Notas das Aulas – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/∼mar)

Capítulo 3. Transformadas da Laplace – Parte 2

3.3 Existência da Transformada de Laplace

A existência da transformada de Laplace de uma função, implica que

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} \;=\; 0$$

para que o integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ convirja. A função e^{t^2} não tem transformada de Laplace, uma vez que não existe o limite (porquê?)

$$\lim_{t\to\infty} e^{t^2}e^{-st}.$$

É garantido que uma função $f(t)$ admite transformada de Laplace, se for **contínua por pedaços** e de **ordem exponencial**, no intervalo $[0, \infty)$. Vamos definir estes dois conceitos e depois enunciar o teorema de existência.

Definição. *Diz-se que a função $f(t)$ tem uma* **descontinuidade de salto** *no ponto $t = a$, se os limites laterais da função neste ponto existem mas são distintos (figura 40).*

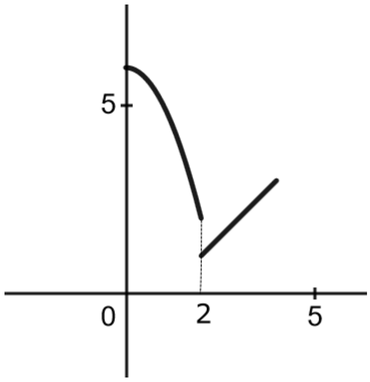

Figura 40: Função com descontinuidade de salto no ponto $t = 2$.

Definição. *Diz-se que a função $f(t)$ é* **seccionalmente contínua**, *ou* **contínua por pedaços**, *no intervalo $[0, \infty)$, se para qualquer intervalo finito $[0, b)$, com $b \in \mathbb{R}^+$, $f(t)$ é contínua ou tem, quando muito, um número finito de descontinuidades de salto.*

Exemplo 1. Qualquer função contínua no intervalo $[0, +\infty)$ é também seccionalmente contínua nesse intervalo (porquê?).

Exemplo 2. A função de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ x é racional} \\ 0, \text{ x é irracional} \end{cases}$ não é seccionalmente contínua em nenhum intervalo do seu domínio.

Definição. *Diz-se que a função $f(t)$ é de* **ordem exponencial** *k, se existem constantes positivas c e k tais que para $t \geq 0$ se verifica*

$$|f(t)| \leq ce^{kt}.$$

Exemplo 3. A função $sin(t)$ é de ordem exponencial 0.

$$|sin(t)| \ \leq \ 1 \ = \ e^{0t} \qquad c = 1; k = 0.$$

Exemplo 4. A função t^2 é de ordem exponencial 1.

$$t^2 \ \leq \ e^t \qquad c = 1; k = 1.$$

Exemplo 5. A função e^{t^2} não tem ordem exponencial. Se tivesse ordem exponencial k deveria verificar-se, para algum par de constantes c e k,

$$e^{t^2} \leq ce^{kt},$$

ou

$$\frac{e^{t^2}}{e^{kt}} \leq c, \; t \in [0, +\infty).$$

Esta desigualdade não se verifica, dado que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{kt}} = \infty.$$

O teorema seguinte estabelece condições suficientes para que a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ exista.

Teorema. *Se $f(t)$ é seccionalmente contínua e de ordem exponencial no intervalo $[0, \infty)$, então $\mathscr{L}(f(t))$ existe para $Re(s) > 0$.*[1]

Regra da Derivada no Domínio t

Uma propriedade fundamental do operador $\mathscr{L}$ para a resolução de equações diferenciais é transformar a derivada de uma função $f'(t)$ numa expressão algébrica que envolve a transformada de Laplace $F(s)$ da função $f(t)$.

Teorema. *Se $f(t)$ é contínua no intervalo $[0, \infty)$ e a sua derivada $f'(t)$ é seccionalmente contínua no intervalo $[0, \infty)$, sendo ambas de ordem exponencial k, então $\mathscr{L}(f(t))$ e $\mathscr{L}(f'(t))$ existem para $Re(s) > k$ e*

$$\mathscr{L}(f') = s\mathscr{L}(f) - f(0).$$

Prova.
As transformadas de Laplace de $f(t)$ e de $f'(t)$ existem dado estas funções serem de ordem exponencial e contínuas por pedaços em $[0, \infty)$.

$$\mathscr{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f'(t)e^{-st}dt$$

[1] Estas condições podem não se verificar para algumas funções e, ainda assim, a sua transformada de Laplace existir. Um exemplo é a função $f(t) = 2te^{t^2}cos(e^{t^2})$.

Primitivando por partes ($u = e^{-st}, u' = -se^{-st}, v' = f'(t), v = f(t)$), temos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f'(t))) &= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-st}f(t)|_0^b + s\int_0^b f(t)e^{-st}dt\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-sb}f(b) - f(0) + s\int_0^b f(t)e^{-st}dt\right).\end{aligned}$$

Como

- $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-sb}f(b) = 0$, se $Re(s) > k$ (por $f(t)$ ser de ordem exponencial k);

- $\lim\limits_{b\to\infty} s\int_0^b f(t)e^{-st}dt = s\mathscr{L}(f(t))$;

obtemos

$$\mathscr{L}(f'(t)) = s\mathscr{L}(f) - f(0).$$

Para derivadas de ordem superior vale o seguinte resultado.

Teorema. *Se $f, f', f'', \cdots, f^{(n-1)}$ são contímuas no intervalo $[0,\infty)$, $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua no intervalo $[0,\infty)$, e todas estas funções são de ordem exponencial k, então as transformadas de Laplace destas funções existem para $Re(s) > k$ e*

$$\mathscr{L}(f^{(n)}) = s^n\mathscr{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Exercício 65. Determinar $\mathscr{L}(y(t))$ sendo

$$\begin{aligned} y(t) &= \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 2x(t)\\ x(0) &= 2\\ \dot{x}(0) &= -1\end{aligned}$$

Resolução.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(y(t)) &= \mathscr{L}(\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 2x(t)) \\
&= \mathscr{L}(\ddot{x}(t)) + \mathscr{L}(\dot{x}(t)) + 2\mathscr{L}(x(t)) \\
&= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + 2X(s) \\
&= X(s)(s^2 + s + 2) - 2s - 1
\end{aligned}$$

Regra da Translacção no Domínio s

Vamos apresentar um dos dois teoremas da **translacção** associados às transformadas de Laplace (do outro teorema falamos mais adiante, a propósito da função degrau de Heaviside).

Teorema. *Se $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ existe para $Re(s) > k$, então*

$$\mathscr{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a),$$

para $Re(s) > k + a$.

Prova.

$$\mathscr{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)$$

Exemplo 6. Por ser

$$\mathscr{L}(t) = \frac{1}{s^2} \qquad (Re(s) > 0),$$

temos

$$\mathscr{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2} \qquad (Re(s) > a).$$

Exemplo 7. Por ser

$$\mathscr{L}(sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad (Re(s) > 0),$$

temos

$$\mathscr{L}(e^{2t}sin(3t)) = \frac{3}{(s-2)^2 + 9} \qquad (Re(s) > 2).$$

Transformada Inversa de Laplace

O tipo de aplicação das transformadas de Laplace que abordamos no nosso curso, está esquematizado na figura 41.

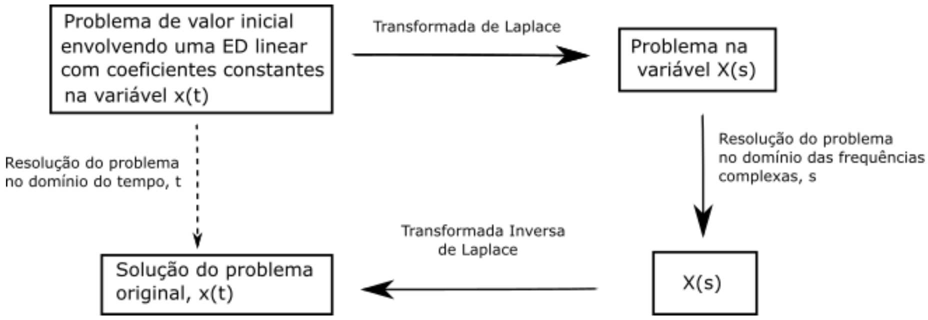

Figura 41:

A transformada de Laplace é aplicada aos dois membros da ED de um pvi na variável $x(t)$, obtendo-se uma equação algébrica (sem derivadas) na variável $X(s) = \mathscr{L}(x(t))$. Resolve-se esta equação obtendo-se uma expressão para $X(s)$. Por fim, obtém-se a solução $x(t)$ do pvi no domínio do tempo t calculando a *transformada inversa de Laplace* $\mathscr{L}^{-1}(X(s))$.

A transformada inversa de Laplace transforma funções do domínio das frequências complexas s para o domínio do tempo t (figura 42).

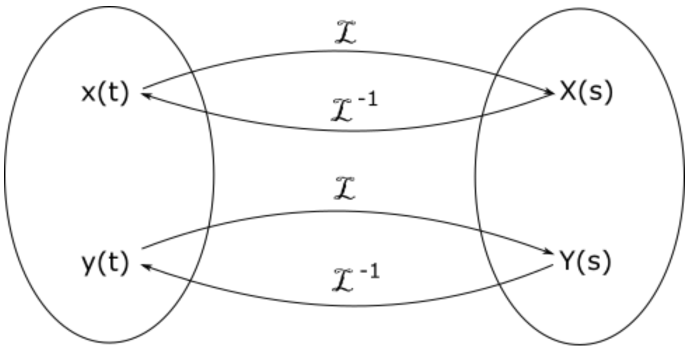

Figura 42:

A **transformada de Laplace inversa** é calculada por meio de um integral, dito **integral de Fourier-Mellin**.

$$\mathscr{L}^{-1}(F(s))(t) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} F(s)e^{st}ds$$

Este é um *integral de linha* (vamos estudar este tipo de integrais no cap 5) complexo, cujo cálculo é feito usando o *teorema dos resíduos* de Cauchy. Não vamos calcular explicitamente este integral para obter

transformadas inversas de Laplace. Na prática usam-se solvers para obter transformadas de Laplace, diretas e inversas. As versões estáticas dos solvers são as tabelas de transformadas (código QR de uma tabela no Anexo).
O operador $\mathscr{L}^{-1}$, por ser definido a través de um integral, goza da propriedade da linearidade.

Teorema. *Se $F(s)$ e $G(s)$ admitem transformada de Laplace inversa, então*

$$\mathscr{L}^{-1}(c_1F(s) + c_2G(s)) \;=\; c_1\mathscr{L}^{-1}(F(s)) + c_2\mathscr{L}^{-1}(G(s)),$$

sendo c_1, c_2 constantes arbitrárias.

A transformada inversa de Laplace não é única, isto é, podemos ter $\mathscr{L}(f(t)) = \mathscr{L}(g(t))$, mas ser $f(t) \neq g(t)$. Isto deve-se ao facto de, por exemplo, duas funções, $f(t), g(t)$ que diferem apenas num número finito de pontos com descontinuidades removíveis, terem o mesmo integral num dado intervalo (ver Anexo). Interessa-nos calcular sem ambiguidades a transformada inversa de Laplace, porque

- a transformada inversa de $F(s)$ é uma função no tempo, $f(t)$, que representa a solução de um pvi;
- a solução de um pvi corresponde ao output de um dado sistema, que deve ser estabelecido sem ambiguidade.

Para o caso em que $f(t)$, $g(t)$ são contínuas, temos a garantia de que $\mathscr{L}(f(t)) = \mathscr{L}(g(t))$ implica $f(t) = g(t)$, conforme o seguinte teorema.

Teorema. *Se $f(t), g(t)$ são funções contínuas no intervalo $[0, \infty)$, e se $\mathscr{L}(f(t)) = \mathscr{L}(g(t))$, então $f(t) = g(t)$ neste intervalo.*

No caso geral, temos a seguinte definição.

Definição. *A transformada inversa de Laplace de uma função $F(s)$ é a única função contínua $f(t)$ que satisfaz $\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$. No caso de todas as funções que satisfazem esta igualdade serem descontínuas no intervalo $[0, \infty)$, então deve ser considerado um critério suplementar para escolher, de entre estas, a que representa $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$.*[2]

[2]Por exemplo, escolher a transformada inversa com menor número de descontinuidades.

Exercício 66. Determinar

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2+16}+\frac{1}{s(s+2)}\right).$$

A resolução é como se segue (os números referem fórmulas na tabela de transformadas usada na disciplina).

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{1}{2}t^2 \quad (fórmula\ 11,\ n=2)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+16}\right) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2+16}\right) = \frac{1}{4}sin(4t) \quad (fórmula\ 13,\ k=4)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+3)}\right) = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-0)(s-(-3))}\right) = \frac{1-e^{-3t}}{3} \quad (fórmula\ 18,\ a=0\ b=-3)$$

Podemos agora escrever a expressão para a transformada inversa.

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2+16}+\frac{1}{s(s+3)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}sin(4t)+\frac{1-e^{-3t}}{3}$$

Exercício 67. Determinar

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right).$$

Começamos por decompôr a função $F(s) = 1/(s(s^2+1))$ numa **soma de fracções parciais**.

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{1}{s}+\frac{-s}{s^2+1}$$

Podemos agora escrever a expressão para a transformada inversa.

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}+\frac{-s}{s^2+1}\right)$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$= 1-cos(t) \quad (fórmula\ 1;\ fórmula 14,\ k=1)$$

Exercício 68. Determinar

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}\right).$$

Começamos por decompôr numa soma de fracções parciais a função $F(s) = s^2/[(s+1)(s^2+1)]$.

$$F(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{1/2}{s+1} + \frac{s/2-1/2}{s^2+1}$$

Podemos agora escrever a expressão para a transformada inversa.

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}\right) = \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1/2}{s+1} + \frac{s/2-1/2}{s^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}) + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}cos(t) - \frac{1}{2}sin(t) \quad (\, fórmula\ 15,\ a=-1;\ \ fórmulas\ \ 13, 14,\ k=1)
\end{aligned}$$

Função Degrau de Heaviside

A função degrau de Heaviside (Heaviside Step), ou **função Degrau Unitário**, é definida da forma (ver figura 43)

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Como veremos adiante, esta função pode ser encarada como a **formalização matemática de um interruptor**.

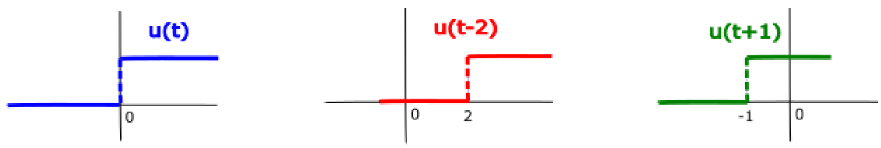

Figura 43: Funções degrau de Heaviside

Se for $f(t) = 1$ uma função constante para $t \in \mathbb{R}$, é imediato verificar que

$$\mathscr{L}(u(t)) = \mathscr{L}(f(t)) = \frac{1}{s},$$

uma vez que as funções $f(t)$ e $u(t)$ são idênticas para $t \geq 0$, e o integral usado para definir o operador $\mathscr{L}$ considera apenas o intervalo $[0, \infty)$. No caso geral temos

$$\mathscr{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Como exemplo do uso da função $u(t)$ como interruptor matemático, temos na figura 44 o produto

$$u(t-2)sin(t-2) \;=\; \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-as}\frac{1}{s^2+1}\right).$$

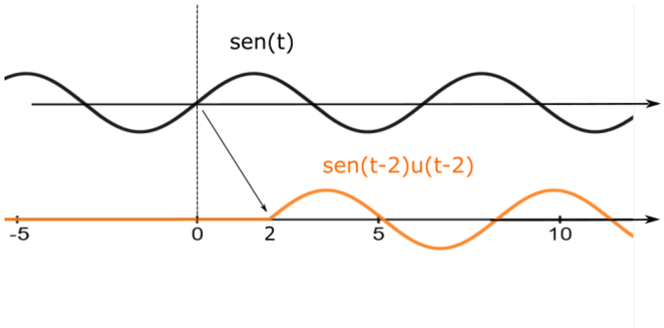

Figura 44: Função seno deslocada no tempo e 'ligada' em $t = 2$.

Regra da Translação no Domínio t

O enunciado seguinte diz-nos que a multiplicação de uma função $F(s)$ pela exponencial e^{-as}, resulta numa translacção em t da transformada inversa de Laplace de $f(t)$.

Teorema. *Se* $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$, *então*

$$\mathscr{L}(u(t-a)f(t-a)) \;=\; e^{-as}F(s) \quad (a \geq 0).$$

Prova.

$$\int_0^\infty u(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \;=\; \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = t - a$, o último integral fica

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau \;=\; e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \;=\; e^{-as}F(s)$$

Exercício 69. Determinar a transformada de Laplace da função

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & t \geq 1 \end{cases}$$

A função pode escrever-se $g(t) = u(t-1)(t-1)^2$, para $t \geq 0$. Como

$$f(t-1) = (t-1)^2 \Rightarrow f(t) = t^2,$$

temos

$$\mathscr{L}(g(t)) = e^{-s}\mathscr{L}(t^2) \quad (\textit{fórmula } 4,\ a = 1).$$

Por ser

$$\mathscr{L}(t^2) = \frac{2}{s^3},\ (\textit{fórmula } 11,\ n = 2)$$

temos

$$= \frac{2e^{-s}}{s^3} \quad Re(s) > 0$$

Exercício 70. Determinar a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2+8}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{se^{-2s}}{s^2+8}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{s}{s^2+8}\right)$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-2s}F(s)\right),$$

com $F(s) = \frac{s}{s^2+8}$. Usando a regra da translação em t podemos escrever

$$\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-2s}F(s)\right) = u(t-2)f(t-2).$$

Por ser

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+8}\right) = cos(\sqrt{8}t) \quad (\textit{fórmula } 14,\ k = \sqrt{8})$$

temos

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{se^{-2s}}{s^2+8}\right) = u(t-2)cos(\sqrt{8}(t-2))$$

Exercício 71. Determinar a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2+s+1}.$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s^2+s+1}\right) &= \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-3s}\frac{1}{s^2+s+1}\right)\\ &= u(t-3)f(t-3)\end{aligned}$$

com

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right).$$

Por ser

$$F(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{(s+1/2)^2+3/4}$$

e

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1/2)^2+3/4}\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}sin(\sqrt{3}t/2) \quad (fórmula\ 22,\ a=-1/2;\ k=\sqrt{3}/2),\end{aligned}$$

obtemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s^2+s+1}\right) = u(t-3)\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-(t-3)/2}sin(\sqrt{3}(t-3)/2)$$

Podemos usar a fórmula 18 para calcular a transformada inversa

$$\mathscr{L}^{1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right).$$

Começamos por fatorizar o polinómio no denominador.

$$
\begin{aligned}
s^2+s+1=0 &\Leftrightarrow s=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\\
&\Leftrightarrow s=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\vee s=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

.

Podemos escrever

$$
\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1}{\left(s-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}
$$

Usando a fórmula 18 com

$$
a=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \ b=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},
$$

e notando que $a-b=i\sqrt{3}$, temos

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)&=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}\right)\\
&=\frac{1}{i\sqrt{3}}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{i\sqrt{3}}{\left(s-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}\right)\\
&=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t}-e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}\right).
\end{aligned}
$$

Por ser

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t}-e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}&=e^{-t/2}\left(e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}t}-e^{\frac{-i\sqrt{3}}{2}t}\right)\\
&=2ie^{-t/2}sin(\sqrt{3}t/2),
\end{aligned}
$$

temos

$$
\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)=\frac{2i}{i\sqrt{3}}e^{-t/2}sin(\sqrt{3}t/2)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}sin(\sqrt{3}t/2).
$$

3.3.1 Exercícios

Exercício 72. Calcular as transformadas de Laplace das funções.

$(a)\ f(t) = 2$ $\quad (b)\ f(t) = e^{-2t}$ $\quad (c)\ f(t) = 3e^{-2t}$

$(d)\ f(t) = t/2$ $\quad (e)\ f(t) = t^2$ $\quad (f)\ f(t) = t^2e^{-t}$

$(g)\ f(t) = e^{-5t}sen(8t)$ $\quad (h)\ f(t) = t^3cos(6t)$ $\quad (i)\ f(t) = sen(t + \pi/4)$

$(j)\ f(t) = \begin{cases} 0, \ 0 < t < a \\ 1, \ t \geq a \end{cases}$ $\quad (k)\ f(t) = \begin{cases} 1, \ 0 < t < a \\ 0, \ t \geq a \end{cases}$ $\quad (l)\ f(t) = sen^2(2t)$

Exercício 73. Calcular as transformadas de Laplace.

$(a)\ \mathscr{L}(a + bt + ct^2)$ $\quad (b)\ \mathscr{L}(2e^{at} - e^{-at})$

$(c)\ \mathscr{L}(3\ddot{x} + 4\dot{x} - 2x),\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2$ $\quad (d)\ \mathscr{L}(2\dot{x} - x + 2),\ x(0) = 1$

$(e)\ \mathscr{L}(\dddot{x}(t) + \ddot{x} - 2e^{-t}),\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2, \ddot{x}(0) = 3$ $\quad (f)\ \mathscr{L}(x^{(4)})$

Exercício 74. Mostrar que $\mathscr{L}(f(t)g(t)) \neq \mathscr{L}(f(t))\mathscr{L}(g(t))$ (sugestão: usar $f(t) = 2,\ g(t) = 3$).

Exercício 75. Calcular as transformadas de Laplace inversas das expressões.

$(a)\ F(s) = \dfrac{3}{s}$ $\quad (b)\ F(s) = \dfrac{3}{s^2 + 2}$ $\quad (c)\ F(s) = \dfrac{1}{s - 8}$

$(d)\ F(s) = \dfrac{3}{s^2 - 2}$ $\quad (e)\ F(s) = \dfrac{1}{s + 8}$ $\quad (f)\ F(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$(g)\ F(s) = \dfrac{1}{(s + 2)^2}$ $\quad (h)\ F(s) = \dfrac{6}{s^4}$ $\quad (i)\ F(s) = \dfrac{4}{s^2 + 16}$

$(j)\ F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 6s + 3}$ $\quad (k)\ F(s) = \dfrac{6}{s(s + 1)}$ $\quad (l)\ F(s) = \dfrac{4}{s(s^2 + 16)}$

$(m)\ F(s) = \dfrac{6}{s^2 + 2s + 5}$ $\quad (n)\ F(s) = \dfrac{3}{s(s + 1)^2(s - 3)}$ $\quad (o)\ F(s) = \dfrac{2}{s - 1} - \dfrac{3}{s^2 + 5}$

$(p)\ F(s) = \dfrac{1 - e^{-3s}}{s^2}$ $\quad (q)\ F(s) = \dfrac{s + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$ $\quad (r)\ F(s) = \dfrac{e^{-s} - 2e^{-4s}}{s}$

Exercício 76. Resolver os problemas de valor inicial (i) sem usar transformadas de Laplace; (ii) usando transformadas de Laplace.

$$(a)\ \begin{cases} y' + 3y = e^{-t} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} y'' + 4y = sen(t) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-3t} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} y'' + ty - y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercício 77. Usar transformadas de Laplace para obter a solução geral da ED $y'' + y = 1$.

Exercício 78. Esboçar o gráfico da função

$$f(t) = -u(t+3) + 2u(t+2) + u(t-3) - \frac{3}{2}u(t-4.5).$$

Resolução.

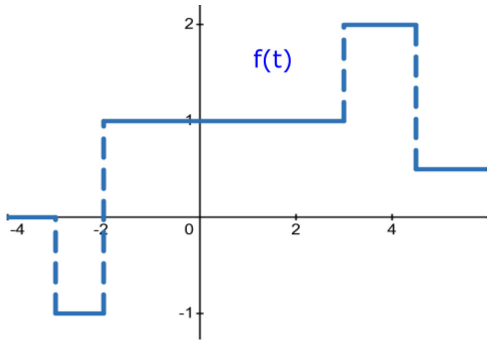

Figura 45:

■

Exercício 79. Esboçar os gráficos das funções.

(a) $u(t-2)$ $\qquad$ (b) $1 - u(t-1)$

(c) $1 - 2u(t-1) + u(t-2)$ $\qquad$ (d) $-u(t-\pi)sen(t) + u(t-2\pi)sen(t)$

Exercício 80. Representar graficamente as funções.

(a) $u(t)t^2$ $\qquad$ (b) $(t-1)t^2$

(c) $u(t-2)(t-2)^2$ $\qquad$ (d) $u(t-\pi)cos(t-\pi)$

Exercício 81. Resolver os pvi. Definir sistemas massa-mola formalizados pelos pvis (explicar as condições iniciais). Comentar as soluções obtidas.

$$(a)\quad \begin{cases} \ddot{x} + +\dot{x} + x \;=\; 1 - u(t-1) \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases} \qquad\qquad (b)\quad \begin{cases} \ddot{x} + x \;=\; \delta(t) + u(t-1) \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$$

3.3.2 Anexo

A transformada inversa de Laplace de uma função $F(s)$ não é única

O valor do integral $\int_a^b f(x)dx$ não depende do valor de $f(x)$ em pontos discretos do intervalo nos quais a função tenha descontinuidades de salto ou não esteja definida (neste caso, o ponto deve ser um ponto de aderência do domínio da função).

Como exemplo, para as funções da figura 46 temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b h(x)dx.$$

Os segmentos de reta com extremos no gráfico e no eixo das abcissas, correspondentes aos pontos de descontinuidade, têm área nula.

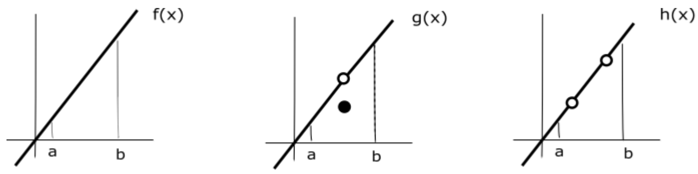

Figura 46:

Por consequência é também válida a dupla desigualdade

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = \int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx = \int_0^\infty h(x)e^{-sx}dx,$$

o que significa que **funções diferentes podem ter a mesma transformada de Laplace**. No caso do cálculo da transformda de Laplace inversa correspondente, teríamos que **escolher** qual a transformada inversa pretendida.

Tabela de transformadas de Laplace

#	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
3.	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
4.	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
5.	$\delta(t)$	1
6.	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
7.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
8.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
9.	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - $ $-s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
10.	$\int_0^t f(x)g(t-x)\,dx$	$F(s)G(s)$
11.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
12.	t^x	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$
13.	$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
14.	$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
15.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
16.	$\sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
17.	$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
18.	$e^{at}-e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
19.	$ae^{at}-be^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$
20.	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$

#	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
21.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
22.	$e^{at}\sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
23.	$e^{at}\cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
24.	$e^{at}\sinh(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2-k^2}$
25.	$e^{at}\cosh(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$
26.	$t\sin(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
27.	$t\cos(kt)$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
28.	$t\sinh(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
29.	$t\cosh(kt)$	$\frac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
30.	$\frac{\sin(at)}{t}$	$\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$
31.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
32.	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$ae^{-a\sqrt{s}}$
33.	$\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$
34.	$f(t/a)$	$aF(as)$
35.	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(s/a)$
36.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$
37.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$

(adaptada de 2011 B.E.Shapiro, integral-table.com)

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, N. Piskounov.

2. *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*, Stanley J. Farlow.

3. *Elementary Differential Equations*, William F. Trench (free download - link).

4. *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Joel L. Schiff