O TPC está desenhado para que faças um estudo largo da matéria. Procura resolvê-lo sózinho(a), recorrendo aos apontamentos, **sem usar o ChatGPT desta vez**.

**Exercício 1.** Calcula o integral

$$I = \int_0^\infty e^{2t} e^{-st} dt.$$

Qual o seu significado?

$$I = \int_0^\infty e^{2t} e^{-st} dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{t(2-s)} dt$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left. \frac{e^{t(2-s)}}{2-s} \right|_0^b = \lim_{b \to \infty} \frac{e^{b(2-s)} - 1}{2-s}$$

$$= \frac{1}{s-2}, \quad Re(s) > 2$$

Significado: $I$ é a transformada de Laplace de $e^{2t}$.

**Exercício 2.** Escreve uma ED de 2ª ordem, não linear, com coeficientes constantes

Por exemplo: $y'' + \sqrt{y'} - 2y = 3x^2$

Razão da não linearidade: o expoente de $y'$ não é 1.

**Exercício 3.** No exemplo da página 93, se a solução geral da ED homogénea fosse

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x},$$

qual era a forma da solução particular $y_p$ a procurar?

(Método dos Coeficientes indeterminados)
O termo independente da ED é $e^{3x}$. Procuramos uma solução particular da forma $y_p = x R e^{3x}$, sendo $R$ o coeficiente a determinar.

**Exercício 4.** Usa o exemplo 8 da página 97 para resolver a ED

$$y'' + 2y' = 5.$$

- Solução geral da ED homogénea: $y_h = C_1 + C_2 e^{-2x}$
- Termo independente: 5 (polinómio de grau zero)
- Forma da solução particular: $y_p = Ax$
- Calcular o coeficiente $\underline{A}$:

$$(Ax)'' + 2(Ax)' = 5 \iff 2A = 5 \iff A = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \; y_p = \frac{5}{2}x$$

- Solução geral da ED

$$y = y_h + y_p$$

$$\iff y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{5}{2}x \;, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

**Exercício 5.** No exercício 53, página 102, verifica que a função $x(t)$ indicada é a solução do pvi.

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2x = \sin(2t) \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \cos(2t) + \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{t \cdot \cos(2t)}{4}$$

1. Verificar que $x(t)$ satisfaz as condições iniciais

- $x(0) = 1$

$$x(0) = \cos(0) + \frac{1}{8}\sin(0) - 0 = 1 \; ✓$$

- $\dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = \left(\cos(2t)\right)' + \frac{1}{8}\left(\sin(2t)\right)' - \frac{1}{8}\left(t \cdot \cos(2t)\right)'$$

$$= -2\sin(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{1}{8}\cos(2t) + \frac{1}{4}t \cdot \sin(2t)$$

$$= -2\sin(2t) + \frac{1}{8}\cos(2t) + \frac{1}{4}t \cdot \sin(2t)$$

$$\dot{x}(0) = -2\sin(0) + \frac{1}{8}\cos(0) + 0 = \frac{1}{8} \neq 0$$

$\therefore$ A função $x(t)$ não é a solução do pvi.

$x(t)$ não satisfaz a condição inicial $\dot{x}(0) = 0$

**Exercício 6.** Mostra que as funções $e^{3x}$ e $sin(3x)$ são linearmente independentes no intervalo $[-2, 5]$.

Se fossem linearmente dependentes tínhamos

$$\frac{e^{3x}}{\sin(3x)} = k,$$

com $k$ constante para todo $x \in [-2, 5]$.

Mas, por exemplo:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{e^3}{\sin(3)} = k$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{e^0}{\sin(0)} = \frac{1}{0} \quad ↯$$

A função não é sequer definida no ponto $x = 0$.

$\therefore$ As funções são linearmente independentes no intervalo $[-2, 5]$.

**Exercício 7.** A ED

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

representa um sistema massa-mola-amortecedor. Calcula os coeficientes a,b,c, de modo que

1. O sistema seja sobreamortecido (não oscila);
2. O sistema seja subamortecido (oscila).

Resolver a equação característica

$$ar^2 + br + c = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

1. O sistema é sobreamortecido se

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} > 0$$

Isto pode conseguir-se fazendo, por exemplo

$$a = 1\,\text{Kg}, \quad b = 1\,\frac{\text{N.s}}{\text{m}}, \quad c = \frac{1}{8}\,\text{N/m}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} > 0$$

2. O sistema é subamortecido se

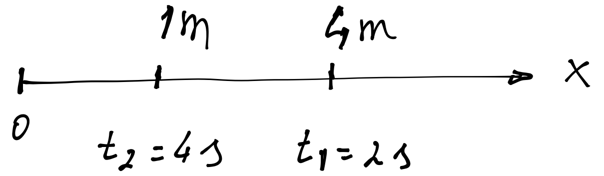
$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} < 0$$

Isto pode conseguir-se fazendo, por exemplo

$$a = 1\ kg \quad , \quad b = 1\ \frac{N \cdot s}{m} \quad , \quad c = 2\ N/m$$

$$\frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4} < 0$$

**Exercício 8.** Consulta a figura 28, página 88. Sejam $t_1 = 2\ s$ e $t_2 = 4\ s$ dois instantes. Atribui valores às posições $x(t_1)$ e $x(t_2)$, em metros, de modo que a velocidade média entre os dois instantes seja negativa.




A velocidade é negativa se o movimento tem o sentido contrário ao do eixo dos x. Se fizermos, por exemplo,

$$x(2) = 4m \quad , \quad x(4) = 1m,$$

a velocidade média com respeito ao intervalo temporal $[2, 4]$ é

$$V_{média} = \frac{x(4) - x(2)}{4-2} = \frac{1-4}{4-2} = -\frac{3}{2}\ m/s$$

**Exercício 9.** Resolver o exercício 37 (d), página 72.

Mostrar que $y = 2e^{-x}$ resolve o pvi de 1.ª ordem

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

1. Mostrar que a função verifica a condição inicial.

$y(0) = 2$

$y(0) = 2e^{-0} = 2$ ✓

2. Mostrar que a função é uma solução particular da ED

$(2e^{-x})' + 2e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow -2e^{-x} + 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

**Exercício 10.** Considera o problema de mistura (sal no tanque) na página 65. Usando os dados do problema escreve um pvi de 1ª ordem, que defina a quantidade de sal no tanque em função do tempo, $q(t)$, com uma concentração inicial de sal igual a 4 *gramas/litro*.

O pvi deve conter:

1) Uma ED de 1.ª ordem na variável $q(t)$;
2) Uma condição inicial que defina o valor de $q(t)$ num instante qualquer.

1) A ED é $q' + \frac{3}{800+2t} \cdot q = 375$

Ela foi escrita usando o volume de líquido ao longo do tempo, $800+2t$, a concentração e o caudal do líquido que entra no tanque, e o caudal do líquido que sai do tanque.

2) Se a concentração inicial de sal são 4 g/litro, então $q(0) = 4 \times 800 = 3200\,g$

$\therefore$ pvi $\begin{cases} q' + \frac{3}{800+2t} \cdot q = 375 \\ q(0) = 3200 \end{cases}$

**Exercício 11.** Seja $y_1$ uma solução da ED $y'' + y = f(x)$ e $y_2$ uma solução da ED $y'' + y = g(x)$. Usando o Princípio de Sobreposição, escreve uma solução da ED $y'' + y = -g(x) + 7f(x)$.

Princípio de Sobreposição

- Se $y_1$ resolve $y'' + y = f(x)$ então (multiplicando ambos os membros por $k$), $ky_1$ resolve $y'' + y = k\,f(x)$;
- se $y_2$ resolve $y'' + y = g(x)$, então $ky_1 + Ry_2$ resolve $y'' + y = k\,f(x) + R\,g(x)$

Solução pedida: $y_p = -y_2 + 7y_1$.

**Exercício 12.** Resolver o exercício 38 (d), página 73.

Resolver a ED $y' + y = \sin(x)$. ED Linear de 1.ª ordem

1. Solução geral da ED homogénea

$$y' + y = 0$$

$$\underset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{dy}{y} = -dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(|y|) = -x + C_1 \Leftrightarrow y = \pm e^{C_1} e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y_h = C e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2. Determinar uma solução particular da ED completa (método da variação do parâmetro)

$$y_p = u \cdot e^{-x} \qquad u: \text{função a determinar}$$

$$(u e^{-x})' + u e^{x} = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow u' e^{-x} = \sin(x) \Leftrightarrow u = \int e^{x} \cdot \sin(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{e^{x}}{2} (\sin(x) - \cos(x))$$

$$\therefore \quad y_p = u \cdot e^{-x} = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}$$

$\therefore$ Solução geral da ED

$$y = y_h + y_p$$

$$\Leftrightarrow y = C e^{-x} + \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}, \quad C \in \mathbb{R}$$