Consultar apontamentos na página da disciplina. Resolver os exercícios seguintes.

(a) 86.

(b) 92, para a região a verde.

(c) 110, regiões R1 e R4.

Exercício 86 O problema de valor inicial de segunda ordem

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t),\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,$$

formaliza a posição da massa de um sistema massa-mola-amortecedor. A massa, quando se move, segue uma trajetória linear.

1. Quais as unidades de b e de k?
2. Resolver o pvi de segunda ordem, se for $f(t) = -2u(t-2)$, $m = 1$, $b = 0$, $k = 1$. No instante $t = 3\ s$, a massa moveu-se para a esquerda ou para a direita do ponto $x = 0$?

Resolução

1. Cada uma das parcelas no 1º membro vem em Newton.

$$b\ \dot{x}$$

$$(u)\cdot(m/s) = N \Rightarrow u = \frac{N\cdot s}{m} = kg\frac{m}{s^2}\cdot\frac{s}{m}$$

$$\boxed{u = kg/s}$$

$$k\cdot x$$

$$(u)\cdot(m) = N \Rightarrow \boxed{u = N/m}$$

2. Resolver o problema usando transformadas de Laplace

pvi $\begin{cases} \ddot{x} + x = -2u(t-2) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

Aplicando o operador $\mathcal{L}$ aos dois membros da Eq:

$$\mathcal{L}(\ddot{x}+x) = \mathcal{L}(-2\,u(t-2))$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(\ddot{x})+\mathcal{L}(x) = -2\,\mathcal{L}(u(t-2))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{s^2X(s)+X(s)}_{X(s)(s^2+1)} = \frac{-2}{s}\cdot e^{-2s}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \underbrace{\frac{-2}{s(s^2+1)}}_{F(s)}\cdot e^{-2s}$$

$$= F(s)\cdot e^{-2s}$$

- Calcular a soluçao do pvi, $x(t)$:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = f(t-2)\cdot u(t-2)$$

- Calcular $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2}{s(s^2+1)}\right)$

$$\frac{-2}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow -2 = A(s^2+1)+(Bs+C)s$$

$$\Leftrightarrow -2 = s^2(A+B)+Cs+A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\therefore f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2}{s}+\frac{2s}{s^2+1}\right)$$

$$= -2\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+2\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$= -2\,u(t)+2\cos(t)$$

$\therefore$ Soluções do pvi

$$x(t) = [\underbrace{-2\,u(t-2) + 2\cos(t-2)}_{f(t-2)}]\,u(t-2)$$

$$= -2\,u(t-2) + 2u(t-2)\cos(t-2)$$

notar que $u^2(t-2) = u(t-2)$

$$\Leftrightarrow x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ -2 + 2\cos(t-2), & t \geq 2 \end{cases}$$

Em $t = 3$

$$x(3) = -2 + 2\cos(3-2)$$

$$= -2 + 2\cos(1) < 0,$$

porque $0 < \cos(1) < 1$,

a massa encontra-se à esquerda do ponto de repouso, $x = 0$.

Exercício 2. Escrever o integral

$$\int\int_R f(x,y)dA$$

com os extremos e integração e os diferenciais adequados, para cada região de integração na figura 1.

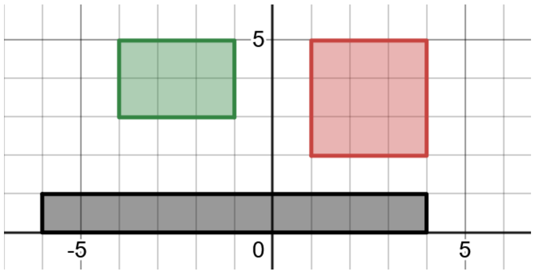


Figura 1:

Região verde: $-4 \leq x \leq -1$

$3 \leq y \leq 5$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-4}^{-1}\int_3^5 f(x,y)\,dy\,dx$$

ou

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_3^5\int_{-4}^{-1} f(x,y)\,dx\,dy$$

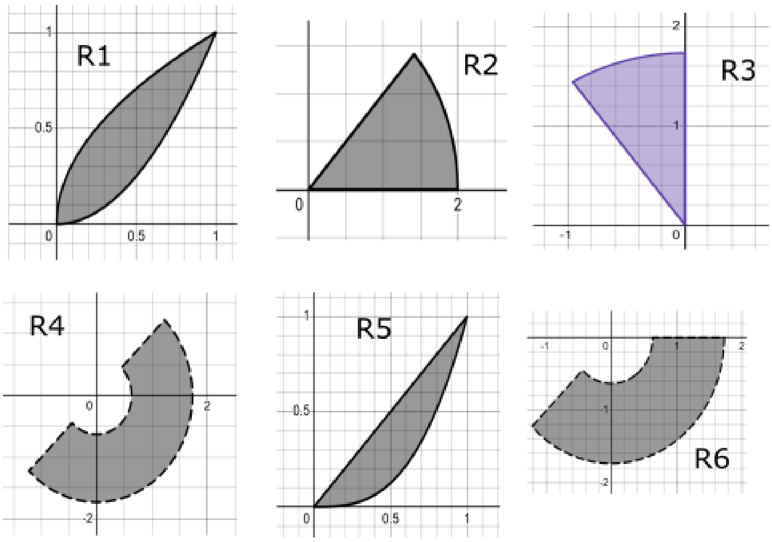


Figura 2:

Exercício 3. Para cada uma das regiões na figura 2, escrever e calcular o integral

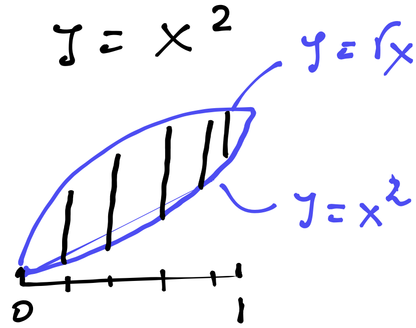
110

$$\iint_R 2xy\, dA,$$

usando coordenadas retangulares ou polares, conforme adequado.

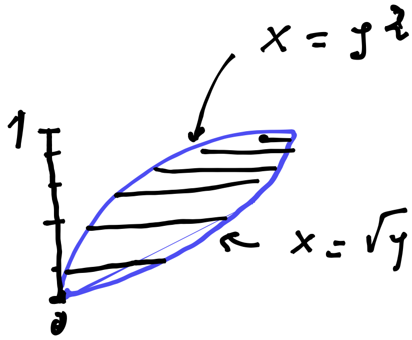
Região R_1: definida pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy\, dy\, dx$$



ou

$$I = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 2xy\, dx\, dy$$



Escolhemos um dos integrais

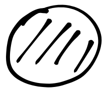
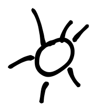
$$I = \int_0^1 \underbrace{\int_{y^2}^{\sqrt{y}} 2xy\,dx}_{I_1}\,dy$$

$$I_1 = \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 2xy\,dx = y\int_{y^2}^{\sqrt{y}} 2x\,dx = y\,x^2\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}}$$

$$= y(y - y^4) = y^2 - y^5$$

$$I = \int_0^1 (y^2 - y^5)\,dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

R_4 é definida pela interseção das regiões
$x^2 + y^2 \le 4$, $x^2 + y^2 \ge 0.4$, $y \le x$


Em Coordenadas polares: $\sqrt{0.4} \le r \le 2$

$\sqrt{0.4} \simeq 0.63$

$\frac{5}{4}\pi \le \theta \le \frac{9}{4}\pi$

$$I = \int_{\sqrt{0.4}}^{2} \int_{/4\pi}^{9/4\pi} 2\cdot r\cos(\theta)\cdot r\sin(\theta)\,d\theta\,dr$$

$$= \int_{\sqrt{0.4}}^{2} \int_{5/4\pi}^{\frac{9}{4}\pi} r^2 \sin(2\theta)\,d\theta\,dr$$

Notar que $\sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cdot\cos\theta + \cos\theta\cdot\sin\theta$
$= 2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$$I = \int_{\sqrt{0.4}}^{2} \underbrace{\int_{5/4\,\pi}^{\frac{9}{4}\pi} r^2 \sin(2\theta)\, d\theta}_{I_1 \,:\, \text{integral parcial em } \theta;\ r \text{ constante}}\, dr$$

$$I_1 = r^2 \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} \sin(2\theta)\, d\theta = r^2 \cdot \left(-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)\Bigg|_{5/4\,\pi}^{\frac{9}{4}\pi}$$

$$= -\frac{r^2}{2}\left(\underbrace{\cancel{\cos\left(\tfrac{9}{2}\pi\right)}}_{0} - \underbrace{\cancel{\cos\left(\tfrac{5}{2}\pi\right)}}_{0} \right) = 0$$

$$I = \int_{\sqrt{0.4}}^{2} 0 \, dr = C \Big|_{\sqrt{0.4}}^{2} = C - C = 0$$