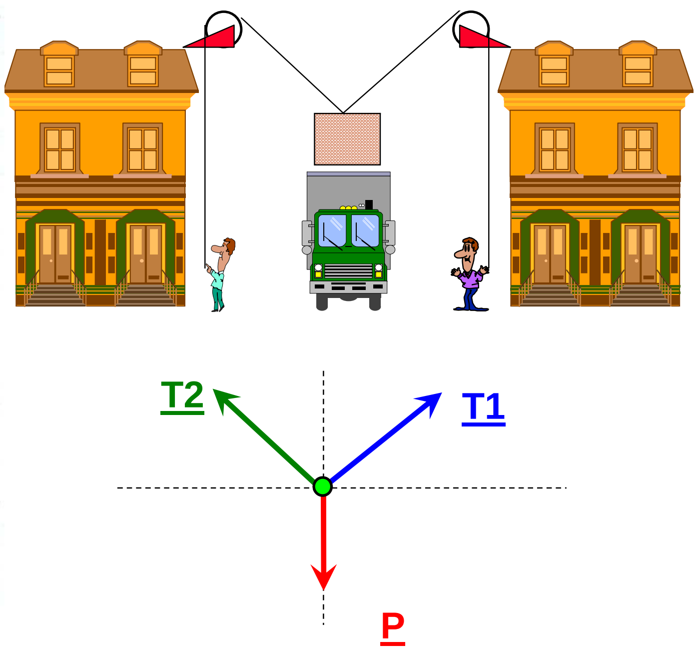
- **Estática: Equilíbrio estático**

  Diagramas de corpo livre

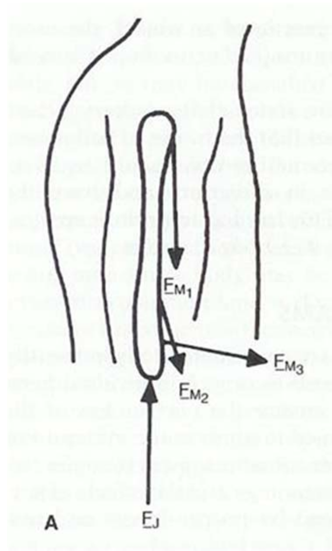
I) músculos



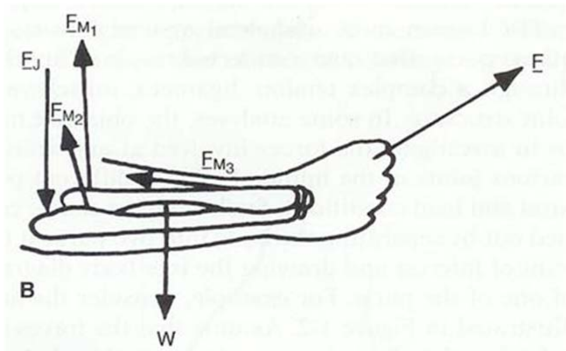
II) um sistema



III) braço superior

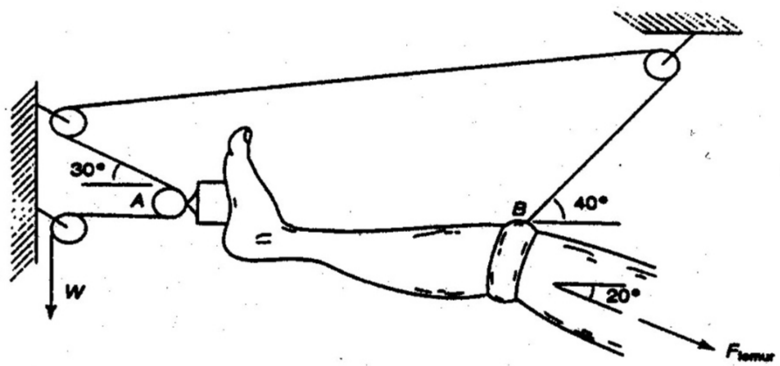


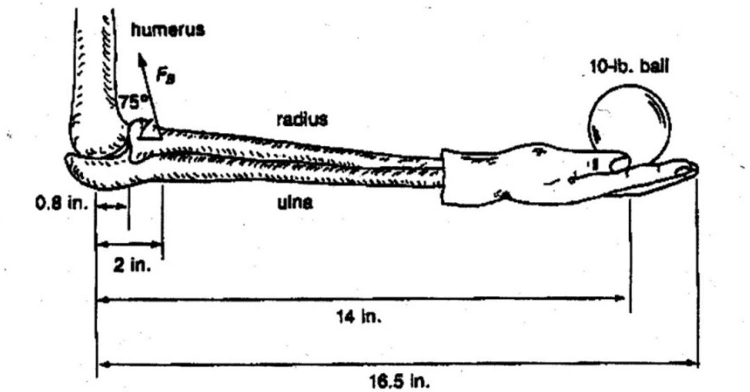
IV) antebraço

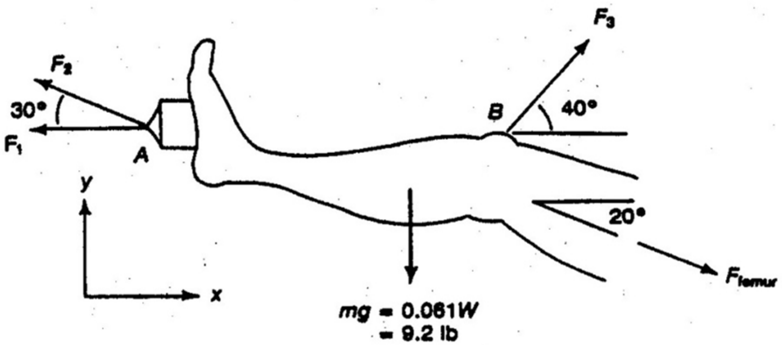


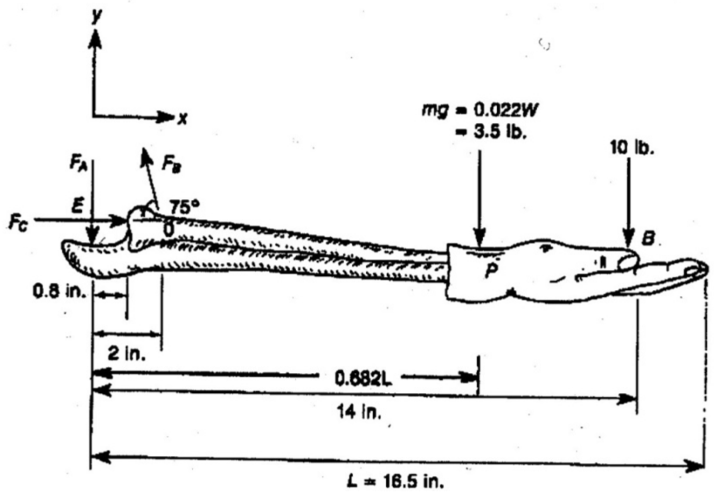
- **Estática: Equilíbrio estático**

  Diagramas de corpo livre.









Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

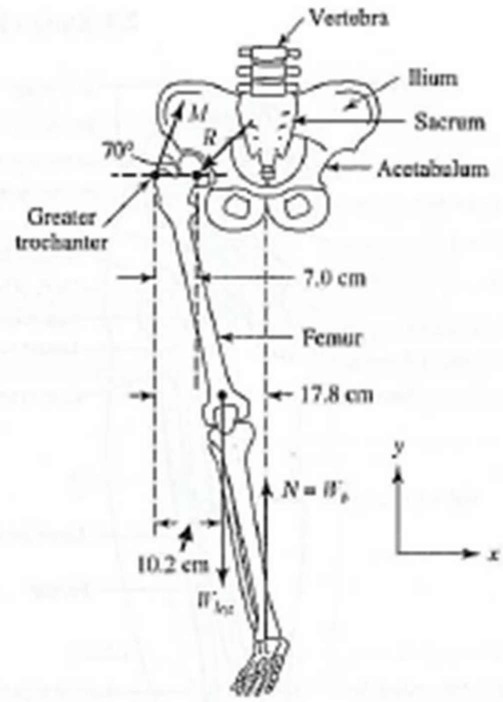
- **Estática: Equilíbrio estático**

Diagrama anatómico da perna e da anca, para a situação de uma pessoa apoiada numa só perna, ou num movimento lento de passada, com representação das acções musculares relevantes e das dimensões:

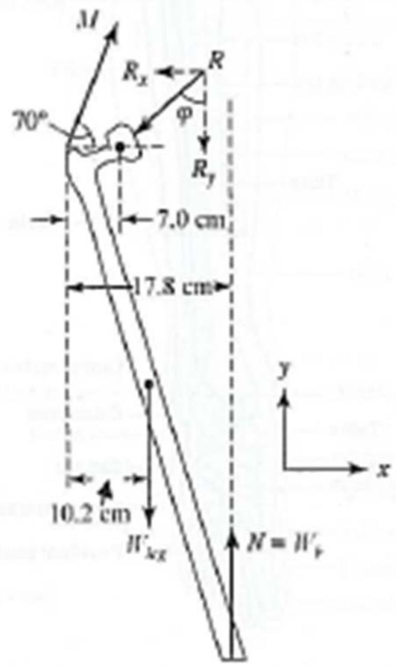
- Força R, exercida na cabeça do fémur pelo acetábulo;

- Força M, exercida pelo músculo adutor do acetábulo.

Diagramas de corpo livre da perna e da anca.

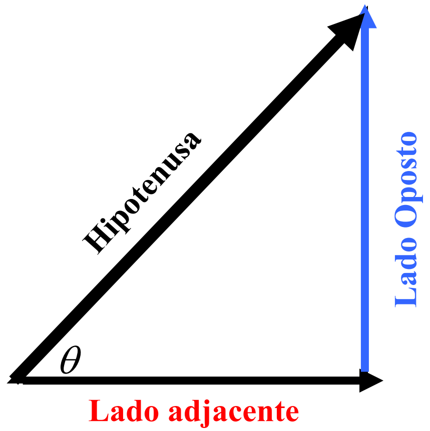


Herman, Irving; "Physics of the human body, Biological and medical physics, Biomedical Engineering"; Springer, 2007



Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Análise vectorial**
  Conceitos de trigonometria

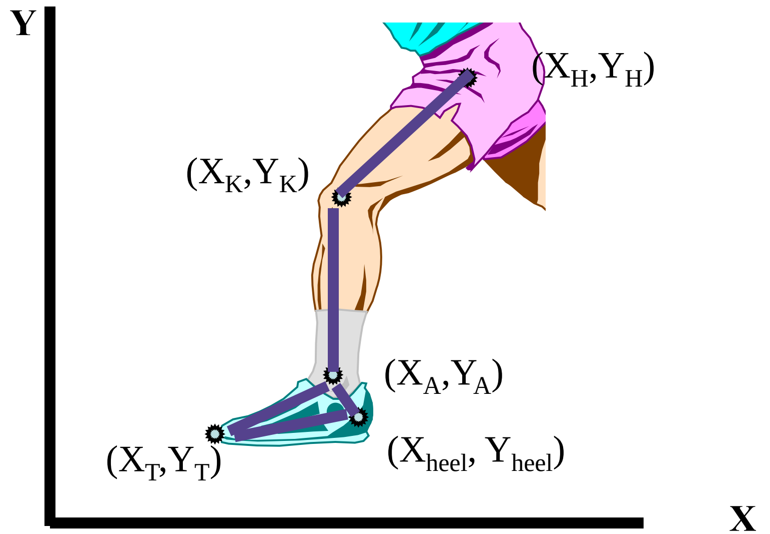


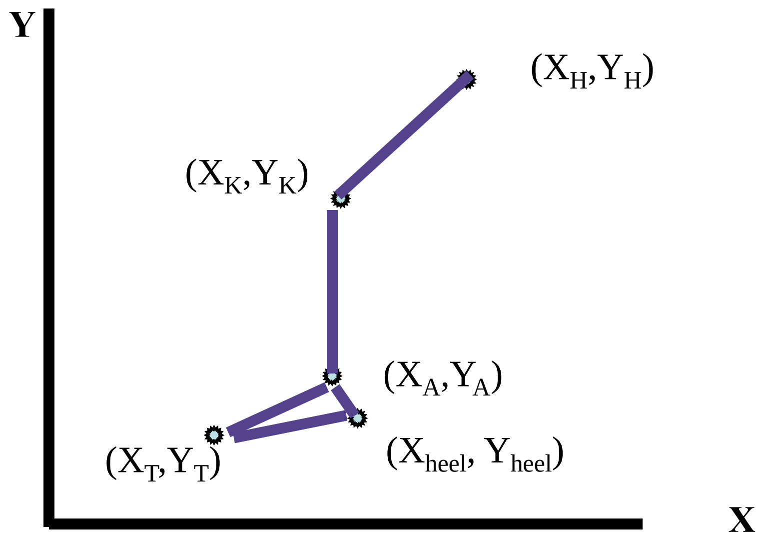
Adj² + Opp² = Hyp²

sin θ = opp / hyp

cos θ = adj / hyp

tan θ = opp / adj





Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Análise vectorial**

  Adição e subtracção de vectores

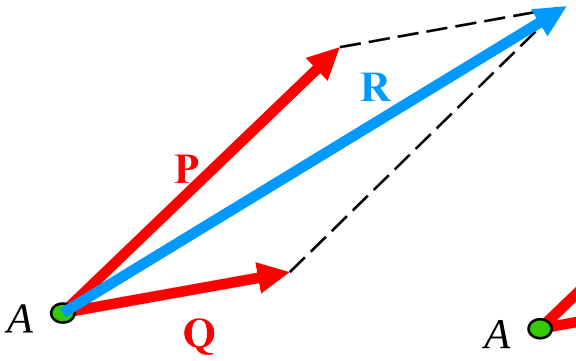
Forças são ***quantidades vectoriais*** que podem ser somadas de acordo com a lei do paralelogramo.

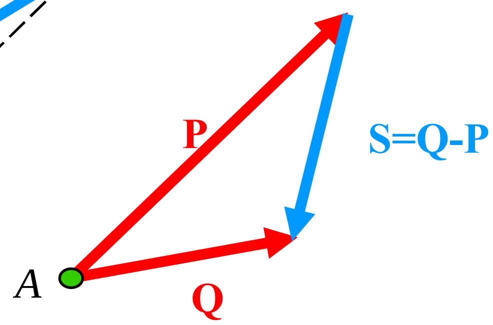
Podem ser utilizadas diferentes nomenclaturas para representar um vector força:

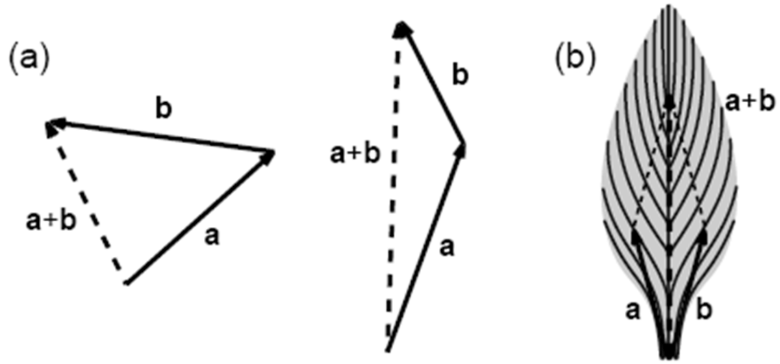
$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} \qquad \tilde{R} = \tilde{P} + \tilde{Q}$$

$$\vec{S} = \vec{Q} - \vec{P} \qquad \mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} \qquad \tilde{S} = \tilde{Q} - \tilde{P}$$

A magnitude e direcção da resultante **R** de duas forças **P** e **Q** pode ser determinada graficamente ou trigonometricamente.







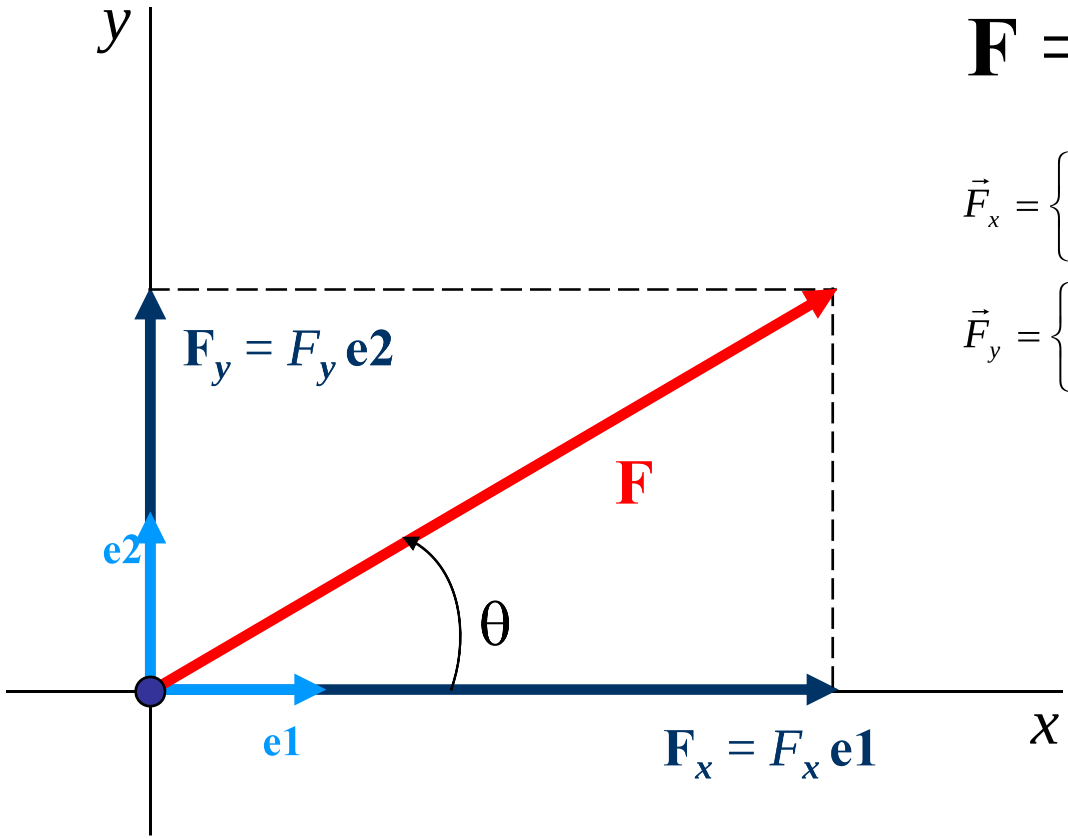
músculo

Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Análise vectorial**

  Componentes rectangulares de um vector no plano

A força **F** pode ser obtida em componentes ***rectangulares.*** Introduzindo o vector unitário **e1** e **e2** segundo o eixo *x* e *y:*



$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{e1} + F_y\,\mathbf{e2}$$

$$\vec{F}_x = \begin{Bmatrix} F \times Cos(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad F_x = F\cos\theta$$

$$\vec{F}_y = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \times Sin(\theta) \end{Bmatrix} \qquad F_y = F\sin\theta$$

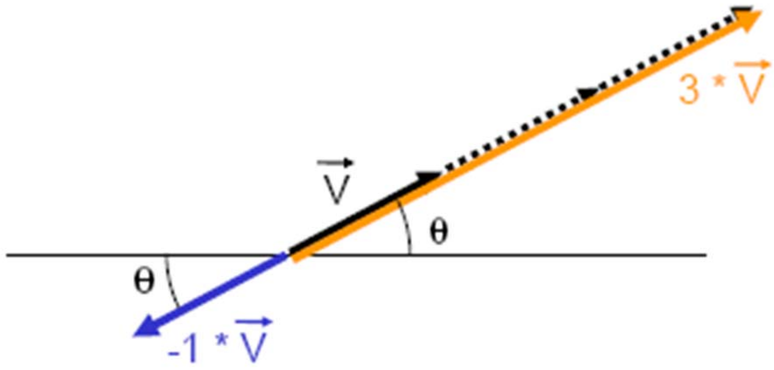
$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$$

- **Análise vectorial. Análise gráfica**

No caso de um vector **V** ser multiplicado por um escalar "n":

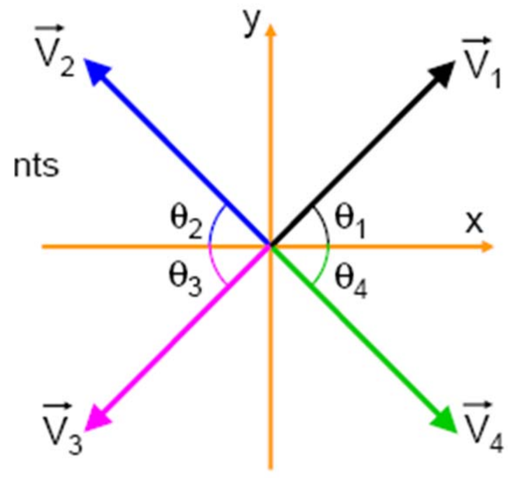
- A resultante é |n| vezes o comprimento do vector **V**;
- No caso de n>0, o sentido do vector resultante é igual ao vector **V**;
- No caso de n<0, o sentido do vector resultante é oposto ao vector **V**.



Para determinação dos ângulos entre vectores e os eixos coordenados:

- Os sinais das componentes "x" e "y" representam o sentido.
- Para determinação dos ângulos :

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{|V_y|}{|V_x|}\right)$$



Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Análise vectorial**

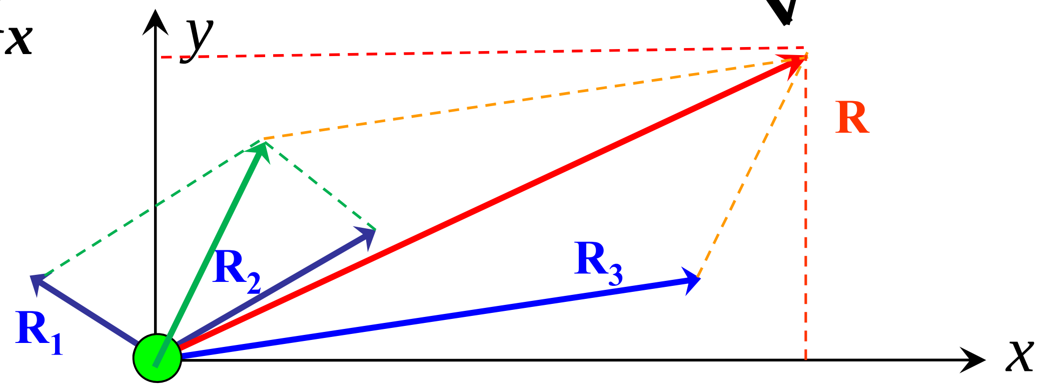
Componentes rectangulares de um vector no plano

Quando 3 ou mais forças actuam numa partícula, as componentes rectangulares da sua resultante podem ser obtidas por adição algébrica das correspondentes componentes das forças dadas.

$$R_x = \Sigma R_x \qquad\qquad R_y = \Sigma R_y$$

A magnitude e a direcção de **R** pode ser determinada por:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \qquad\qquad R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$$



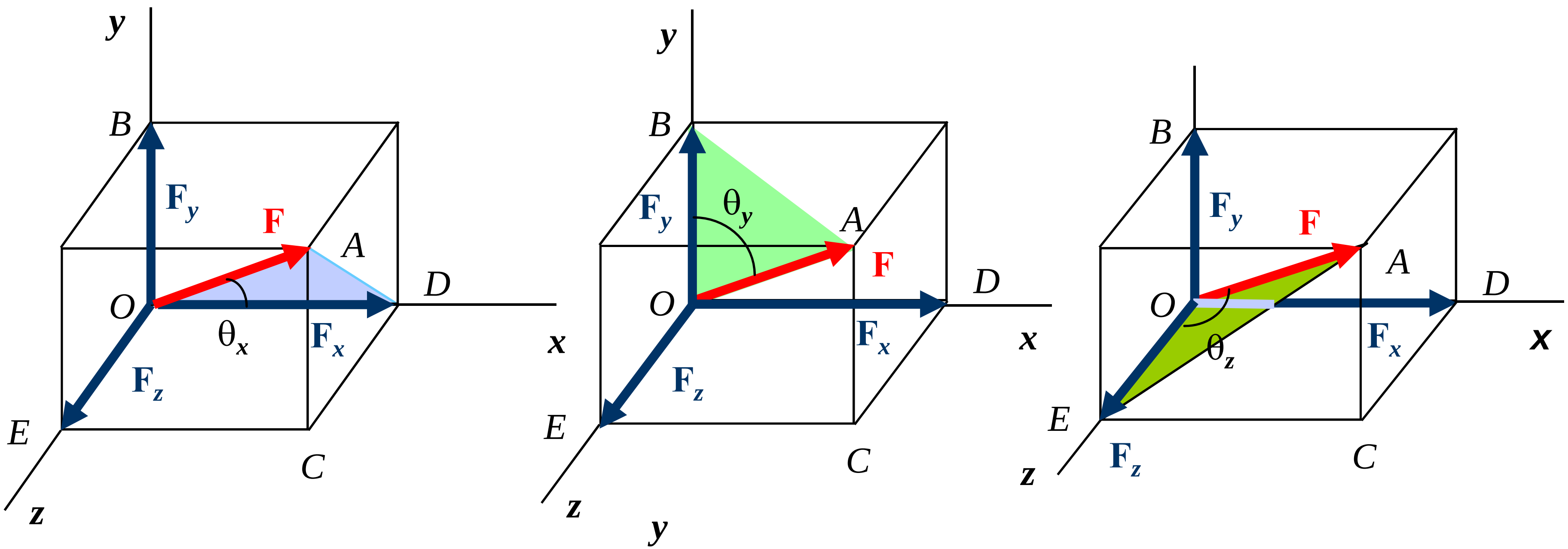
Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Análise vectorial**

  Componentes rectangulares de um vector no espaço

A força **F** pode ser obtida em componentes ***rectangulares.*** Introduzindo o vector unitário **e1**, **e2** e **e3** segundo o eixo *x*, *y* e *z:*

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z$$

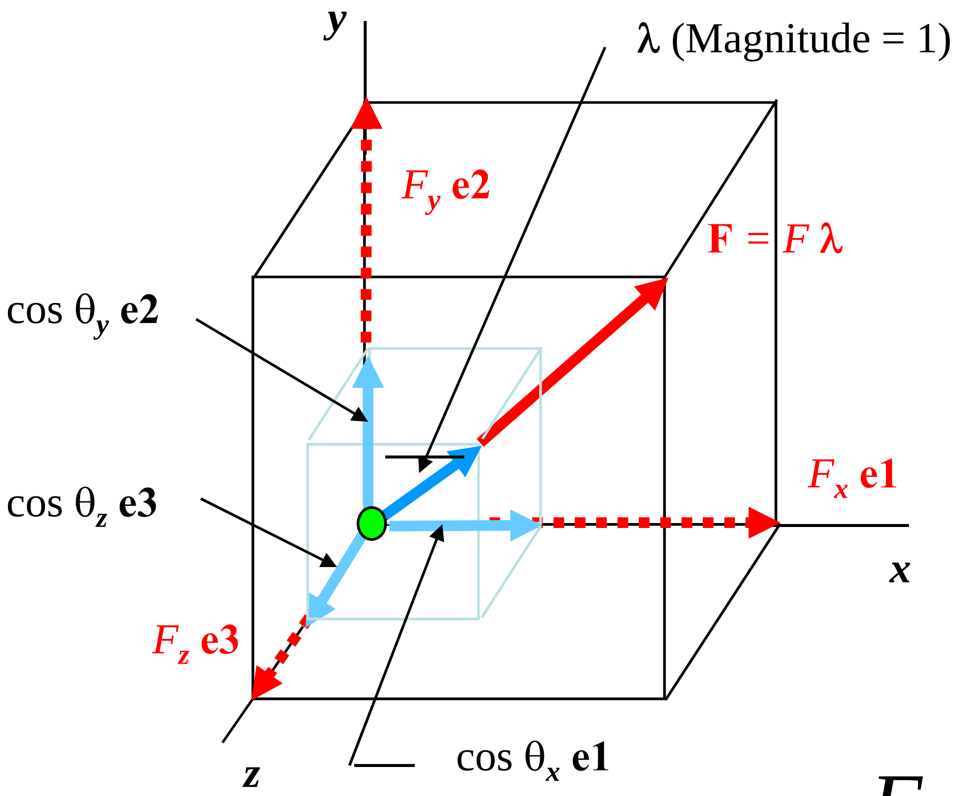


Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Análise vectorial**

  Componentes rectangulares de um vector no espaço

Os cossenos $\theta \boldsymbol{x}$, $\theta \boldsymbol{y}$ e $\theta \mathbf{z}$ são os cossenos directores da força F.



$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{e1} + F_y\,\mathbf{e2} + F_z\,\mathbf{e3}$$

ou

$$\mathbf{F} = F\,(\cos\theta_x\,\mathbf{e1} + \cos\theta_y\,\mathbf{e2} + \cos\theta_z\,\mathbf{e3}\,)$$

$$\lambda = \cos\theta_x\,\mathbf{e1} + \cos\theta_y\,\mathbf{e2} + \cos\theta_z\,\mathbf{e3}$$

Para que a magnitude λ seja unitária:

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$$

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

- **Exercício 2.1**

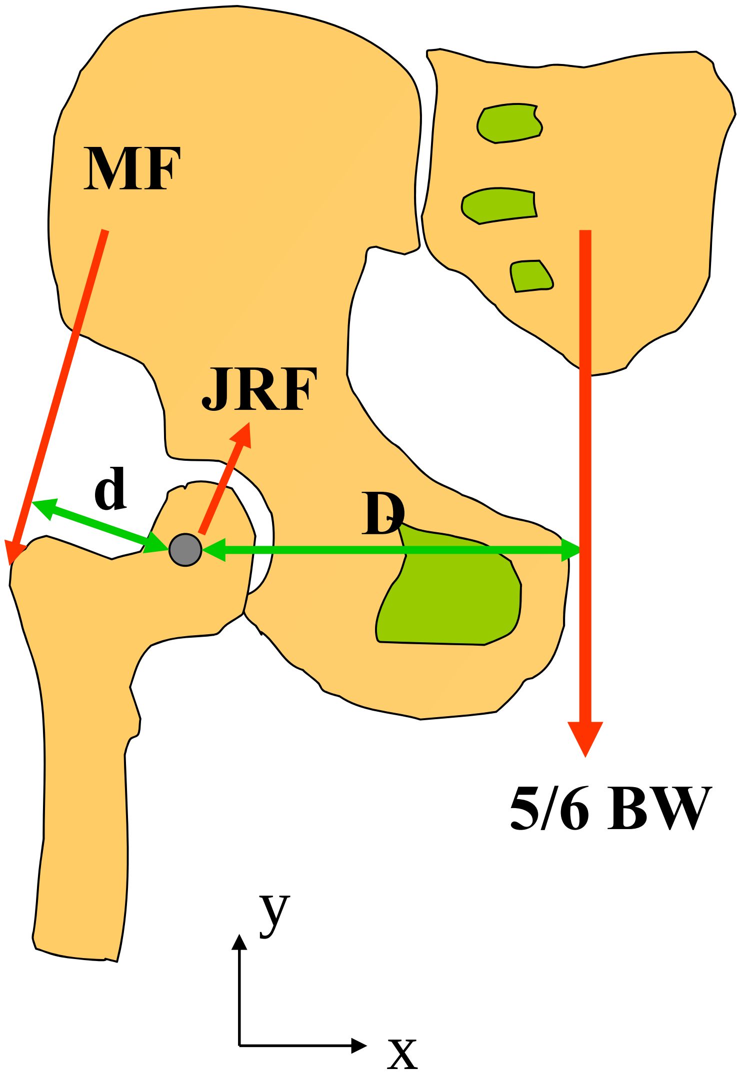
  Estática: equilíbrio estático

No projecto de um implante da anca, qual é a força reactiva da articulação?

$$\sum F_y = 0$$

$$-MF_y + JRF_y - \frac{5}{6}BW = 0$$

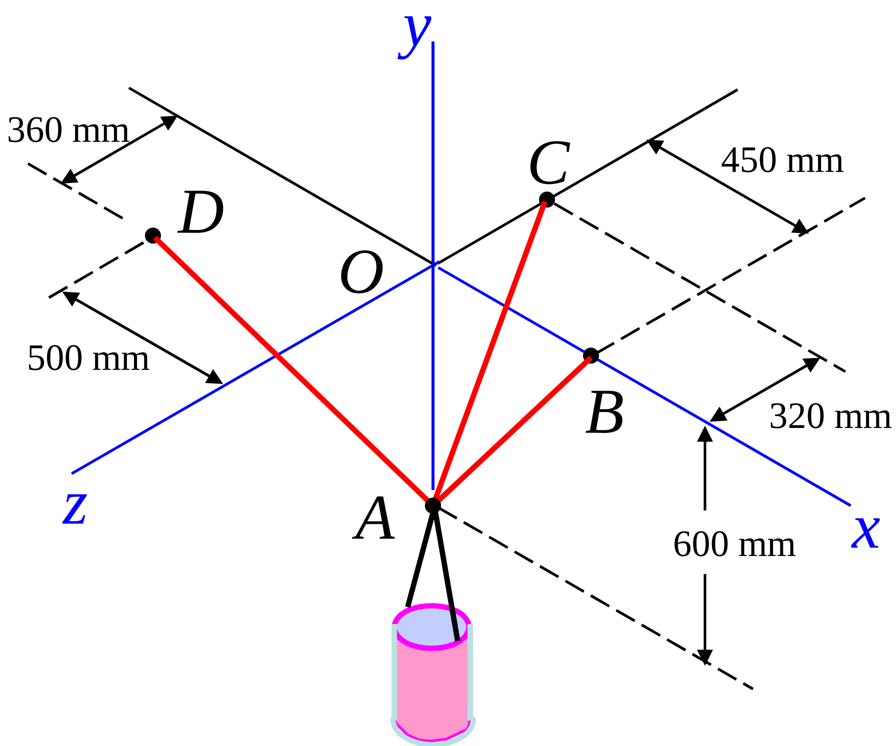
JRF = joint reaction force



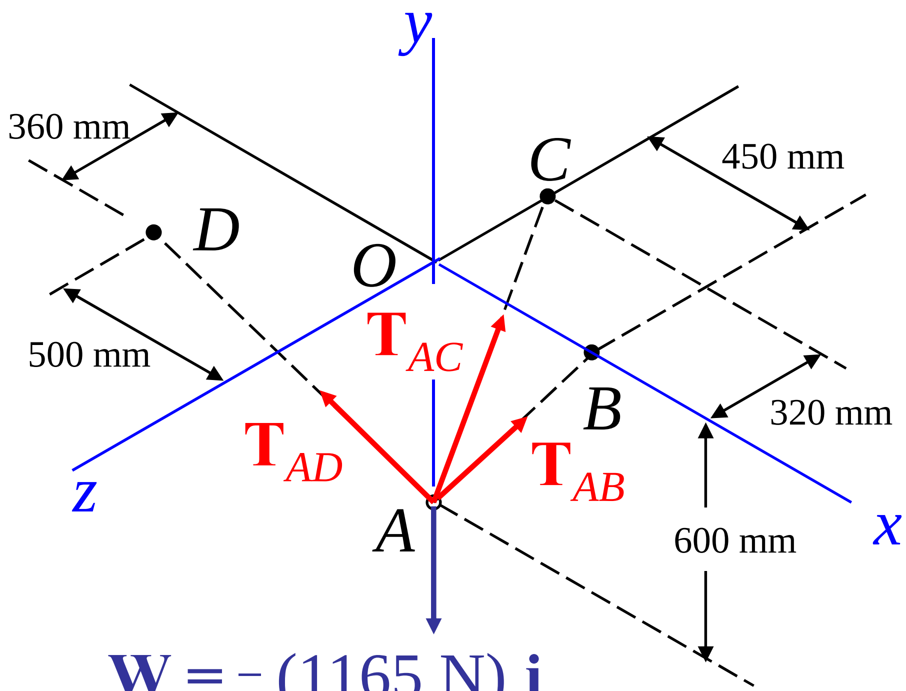
- **Exercício 2.2**

  Estática: equilíbrio estático

Um reservatório suspenso em 3 cabos suporta um peso W=1165N. Determine a força que actua em cada cabo.



1. Desenhar o diagrama de corpo livre e verificar as forças que actuam no balde.



$$\mathbf{W} = -(1165\ \text{N})\,\mathbf{j}$$

2. Resolver cada força em coordenadas cartesianas.

$$\mathbf{F} = F\,\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\,\mathbf{i} + d_y\,\mathbf{j} + d_z\,\mathbf{k})$$

$\underline{\boldsymbol{AB}}$ = (450 mm)**i** + (600 mm)**j** AB = 750 mm

$\underline{\boldsymbol{AC}}$ = (600 mm)**j** – (320mm)**k** AC = 680 mm

$\underline{\boldsymbol{AD}}$ = (–500 mm)**i** + (600 mm)**j** + (360 mm)**k** AD = 860 mm

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB}\vec{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\vec{AB}}{AB} = T_{AB}\left(\frac{450}{750}\vec{i} + \frac{600}{750}\vec{j}\right) = T_{AB}\left(0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}\right)$$

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC}\vec{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\vec{AC}}{AC} = T_{AC}\left(\frac{600}{680}\vec{j} - \frac{320}{680}\vec{k}\right) = T_{AC}\left(\frac{15}{17}\vec{j} - \frac{8}{17}\vec{k}\right)$$

$$\vec{T}_{AD} = T_{AD}\vec{\lambda}_{AD} = T_{AD}\frac{\vec{AD}}{AD} = T_{AD}\left(\frac{-500}{860}\vec{i} + \frac{600}{860}\vec{j} + \frac{360}{860}\vec{k}\right) = T_{AD}\left(\frac{-25}{43}\vec{i} + \frac{30}{43}\vec{j} + \frac{18}{43}\vec{k}\right)$$

3. A soma das forças que actuam na partícula (balde) devem estar em equilíbrio.

$$0.6\,T_{AB} - \frac{25}{43}T_{AD} = 0 \Leftrightarrow \qquad T_{AB} = 0.9690\,T_{AD} \qquad (1)$$

$$0.8\,T_{AB} + \frac{15}{17}T_{AC} + \frac{30}{43}T_{AD} - 1165\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

$$-\frac{8}{17}T_{AC} + \frac{18}{43}T_{AD} = 0 \Leftrightarrow \qquad T_{AC} = 0.8895\,T_{AD} \qquad (3)$$

$$T_{AD} = 516\text{ N}\,;\; T_{AB} = 500\text{ N};\; T_{AC} = 459\text{ N}$$

- **Exercício 2.3**

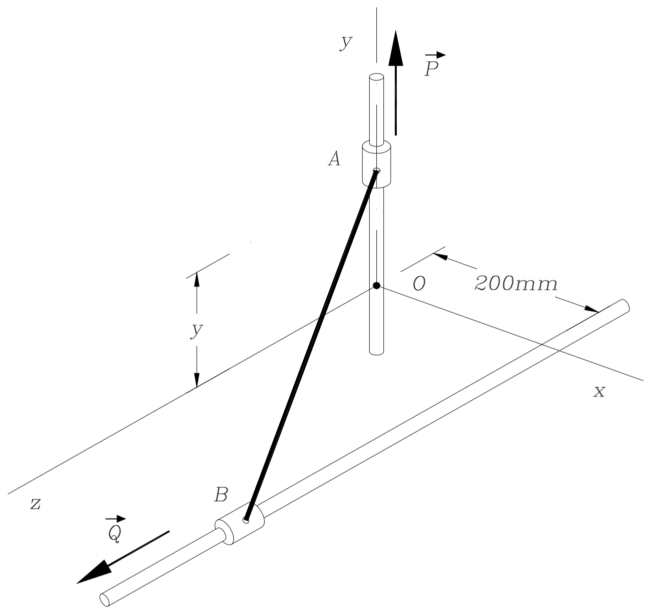
  Estática: equilíbrio estático

  Equilíbrio de cursores

Os cursores *A* e *B* estão ligados por um cabo com 525 *mm* de comprimento e podem deslizar livremente nas hastes sem atrito. Se a força P = (341 *N*) em y, for aplicada ao cursor *A*, determine:

(*a*) a força de tracção instalada no cabo quando *y* = 155 *mm*;

(*b*) a intensidade da força Q necessária para manter o equilíbrio do sistema.

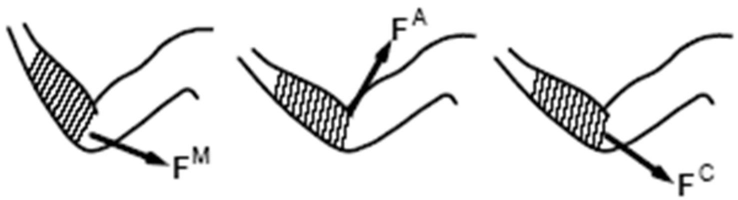


- **Exercício 2.4** **Estática: equilíbrio estático**

Força no cotovelo durante o balanço no basebol

As forças aplicadas nos ligamentos e tendões no cotovelo de um jogador foram medidas na direcção medial (M), anterior (A) e de compressão (C).

Os seus valores são: F^M=428N, F^A=101N, F^C=253N.



Os vectores unitários nas direcções referidas são:

$e^M=0.79e_1+0.17e_2+0.59e_3$

$e^A=0.21e_1-0.98e_2$

$e^C=-0.58e_1-0.12e_2-0.81e_3$

Com base nestes dados calcule a força resultante que actua no cotovelo.

Resposta:

A resultante da força que actua no cotovelo é igual à soma das três forças:

$F=(F^M)e^M+(F^A)e^A+ (F^C)e^C \Leftrightarrow$

$F=428(0.79e_1+0.17e_2+0.59e_3)+101(0.21e_1-0.98e_2)+253(-0.58e_1-0.12e_2-0.81e_3) \Leftrightarrow$

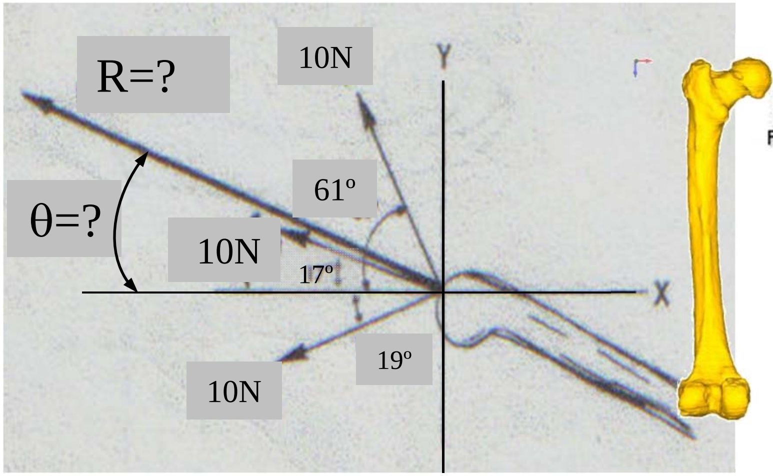
$F=212.8e_1-56.6e_2+47.6e_3$ [N] ou $F=225.3(0.94e_1-0.25e_2+0.21e_3)$ [N]

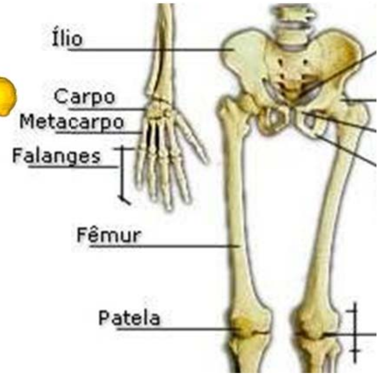
- **Exercício 2.5**

  Estática: equilíbrio estático

  Força no Fémur

  Há três forças de tracção de 10N e cada uma fazendo ângulos bem definidos com o sistema de eixo representado, que são aplicadas ao fémur. Calcule a resultante dessa forças e o ângulo que esta faz com a horizontal.

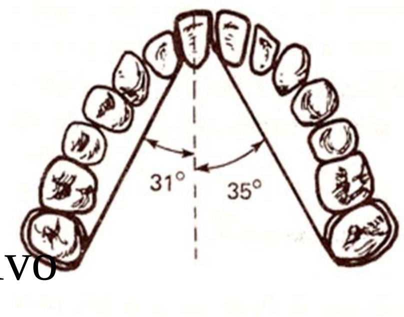


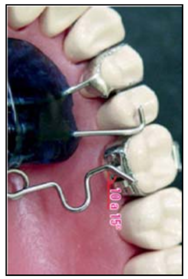


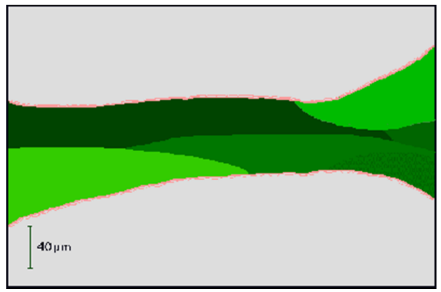
- **Exercício 2.6**

  Estática: equilíbrio estático

  Ortodontia aplicada no dente incisivo







A fim de forçar um dos dentes incisivos para alinhamento com os outros dentes da arcada, foi amarrado um elástico a dois molares, um de cada lado, passando pelo dente incisivo, como mostra a figura. Se a tracção no elástico for 12 N, quais serão a intensidade e a direcção da força aplicada ao dente incisivo?

Observação:

1- Os incisivos são dentes localizados medialmente na cavidade bucal (4 dentes incisivos na maxila e 4 na mandíbula), possuindo a função de corte dos alimentos no ato da mastigação.

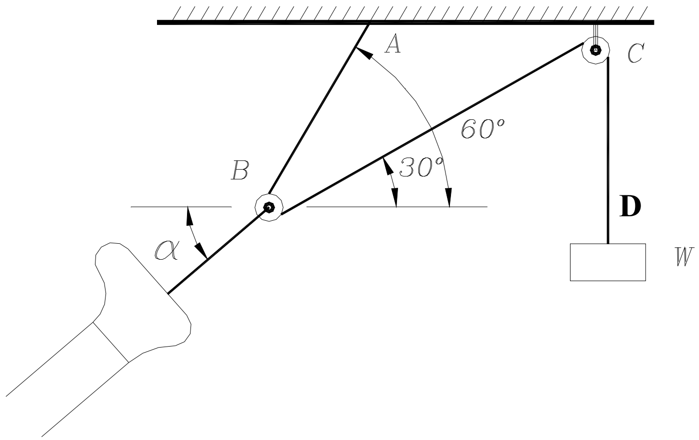
2- O dente não se move sem que exista absorção e deposição de tecido ósseo.

- **Exercício 2.7**

  Estática: equilíbrio estático

  Suspensão do membro inferior

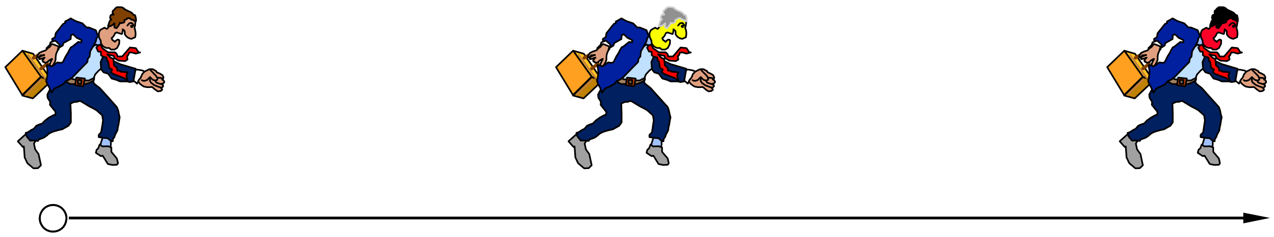
Para suspender a perna engessada de um paciente numa cama de hospital, utilizou-se um peso *W* e um cabo de peso desprezável que passa pelas duas roldanas *B* e *C* e que tem a outra extremidade fixa em *A*. Admite-se que as duas roldanas têm peso e dimensões desprezáveis e que estão perfeitamente lubrificadas, por forma a que a força de tracção nos três troços *AB*, *BC* e *CD* do cabo seja a mesma. Para a configuração indicada na figura, determine a intensidade, a direcção e o sentido da força exercida sobre a perna.



Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

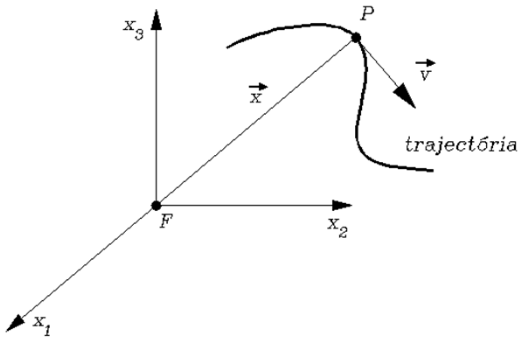
Cinemática da partícula ou ponto material

Posição, velocidade e aceleração em coordenadas cartesianas:



tempo t **tempo t+Dt**

Posição **X** **X+ΔX**



O movimento de uma partícula em linha recta designa-se **movimento rectilíneo**. Para definir a posição da partícula *P* nessa linha, escolhe-se uma origem fixa *O* e uma direcção positiva. A distância *x* de *O* a *P*, define completamente a posição da partícula na linha e chama-se a ***posição coordenada*** da partícula.

No instante t, *x (ou s)* define a ***posição*** da partícula.

•A posição x é representada por nºs algébricos que podem ser positivos ou negativos. Um valor positivo para *x* significa que a partícula se encontra na direcção positiva, e um valor negativo significa que se encontra na direcção negativa.

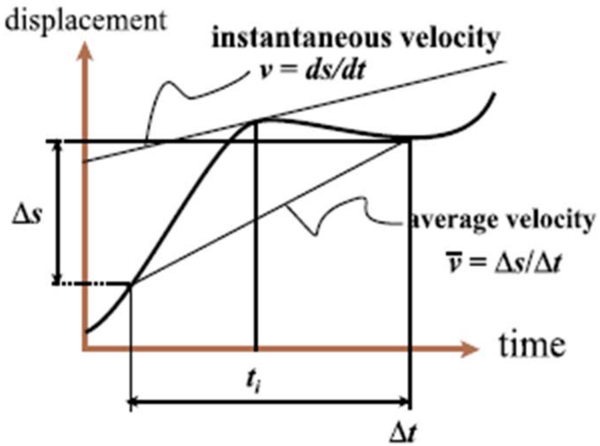
Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

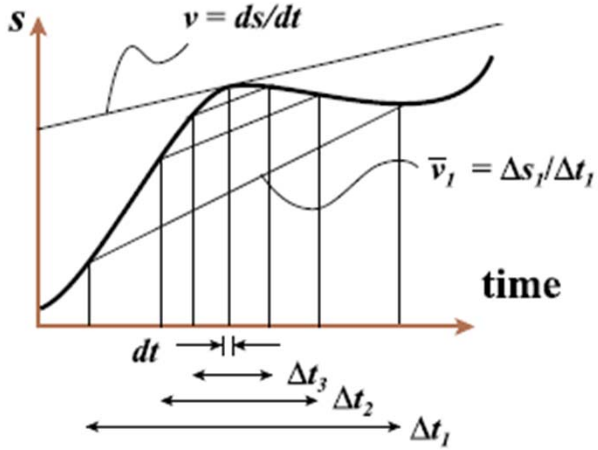
Cinemática da partícula ou ponto material

velocidade em coordenadas cartesianas: Conceito de velocidade média e instantânea.

A ***velocidade,*** *v,* da partícula é igual à derivada da posição *x (ou s)* em ordem ao tempo *t*:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}[L/T] \qquad v = \lim_{\Delta t -> 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}[L/T] = \frac{dx}{dt}$$





Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

Cinemática da partícula ou ponto material

Posição, velocidade e **aceleração** em coordenadas cartesianas

A ***aceleração a*** é obtida por diferenciação de ***v*** em ordem a ***t***,

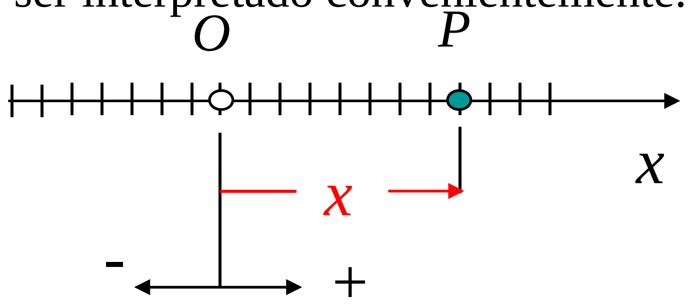
$$a = \lim_{\Delta t -> 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} [L / T^2] = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad a = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Ou ainda através de: $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

•A velocidade v e aceleração a são representadas por nºs algébricos que podem ser positivos ou negativos. Um valor positivo para v indica que a partícula se move na direcção positiva, e um valor negativo que se move na direcção negativa.

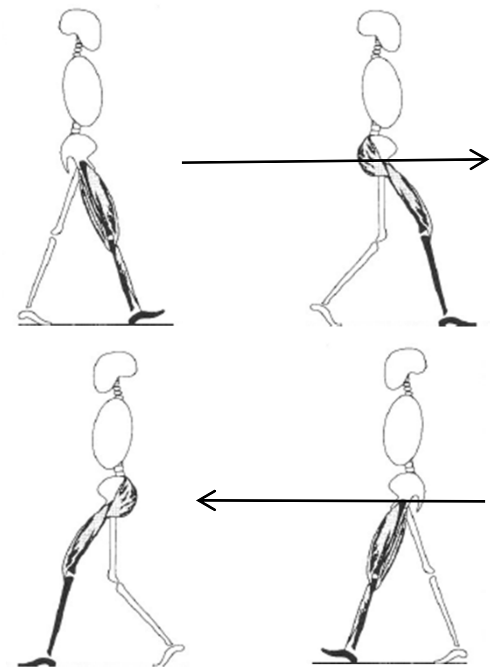
•Um valor positivo para a, contudo, pode significar que a partícula se movimenta rapidamente com movimento acelerado na direcção positiva, ou desacelera movendo-se devagar, na direcção negativa. Um valor negativo para a deve ser interpretado convenientemente.



Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Análise do sentido do movimento rectilíneo:**
  - Positivo numa direcção X;
- **Análise do sentido do vector velocidade:**
  - Positivo numa direcção X:
- **Sentido do vector aceleração:**
  - Positivo ou negativo numa direcção X. O sentido do movimento não indica o sentido do vector aceleração.

Sentido dos vectores		Sentido do vector velocidade	Alteração da velocidade: "+" significa mais rápido. "-" significa mais lento. "0" significa que mantém.
v ⇨	a ⇨	+	+
v ⇨	a=0	+	**0**
v ⇨	a ⇦	+	**-**
v ⇦	a ⇦	**-**	+
v ⇦	a=0	**-**	**0**



Exercício 2.8

Cinemática da partícula ou ponto material

Movimento de um ponto

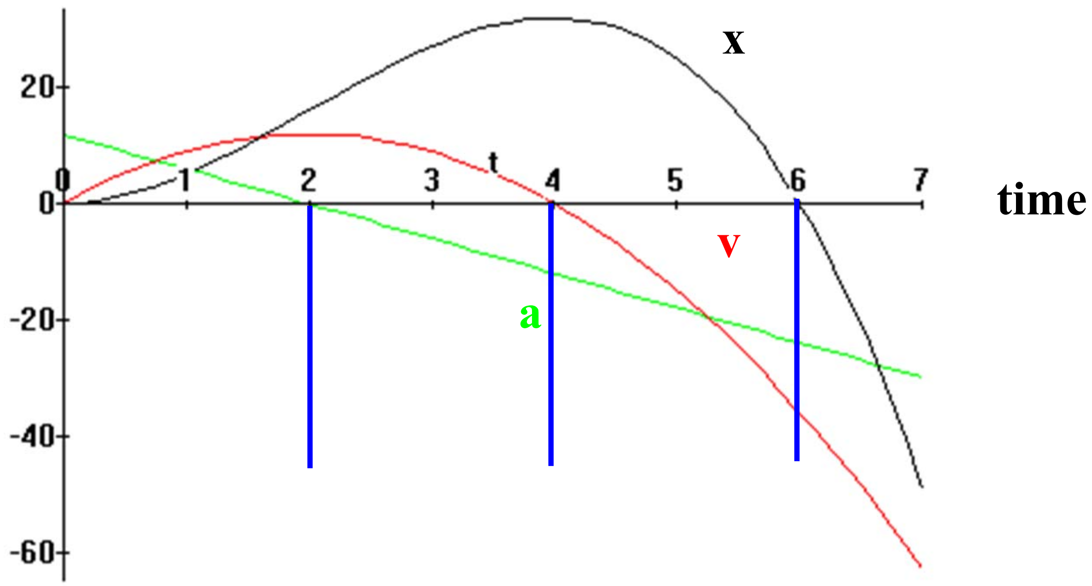
Quando um ponto material se movimenta em linha recta a sua posição é definida por:

$$x = 6t^2 - t^3$$

Calcule a velocidade instantânea e a aceleração para todos os instantes de tempo.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 12 - 6t$$



Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

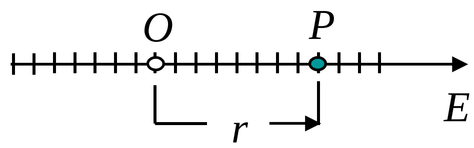
- **Exercício 2.9**

  Posição, velocidade e aceleração

  O vector posição de um ponto P em movimento no espaço, com origem num ponto fixo "O", considerando um referencial "E", é dado pela expressão:

  $r^{P/O}=(1.67+3t^2)[\cos(2t^2)e_1+\sin(2t^2)e_2]$

  Determine a velocidade e a aceleração do ponto P nesse referencial.



  Resposta:

  $v= [6t\cos(2t^2)-(6.7t+12t^3)\sin(2t^2)]e_1+ [6t\sin(2t^2)+(6.7t+12t^3)\cos(2t^2)]e_2$

  $a=[6\cos(2t^2)-24t^2\sin(2t^2)-(6.7+36t^2)\sin(2t^2)-(26.8t^2+48t^4)\cos(2t^2)]e_1+$
  $+[6\sin(2t^2)+24t^2\cos(2t^2)+(6.7+36t^2)\cos(2t^2)-(26.8t^2+48t^4)\sin(2t^2)]e_2$

- **Exercício 2.10**

  Posição, velocidade e aceleração

  A posição de um ponto material que se desloca em linha recta é definida pela relação x=t^3-6t^2-15t+40, onde x é expresso em metros e t em segundos (t>0). Determine:

  a) O instante em que a velocidade será nula.

  b) A posição e a distância percorrida pelo ponto até esse instante.

  c) A aceleração do ponto nesse instante.

Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

Cinemática da partícula ou ponto material

Tipos de movimento rectilíneo

Movimento rectilíneo uniforme, em que a velocidade *v* da partícula é constante.

$$\frac{dx}{dt} = v = ct \iff \int_{x0}^{x} dx = v\int_{0}^{t} dt \Rightarrow \quad x = x_o + vt$$

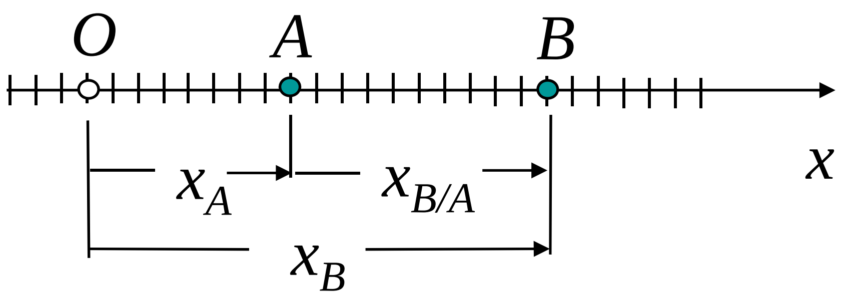
Movimento rectilíneo uniformemente acelerado, em que a aceleração a da partícula é constante.

$$\frac{dv}{dt} = a = ct \iff \int_{v0}^{v} dv = a\int_{0}^{t} dt \Rightarrow \quad v = v_o + at$$

$$\frac{dx}{dt} = v_o + at \iff \int_{x0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + at) dt \Rightarrow \quad x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v\frac{dv}{dx} = a \iff vdv = adx \iff \int_{v0}^{v} vdv = a\int_{x0}^{x} dx \Rightarrow \quad v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$$

Movimento relativo



Movimento relativo de 2 pontos materiais

$$x_B = x_A + x_{B/A}$$

Velocidade relativa

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

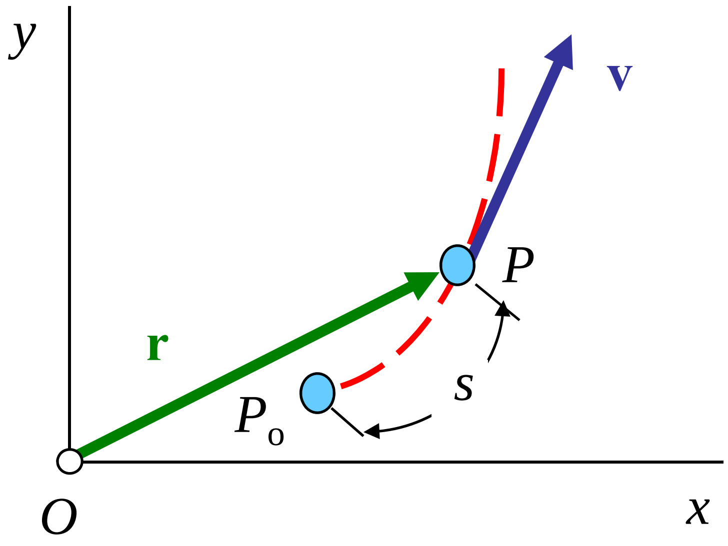
Aceleração relativa

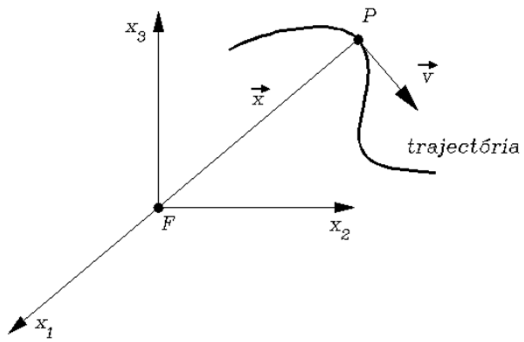
$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

Cinemática da partícula ou ponto material

Movimento curvilíneo





O movimento curvilíneo de uma partícula envolve o movimento da partícula sobre um caminho curvo.
A posição *P* da partícula, num dado instante tempo, é definida pelo vector posição *r* com origem em *O* no sistema de eixos coordenados a *P*.

A velocidade **v** da partícula é definida pela relação

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

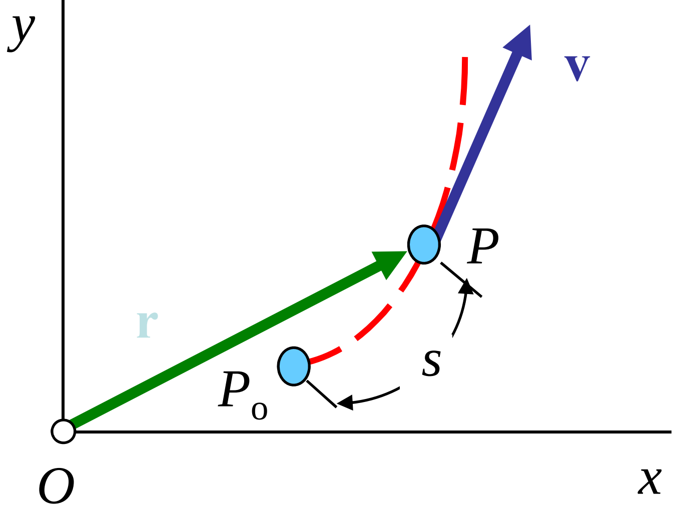
O vector ***velocidade é tangente à trajectória da partícula***, e tem magnitude *v* igual à derivada em ordem ao tempo do espaço s percorrido pela partícula:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

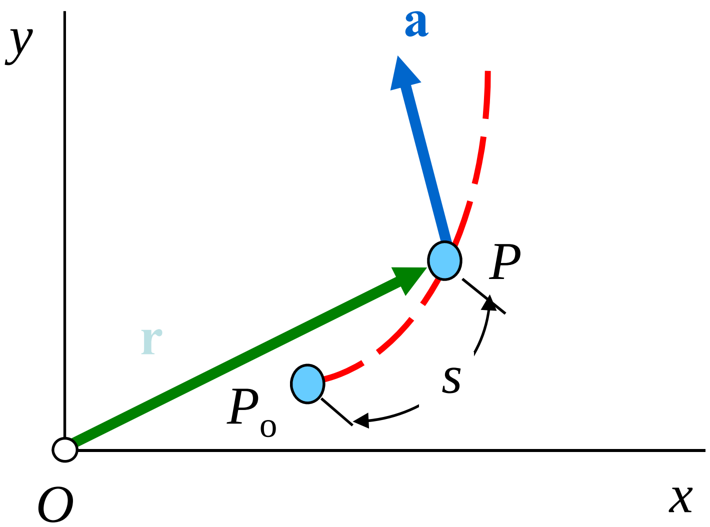
Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

Cinemática da partícula ou ponto material

Movimento curvilíneo



$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \longrightarrow v = \frac{ds}{dt}$$

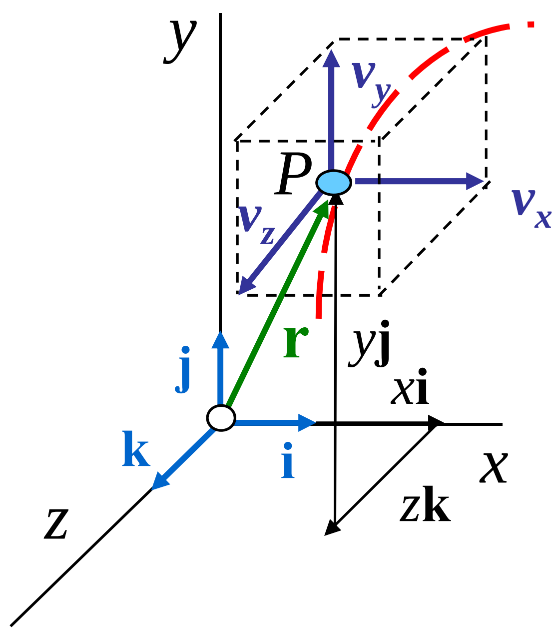


Nota: Em geral, a aceleração **a** da partícula não é ***tangente ao caminho da partícula***. É definida pela relação:

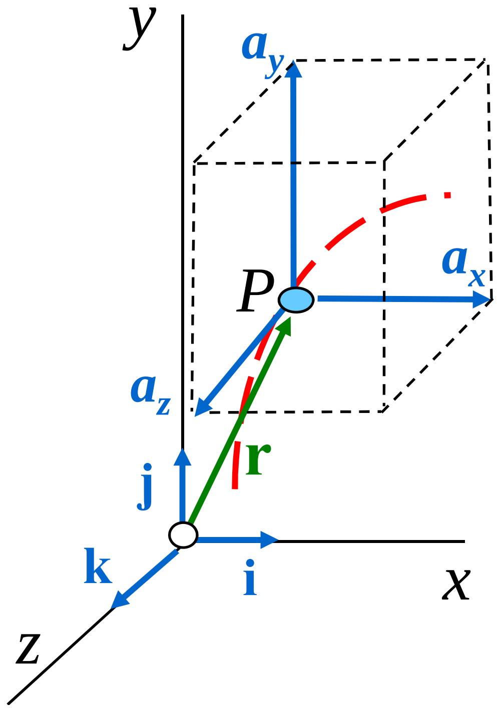
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Cinemática da partícula ou ponto material

Movimento geral em coordenadas cartesianas



x, y, e z são as coordenadas rectangulares da partícula P, então as componentes cartesianas rectangulares da velocidade e da aceleração de P são iguais, respectivamente, à primeira e segunda derivadas em ordem a t :



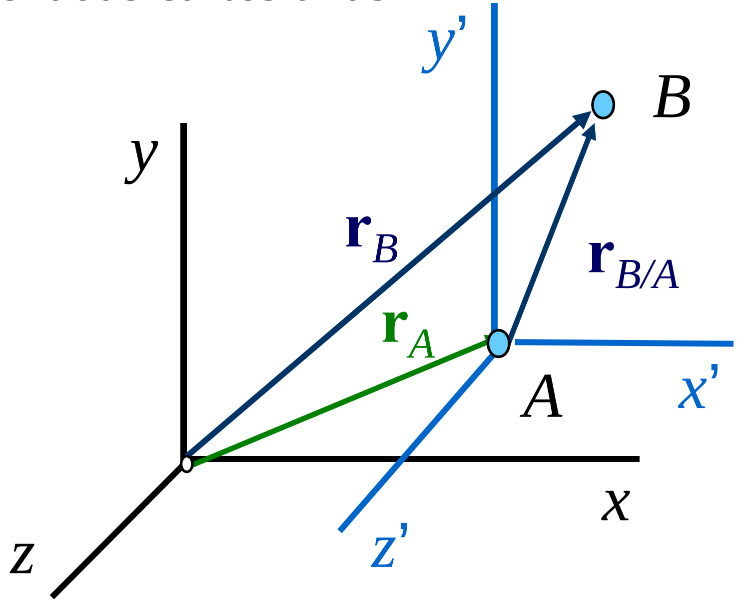
$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z}$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z}$$

O uso de componentes rectangulares é útil no estudo de movimento de projecteis.

Cinemática da partícula ou ponto material

Movimento relativo entre 2 partículas em coordenadas cartesianas



Para 2 partículas *A* e *B* em movimento no espaço, o movimento relativo de *B* em relação a *A*, em relação ao referencial fixo em *A* em translação em relação à origem. Sendo $\mathbf{r}_{B/A}$ o vector posição relativo de *B* em relação a *A* , teremos:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Sendo $\mathbf{v}_{B/A}$ e $\mathbf{a}_{B/A}$, respectivamente, a velocidade relativa e a aceleração relativa de B em relação a A, temos:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

e

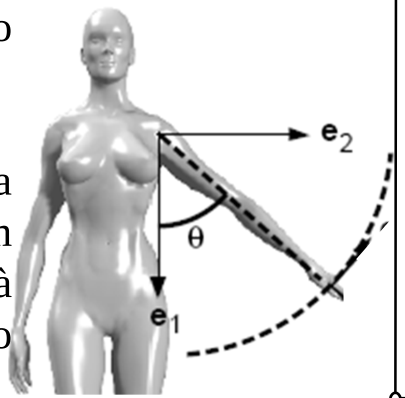
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

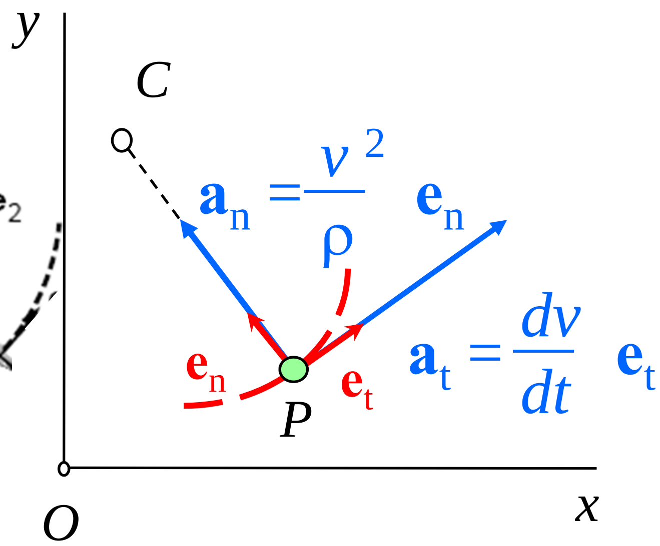
Cinemática da partícula ou ponto material

Movimento geral em coordenadas curvilíneas ou intrínsecas

Por vezes é inconveniente representar as componentes da aceleração e velocidade em função das componentes rectangulares *x*, *y*, e *z*.

Para uma partícula *P* movendo-se numa trajectória plana curva, não necessariamente circular, podem ser definidos em *P* os vectores unitários $\mathbf{e}_t$ tangente à trajectória e $\mathbf{e}_n$ normal à trajectória com sentido dirigido para o centro de curvatura.





O sistema de eixos acompanha o movimento do ponto.

A velocidade e aceleração são expressas em função das componentes tangencial e normal.

A velocidade da partícula é tangente à trajectória e dada pela expressão: $\vec{v} = \|\vec{v}\| \, \vec{e}_t$

A aceleração é dada pela expressão:

$$\vec{a} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

Nota: - *v* é a velocidade da partícula
- ρ é o raio de curvatura da trajectória.
- O vector velocidade **v** é tangente à trajectória.
- O vector aceleração **a** consiste na componente $\mathbf{a}_t$ tangente à trajectória e a componente $\mathbf{a}_n$ na direcção do centro de curvatura.

Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

Cinemática da partícula ou ponto material

Movimento geral em coordenadas curvilíneas ou intrínsecas

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n$$

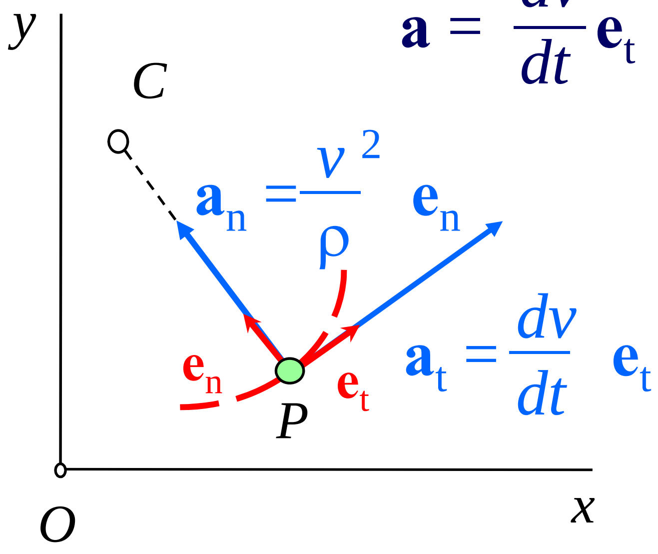
$$\vec{v} = V\vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{e}_t + V\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$= \frac{dV}{dt}\vec{e}_t + V\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

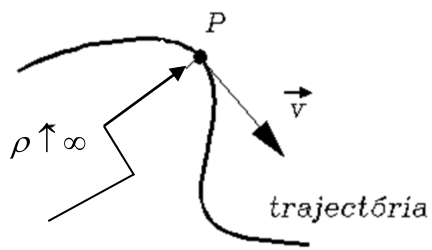
$$= \frac{dV}{dt}\vec{e}_t + V\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{dV}{dt}\vec{e}_t + V\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}\frac{1}{\rho}V$$



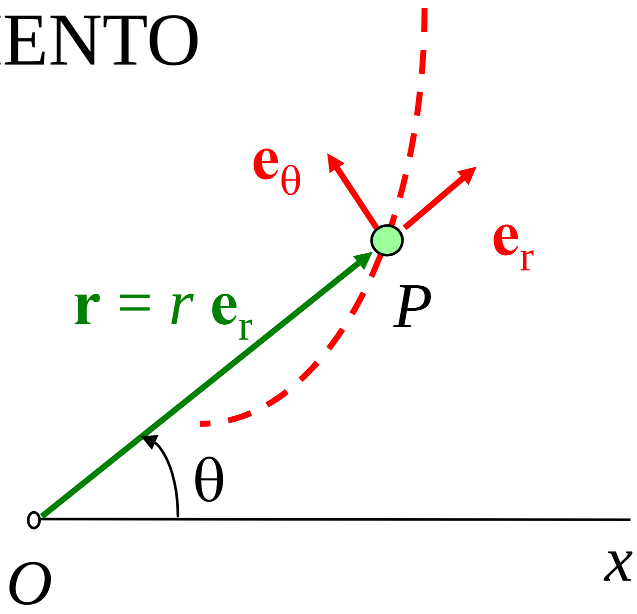
Nota1: Se um ponto material se deslocar numa trajectória curva com velocidade uniforme (V=const) a aceleração não será nula!

Nota2: A excepção acontece unicamente num ponto de inflexão da curva!



Cinemática da partícula ou ponto material

Movimento em coordenadas polares



Quando a posição da partícula se move num plano definido em coordenadas polares r e θ, é conveniente utilizar as componentes radial e transversal sobre o vector posição **r** da partícula e na direcção obtida por rotação de 90º no sentido anti-horário, respectivamente.

$\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{e}_\theta$ são os vectores unitários localizados em *P* na direcção radial e transversal. Os vectores velocidade e aceleração da partícula, em função das componentes radial e transversal, são:

Nota: é importante notar que a_r não é igual à derivada em ordem ao tempo de v_r e que a_θ não é igual à derivada de v_θ.

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \vec{e}_\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\vec{a} = \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r} \cdot \vec{e}_\theta \cdot \dot{\theta} + r \cdot \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \vec{e}_\theta \cdot \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

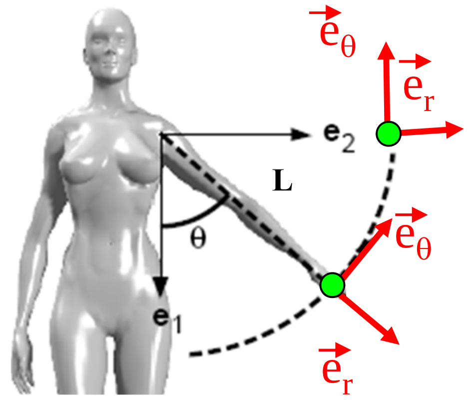
$$= \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta + \dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \dot{\theta} \cdot \left(-\vec{e}_r\right) \cdot \dot{\theta} + r \cdot \vec{e}_\theta \cdot \ddot{\theta}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \cdot \vec{e}_r + \left(r \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot\right) \cdot \vec{e}_\theta$$

Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Exercício 2.11**

 Movimento do braço numa aula de aeróbia



Uma instrutora de aeróbia faz um movimento de abdução, leva o seu braço da posição vertical à posição horizontal do seu ombro em 0.6 segundos num ritmo constante. Determine a velocidade e a aceleração na extremidade do braço, assumindo um comprimento do segmento igual a 0.36m.

Resposta:

$\theta=\pi/2$ rad= posição angular

$\dot{\theta} = d\theta/dt = \pi/1.2$

$\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2=0$

$v=0.99[m/s]e_\theta$

$a=-2.6[m/s^2]e_r$

Resolução em coordenadas polares:

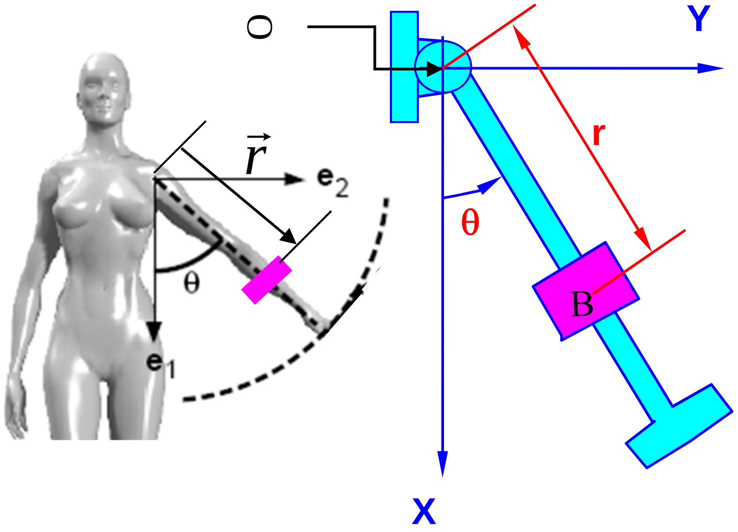
$$\vec{r} = r\cdot\vec{e}_r = 0{,}36\cdot\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\cdot\vec{e}_r + r\cdot\dot{\theta}.\vec{e}_\theta = 0{,}36.\frac{\pi}{1{,}2}.\vec{e}_\theta = 0{,}99\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\cdot\vec{e}_r + \left(r\cdot\ddot{\theta} + 2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\right)\cdot\vec{e}_\theta =$$

$$= \left(-0{,}36.\frac{\pi}{1{,}2}.\frac{\pi}{1{,}2}\right)\cdot\vec{e}_r = -2{,}6\cdot\vec{e}_r$$

- **Exercício 2.12 movimento relativo**



- O braço com comprimento de 0.9 [m] roda em torno da articulação O com base na expressão:

$$\theta = 1{,}5\times10^{-1}t^2$$

- A pulseira B movimenta-se ao longo do braço sem atrito em função da expressão:

$$r = 0{,}9 - 0{,}12t^2$$

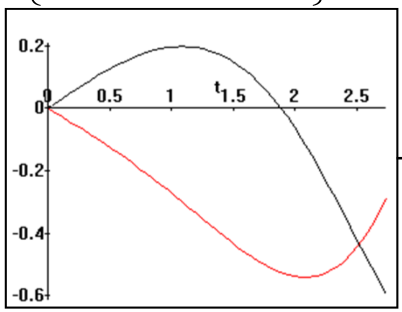
- Calcule :

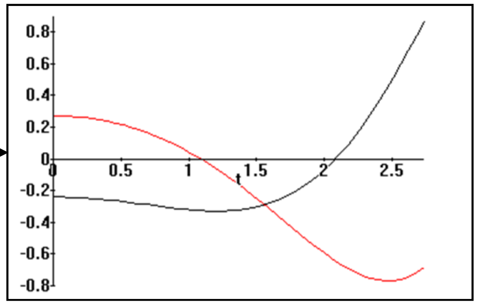
a) as expressões para a posição instantânea, velocidade e aceleração da pulseira B.

b) a velocidade e aceleração de B, após uma rotação do braço de 30º=0.52 [rad], correspondente a 1.87[s].

Resolução em coordenadas Cartesianas:

$$\vec{r} = (r\cos\theta)\vec{i} + (r\sin\theta)\vec{j} \longrightarrow \vec{v} = \begin{Bmatrix} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} \longrightarrow \vec{a} = \begin{Bmatrix} \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix}$$

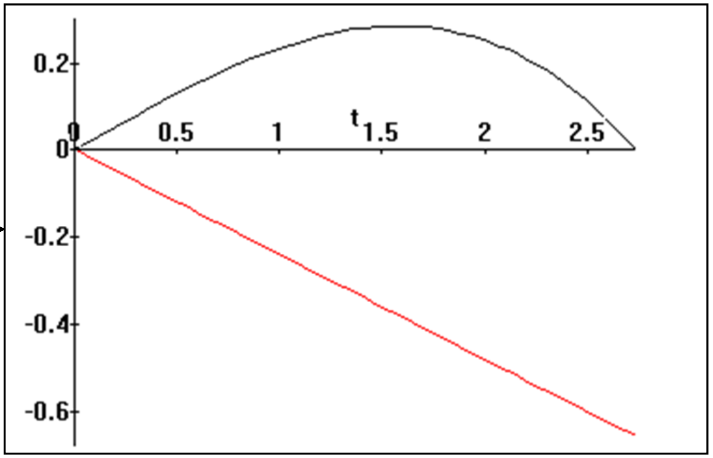




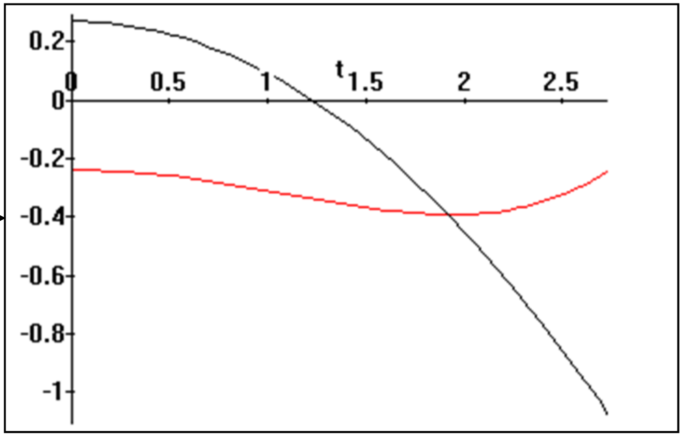
Resolução em coordenadas Polares:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$
$$= (-0.24\cdot t)\vec{e}_r + (0.9 - 0.12\cdot t^2)(0.3\cdot \mathrm{t})\vec{e}_\theta$$
$$= (-0.24\cdot t)\vec{e}_r + (0.27\cdot t - 0.036\cdot t^3)\vec{e}_\theta$$



$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$
$$= (-0.24 - (0.9 - 0.12\cdot t^2)(0.3\cdot t))\vec{e}_r + (2(-0.24\cdot t)(0.3\cdot t) + (0.9 - 0.12\cdot t^2)(0.3))\vec{e}_\theta$$
$$= (-0.24 - 0.27\cdot t + 0.036\cdot t^3)\vec{e}_r + (-0.180\cdot t^2 + 0.27)\vec{e}_\theta$$



- Análise escalar em coordenadas polares:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

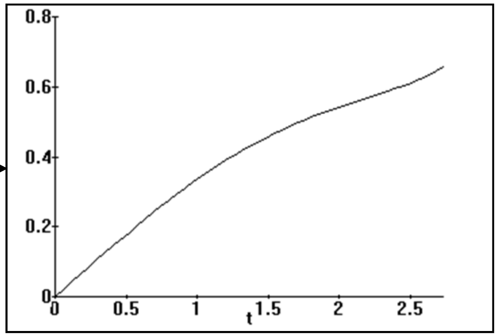
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^2}$$

- Análise escalar em coordenadas cartesianas:

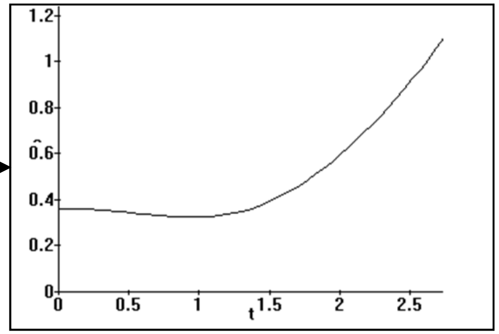
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2} = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta)^2 + (\ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta)^2}$$
$$= \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^2}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$



$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$



Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

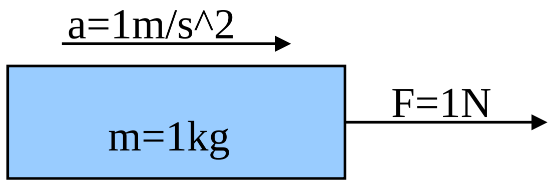
- **Dinâmica da partícula ou ponto material: 2ª lei de Newton (momento linear)**

  Aplicações da lei de movimento

2ª lei de Newton

‘’um ponto material submetido a uma força não nula adquire uma aceleração com módulo proporcional ao módulo da força e na mesma direcção e sentido desta”.

1N=(1kg)(1m/s^2)=1kg.m/s^2



Sendo m a massa da partícula, Σ **F** o somatório ou resultante, das forças que actuam na partícula, e ***a*** a aceleração relativa a um referencial *newtoniano*, então:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}} = m\, d\mathbf{v}/dt = d(m\mathbf{v})/dt = d(\mathbf{L})/dt$$

Quantidade de movimento de um ponto material

Introduzindo a noção de ***momento linear*** da partícula, **L** = m**v**, a 2ª lei de Newton pode ser escrita na forma:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \dot{\vec{L}}}$$

L=m.v

L=(kg)(m/s)=kg.m/s

que expressa que a resultante das forças que actuam na partícula é igual à *derivada do momento linear*.

Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Dinâmica da partícula ou ponto material: 2ªlei de Newton**

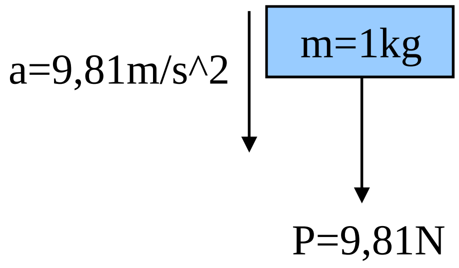
  Aplicações da lei de movimento

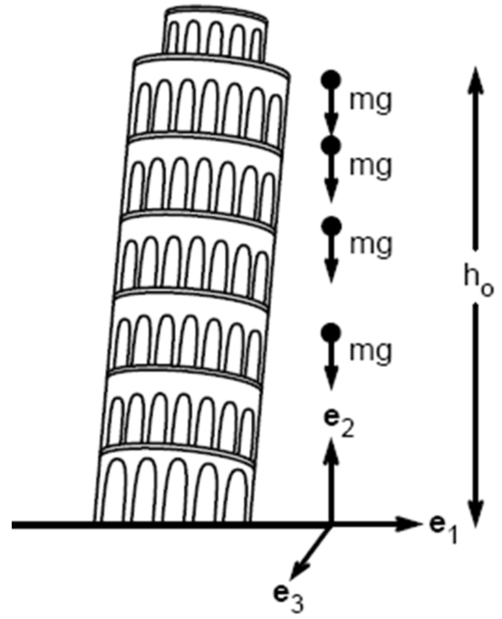
  I - Queda livre de um objecto

  A queda livre de uma bola tem aceleração constante (g). Esta aceleração denomina-se aceleração da gravidade. A força que causa essa aceleração da gravidade é o peso desse objecto (mg).

  P=m.g

  P=(1kg)(9,81m/s^2)=9,81N





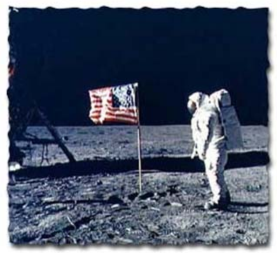
- **Exercício 2.13 (unidades)**

  i) Um homem com 95kg de massa na terra, a que peso corresponde em Newton?

  P=95x9,8=931,95N

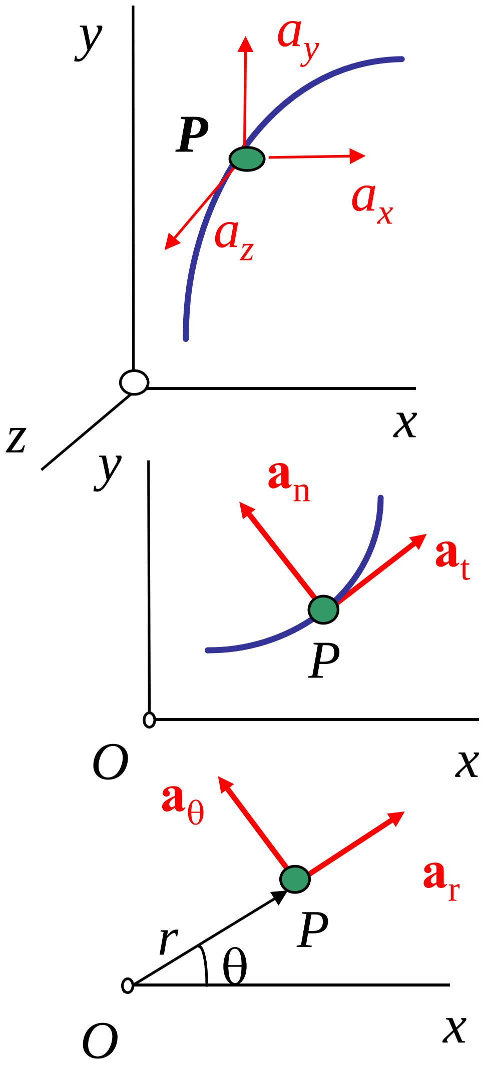
  ii) O mesmo homem na lua que peso tem, sabendo que a aceleração da gravidade na lua é de 1,62m/s^2?

  P=95x1,62=153,9N



- **Dinâmica da partícula ou ponto material: 2ªlei de Newton**

Aplicações da lei de movimento



Para **resolver um problema** que envolva movimento da partícula, $\Sigma\, \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ deve ser equacionada na forma:

Componentes cartesianas ou rectangulares

$$\Sigma\, F_x = ma_x \qquad \Sigma\, F_y = ma_y \qquad \Sigma\, F_z = ma_z$$

Componentes intrínsecas: tangencial e normal

$$\Sigma\, F_t = ma_t = m\,\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma\, F_n = ma_n = m\,\frac{v^2}{\rho}$$

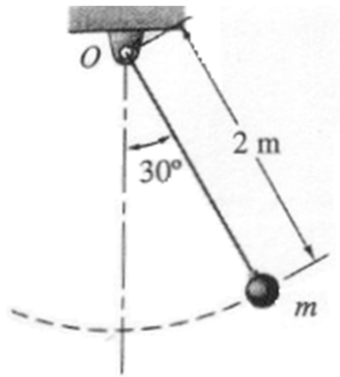
Componentes polares: radial e transversal

$$\Sigma\, F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\Sigma\, F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

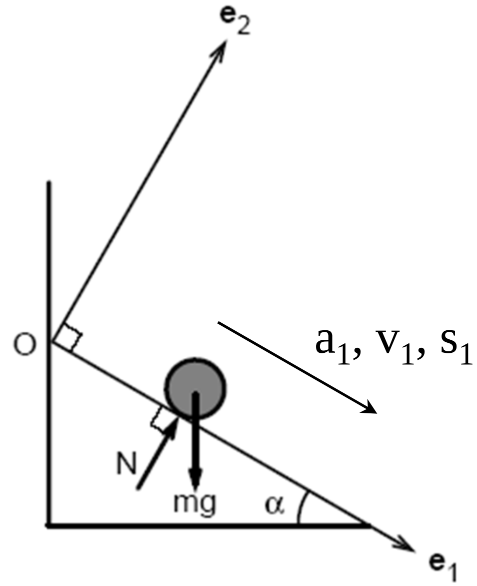
- **Exercício 2.13 (Pêndulo Simples)**

Um pêndulo simples com 2m de comprimento descreve um arco de circunferência no plano vertical. Sabe-se que para a posição representada, a força exercida na corda é igual a 2,5 vezes o peso do pêndulo, calcule a velocidade e a aceleração o pêndulo nessa posição.



- **Dinâmica da partícula ou ponto material: 2ªlei de Newton**

Aplicações da lei de movimento



II – Movimento de uma esfera num plano inclinado

Uma bola desliza num plano inclinado sem atrito. O diagrama representa as forças que actuam na bola. Neste caso o movimento da bola é no sentido de e_1, assim aplicando a 2ª lei de Newton:

$$mg\sin\alpha\,\vec{e}_1 - mg\cos\alpha\,\vec{e}_2 + N\,\vec{e}_2 = ma_1\,\vec{e}_1$$

Com base nesta equação vectorial conclui-se que:

$$\vec{e}_1: \quad a_1 = g\sin\alpha$$
$$\vec{e}_2: \quad N = mg\cos\alpha$$

Integrando a aceleração a_1 em relação ao tempo é possível obter as expressões da velocidade v_1 e da distância s_1 percorrida:

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} \Rightarrow \int_{v_{10}}^{v_1} dv_1 = \int_0^t g\,\sin(\alpha)dt \Leftrightarrow v_1 - v_{10} = gt\sin(\alpha) \Leftrightarrow v_1 = v_{10} + g\,t\sin\alpha$$

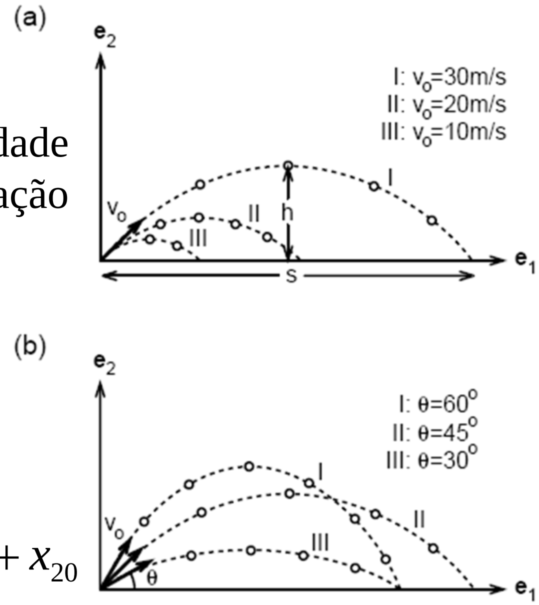
$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} \Rightarrow \int_{s_{10}}^{s_1} ds_1 = \int_0^t (v_{10} + g\,t\sin\alpha)dt \Leftrightarrow s_1 = s_{10} + v_{10}\,t + g\,(t^2/2)\sin\alpha$$

v_{10} e s_{10} são constantes dependentes das condições iniciais do problema.

- **Dinâmica da partícula ou ponto material: 2ªlei de Newton**

Aplicações da lei de movimento

III – Trajectória parabólica de uma bola de golfe



Determine a trajectória de uma bola de golfe lançada com uma velocidade inicial v_0 e com uma inclinação α em relação ao plano horizontal. A equação do movimento, desprezando a resistência do ar é dada por:

$$-mge_2 = m\left(dv_1/dt\, e_1 + dv_2/dt\, e_2 + dv_3/dt\, e_3\right)$$

Neste caso: $dv_1/dt = 0$

$dv_2/dt = -g$

$dv_3/dt = 0$

Integrando em ordem ao tempo: $\begin{cases} v_1 = v_{10} \\ v_2 = -gt + v_{20} \\ v_3 = v_{30} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = v_{10}t + x_{10} \\ x_2 = -gt^2/2 + v_{20}t + x_{20} \\ x_3 = v_{30}t + x_{30} \end{cases}$

Assumindo que a bola está na origem: $x_{10} = x_{20} = x_{30} = 0$

V_0 é a velocidade da bola para t=0s $\quad v_{10} = V_0 \cos\theta$

$v_{20} = V_0 \sin\theta$

$v_{30} = 0 \quad t = 0$

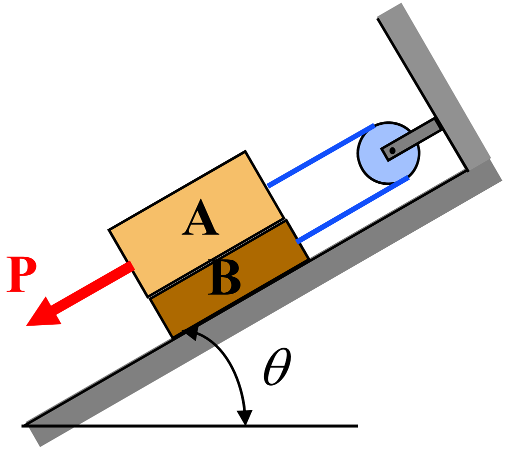
As equações da trajectória: $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} x_1 &= V_0\, t\cos\theta \\ x_2 &= V_0\, t\sin\theta - gt^2/2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}}$

A altura máxima que a bola atinge e distância percorrida na direcção 1.

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 \longrightarrow t^* = (V_0/g)\sin\theta \quad , \quad h^{\max} = x_2(t^*) = \left(V_0^2/2g\right)\sin^2\theta$$

$$s/2 = x_1\left(t^*\right) \Leftrightarrow s = \left(2V_0^2/g\right)\sin\theta\cos\theta$$

- **Exercício 2.14 2ªlei de Newton**
  Deslizamento de caixas

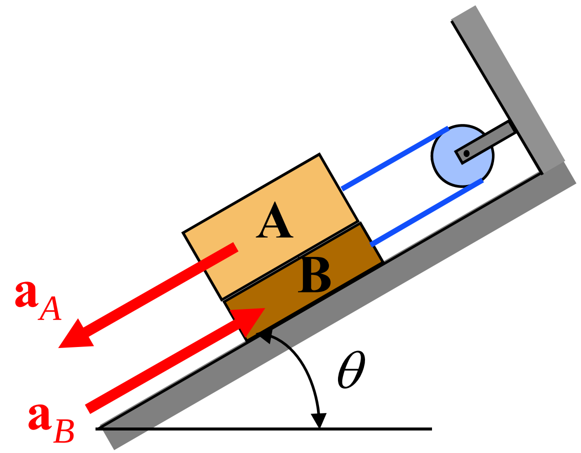


As caixas *A* e *B* são transportadas num sistema tapete rolante. A caixa *A* tem uma massa de 30 [kg] e a *B* uma massa de 15 [kg].
O coeficiente de atrito entre as várias superfícies de contacto é de μ_s = 0.15 e μ_k = 0.10.
Sabendo que θ = 30º e que a magnitude da força **P** aplicada na caixa *A* é 250N, determine:
(a) A aceleração do bloco *A*;
(b) A força de tracção na corda.

1. cinemática: determinação da aceleração das partículas.

Assumir que o movimento de *A* é para baixo.
Se A se movimenta e tem aceleração para baixo, a caixa B movimenta-se para cima com a mesma aceleração.

$$\boxed{a_A = a_B}$$

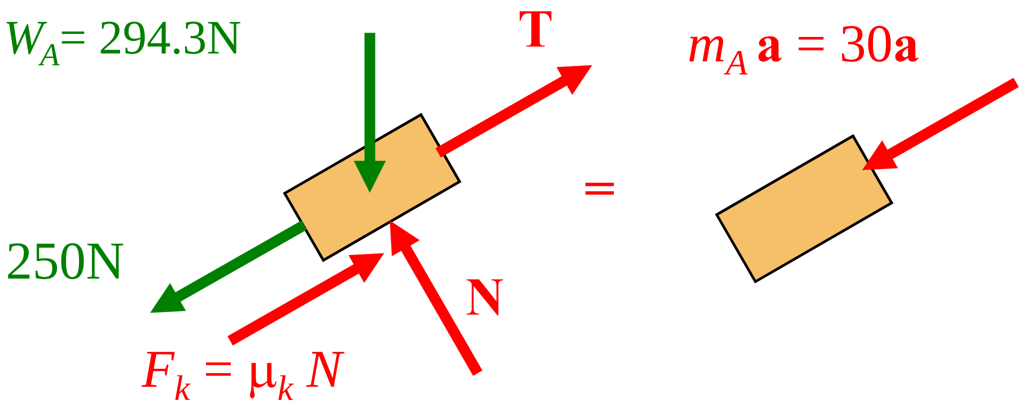


Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

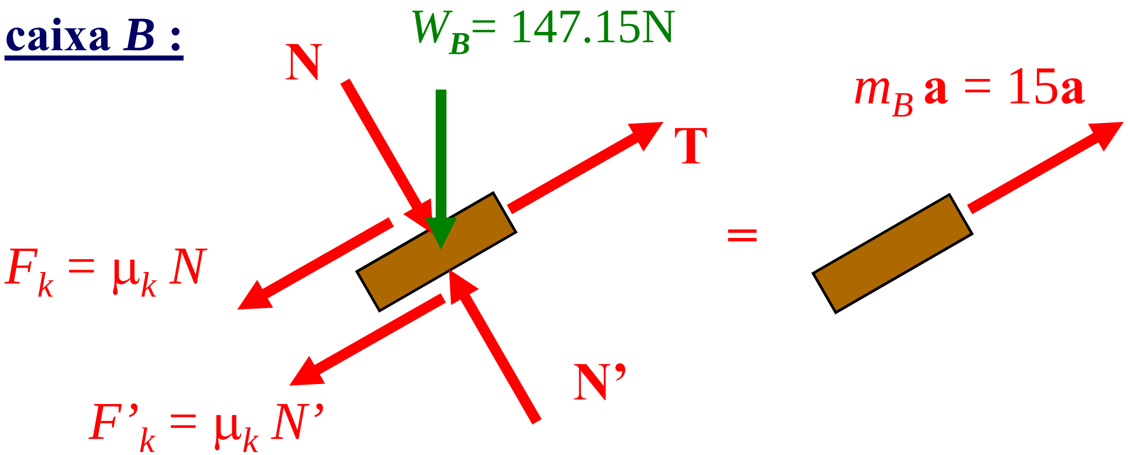
- **Exercício 2.14 2ªlei de Newton**

2. Dinâmica: fazer diagrama de corpo livre com as forças aplicadas e o vector força equivalente *ma*.

caixa *A* :



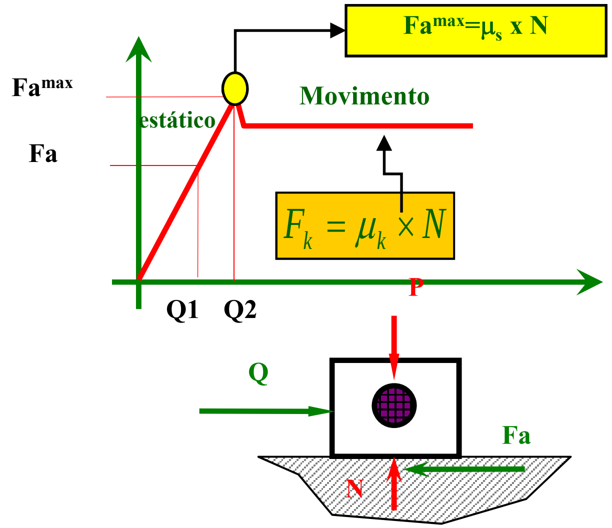
caixa *B* :



3. Quando o problema envolve fricção: é necessário 1º assumir que o movimento é possível e verificar essa validade.

A força de fricção na superfície é em movimento $F = \mu_k N$.

A força de fricção na superfície quando o movimento é iminente é $F = \mu_s N$.

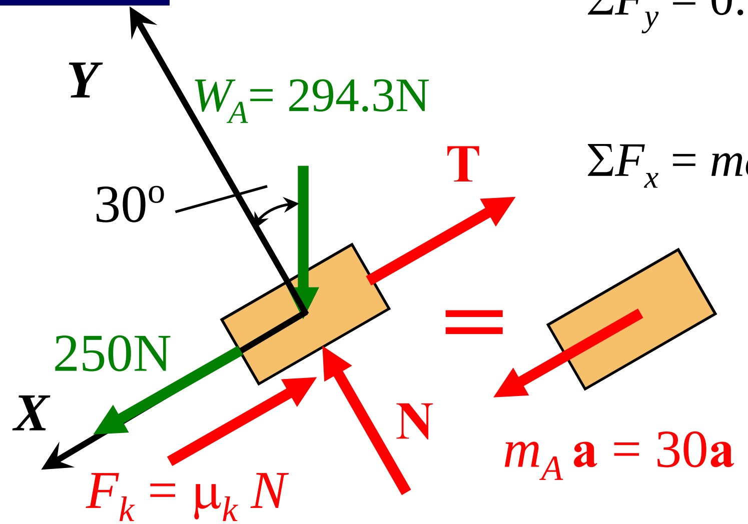


Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Exercício 2.14 2ªlei de Newton**

4. Aplicar 2ª lei Newton: A relação entre as forças que actuam na partícula, a massa e a aceleração é dada por $\Sigma F = ma$. O vector F e a podem ser expressos através das componentes rectangulares ou tangencial e normal.

Caixa *A* :



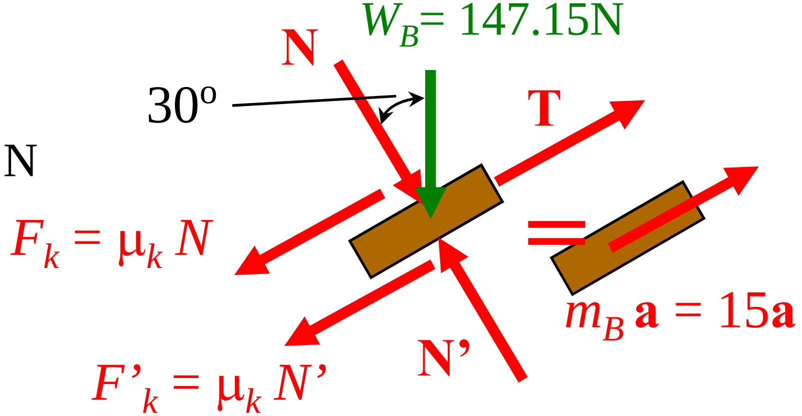
$\Sigma F_y = 0$: N - (294.3) cos 30º = 0 N = 254.87 N

então: $F_k = \mu_k N$ = 0.10 (254.9) = 25.49 N

$\Sigma F_x = ma$: 250 + (294.3) sin 30º - 25.49 - T = 30 a

então: 371.66 - T = 30 a (1)

Caixa *B* :



$\Sigma F_y = 0$: N' - N - (147.15) cos 30º = 0 : N' = 382.31 N

então: $F'_k = \mu_k N'$ = 0.10 (382.31) = 38.23 N

$\Sigma F_x = ma$: T - F_k - F'_k - (147.15) sin 30º = 15 a

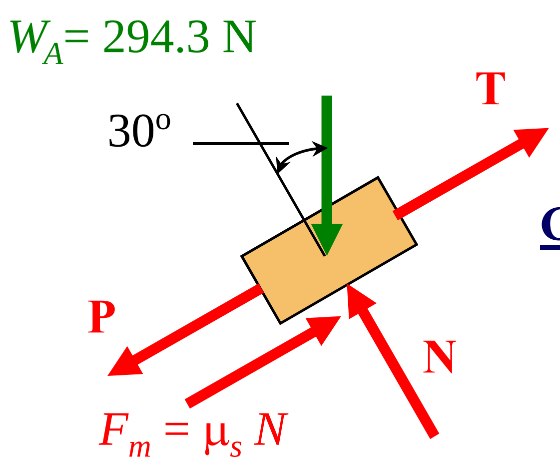
então: T - 137.29 = 15 a (2)

Resolvendo a equação (1) e (2) dá: $\boxed{T = 215 \text{ [N]} \qquad a = 5.21 \text{ [m/s}^2\text{]}}$

- **Exercício 2.14 2ªlei de Newton**

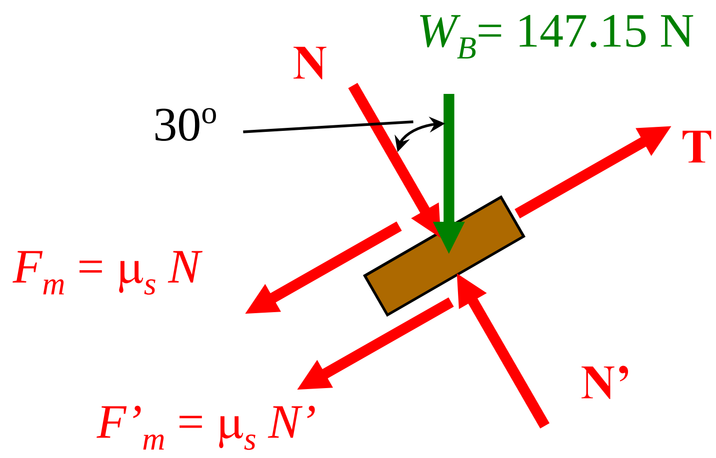
5. Verificação da hipótese do movimento.

Deve ser verificado qual o valor da força P, para o qual o movimento é iminente. Para esse movimento iminente ambos as caixas estão em equilíbrio:



Caixa *A*:

Caixa *B*:



Do equilíbrio estático:

$\Sigma F_y = 0$: $N = 254.87$ N $\rightarrow F_m = \mu_s N = 0.15\,(254.87) = 38.23$ N

$\Sigma F_y = 0$: $N' = 382.31$ N $\rightarrow F'_m = \mu_s N' = 0.15\,(382.31) = 57.35$ N

$\Sigma F_x = 0$: $P + (294.3)\sin 30^\circ - 38.23 - T = 0$ (3)

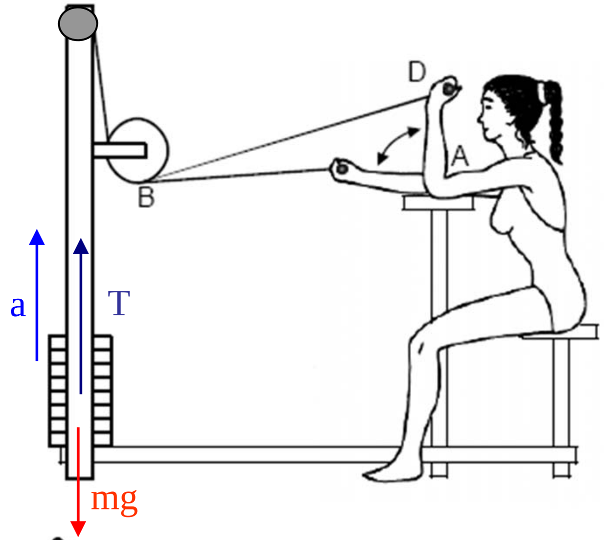
$\Sigma F_x = 0$: $T - 38.23 - 57.35 - (147.15)\sin 30^\circ = 0$ (4)

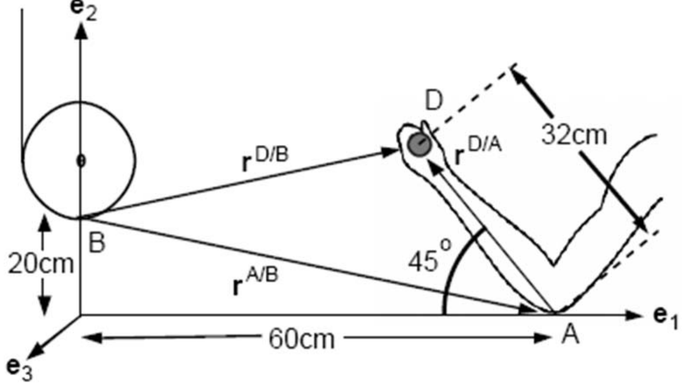
Resolvendo as equações (3) e (4) dá *P* = 60.2N. A actual força *P* (250N) é maior que o valor para o qual o movimento é iminente (60.2N).

- **Exercício 2.15 2ªlei de Newton**

Máquina para exercitar os músculos

Conforme a figura, uma desportista exercita os seus músculos através de um dispositivo, utilizando uma massa de 10 [kg]. A distância na horizontal entre o seu cotovelo (A) a base da roldana (B) é de 60 [cm], sendo a distância na vertical entre esses pontos de 20 [cm]. Determine a força exercida no braço da desportista quando este está inclinado de 45º em relação à direcção horizontal. Nesse momento a massa no sistema tem uma aceleração ascendente de 3 [m/s^2], conforme representado na figura.





Resposta:

Com base na 2ªlei de Newton, o cálculo para a força no cabo pode ser efectuado pelo equilíbrio dinâmico da massa:

$\boldsymbol{T}$-10x9.81=10x3 ⇔ $\boldsymbol{T}$=128.1 [N]

Considerando as forças que actuam em (D) é possível determinar a força que é exercida no braço da desportista:

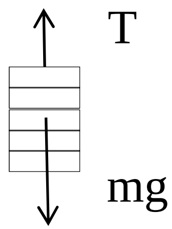
$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{T}\ \mathbf{e}^{D/B}$

$\mathbf{r}^{D/B}=\mathbf{r}^{A/B}+\mathbf{r}^{D/A}$

$\mathbf{r}^{D/B}=(0.6e_1-0.2e_2)+(-0.32\cos 45^o e_1+0.32\sin 45^o e_2)= 0.37e_1+0.03e_2$

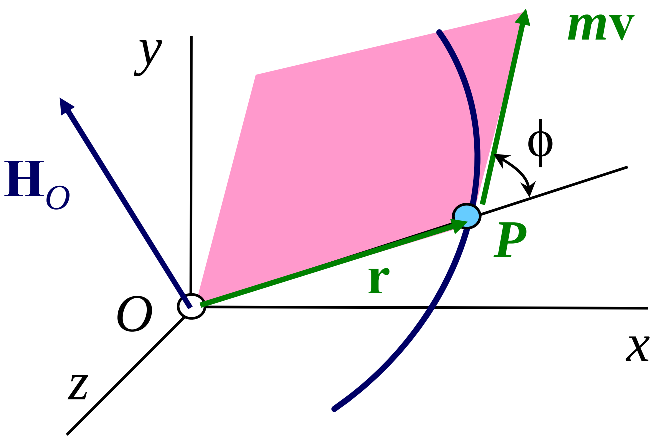
$e^{D/B}=(0.37e_1+0.03e_2)/SQRT(0.37^2+0.03^2)=0.99e_1+0.08e_2$

$\boldsymbol{F}=128.1(-0.99e_1-0.08e_2)$ [N]



- **Dinâmica da partícula ou ponto material: 2ª lei Newton (momento angular)**

Aplicações da lei de movimento



O *momento angular* $\mathbf{H}_O$ de uma partícula em relação a O é definido como o momento em relação a O do momento linear $m\mathbf{v}$ da partícula.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

$\mathbf{H}_O$ é um vector perpendicular ao plano que contém $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ com magnitude:

$$H_O = rmv \sin \phi$$

Resolvendo os vectores $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ em componentes rectangulares, o momento angular $\mathbf{H}_O$ é determinado na forma:

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- **Dinâmica da partícula ou ponto material: 2ª lei Newton (momento angular)**

  Aplicações da lei de movimento

No caso de uma partícula em movimento no plano *xy*, temos $z = v_z = 0$. O momento angular é perpendicular ao plano *xy* e é completamente definido por:

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x)$$

Efectuando a **derivada temporal do momento angular,** $\dot{\mathbf{H}}_O$, e aplicando a 2ª lei de Newton:

$$\boxed{\dot{H}_O = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \cancel{\vec{v} \times m\vec{v}} + \vec{r} \times m\vec{a}} \Leftrightarrow \boxed{\sum \mathrm{M_O} = \dot{\mathrm{H}}_\mathrm{O}}$$

<u>**Significa que**</u> : a soma dos momentos em relação ao ponto O das forças que actuam na partícula é igual à derivada do momento angular em relação ao mesmo ponto O.

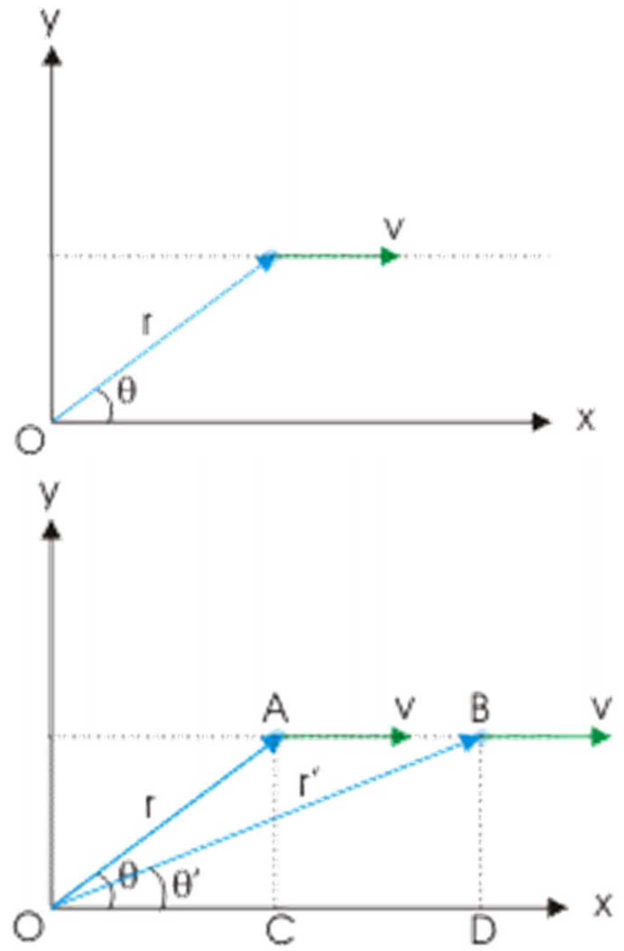
Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- Momento angular de uma partícula em movimento rectilíneo:
  - Uma partícula de massa "m" move-se ao longo de uma linha recta, paralelamente em relação ao eixo das abcissas, com velocidade constante (v). Determine o valor do momento angular no ponto O.

$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{v}$$

O momento angular será um vector ortogonal ao plano, cuja amplitude será igual a:

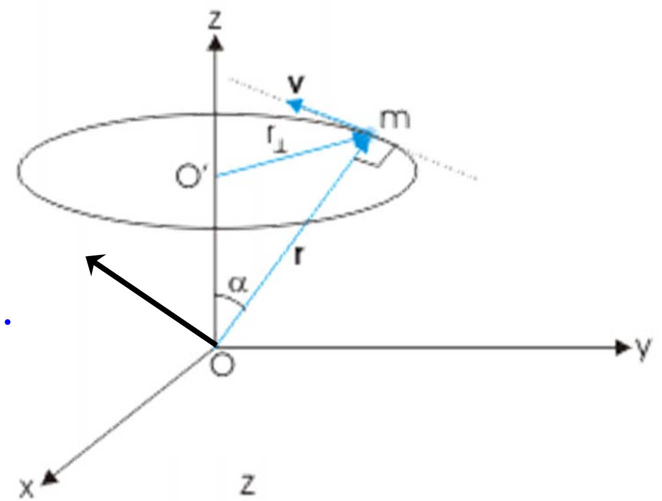
$$\left\|\vec{H}_o\right\| = \|\vec{r}\|.\|m\vec{v}\|\sin(\theta) = m.v.\ [r.\sin(\theta)]$$



O vector momento angular será constante, durante o movimento. Nestas condições existe conservação do momento angular.

Cap.2 – LEIS DO MOVIMENTO

- Momento angular de uma partícula em movimento de rotação:
  - Uma partícula de massa “m” move-se em torno de um eixo fixo, num movimento plano circular, com velocidade constante (v). Determine o valor do momento angular no ponto O.

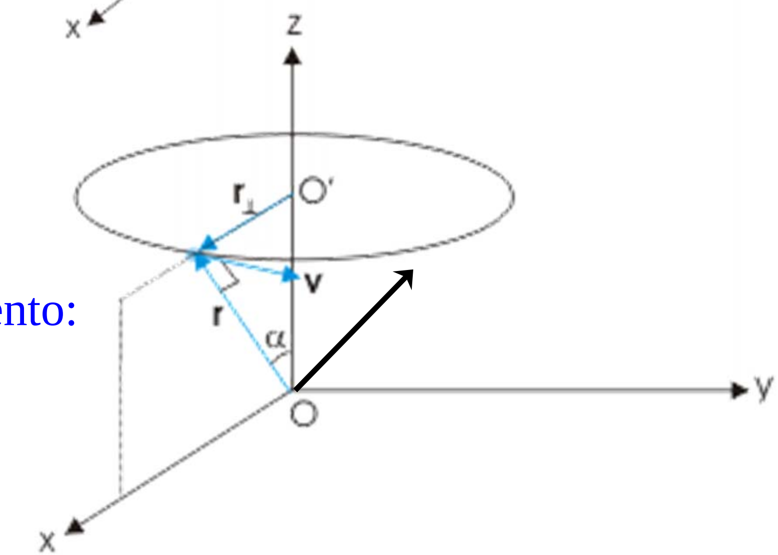


$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{v}$$

O momento angular será um vector ortogonal ao plano formado pelo vector “r” e pelo vector “mv”.

$$\left\|\vec{H}_o\right\| = \left\|\vec{r}\right\| . \left\|m\vec{v}\right\| \sin(90) = m.v.\ [r]$$

No movimento de rotação, a componente cartesiana (z) do vector H_O é muito importante.



$$H_{oz} = r.\sin(\alpha)\ mv = r_\perp mv$$

Introduzindo o conceito cinemático do movimento:

$$v = wr_\perp$$

$$H_{oz} = r_\perp m(wr_\perp) = mr_\perp^2\ w$$