Notas das Aulas – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/~mar)

Capítulo 5. Cálculo Vectorial – Parte 3

- Reparametrização de Curvas no Comprimento do Arco
- Integrais de Linha
- Aplicação dos Integrais de Linha
  - Trabalho Realizado por um Campo de Forças ao Longo de um Caminho
- Exercícios

5.8 Reparametrização de Curvas no Comprimento do Arco

Em algumas aplicações é conveniente que o parâmetro represente o comprimento do arco[1], medido desde um certo ponto inicial. Na parametrização da curva C (figura 100)

$$C : \begin{cases} x(t) &= Rcos(t) \\ y(t) &= Rsen(t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

o parâmetro t representa o comprimento do arco apenas no caso em que $R = 1$. Neste caso, o comprimento da circunferência é $2\pi R = 2\pi$, que é igual ao valor máximo do parâmetro t. Isto significa que quando $t = \pi/3$, por exemplo, este valor de t representa o comprimento do pedaço de curva que tem por extremos os pontos $\vec{r}(0) = A$, e $\vec{r}(\pi/3) = B$. O arco AB mede $\pi/3$ (unidades de comprimento).

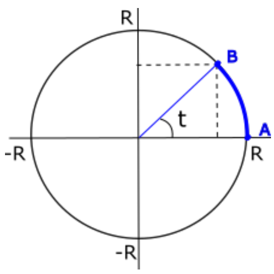

Figura 100:

Se for $R = 2$, o comprimento da circunferência é $2\pi R = 4\pi$. O parâmetro t não representa, neste caso, o comprimento do arco. O que se pode fazer neste caso é **reparametrizar** a curva no comprimento do arco, isto é, usar a parametrização no parâmetro t para obter uma nova parametrização no parâmetro s, representando este último parâmetro o comprimento do arco medido em relação a um certo ponto da

[1] *Arco* significa um pedaço de uma curva.

curva. Seja $s(t)$ a medida do arco definido pelos extremos AB na figura 100. Sabemos que

$$s \;=\; tR$$

e por isso $t = s/R$. Substituindo esta expressão para t nas equações paramétricas e ajustando o intervalo do parâmetro s, obtemos a **parametrização no comprimento do arco** da curva:

$$C : \begin{cases} x(s) \;=\; Rcos(\frac{s}{R}) \\ \\ y(s) \;=\; Rsen(\frac{s}{R}) \end{cases} \qquad 0 \leq s \leq 2\pi R,$$

que define o ponto $(x, y) = (R, 0)$ como o ponto de $s = 0$, sendo a curva descrita no sentido anti-horário quando s aumenta. Por exemplo, se for $R = 2$, o ponto $(x(0), y(0)) = (2, 0)$ corresponde a $s = 0$, e o ponto $(x(2\pi), y(2\pi)) = (-2, 0)$ corresponde a $s = 2\pi$. O comprimento do arco definido por estes dois pontos é 2π, correspondente a diferença dos dois valores de s.

No caso geral, dada uma parametrização

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

de um arco de curva em $3D$, a sua reparametrização no comprimento do arco segue os seguintes passos:

1. Obter uma expressão de t como função de s, $t = t(s)$;

2. Substituir esta expressão de t nas equações paramétricas originais e definir o intervalo de valores de s.

Podemos obter uma relação entre t e s usando a fórmula (que já estudámos antes)

$$s \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx, \tag{1}$$

que representa o comprimento da curva $y = f(x)$ correspondente ao intervalo $[a, b]$ de valores de x. Se fizermos a substituição $x = x(t)$, sendo $x(t)$ a equação paramétrica de uma parametrização da curva, temos

$$\frac{dx}{dt} \;=\; x'_t \;\Leftrightarrow\; dx \;=\; x'_t\, dt$$

e

$$y'_x \;=\; \frac{dy}{dx} \;=\; \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \;=\; y'_t \frac{1}{x'_t} \;=\; \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Podemos escrever

$$\sqrt{1+(y'_x)^2}dx \;=\; \sqrt{1+\frac{(y'_t)^2}{(x'_t)^2}}x'_t\,dt \;=\; \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt \;=\; \|\vec{r}\,'(t)\|dt.$$

O integral (1) pode escrever-se

$$s \;=\; \int_{t_a}^{t_b} \|\vec{r}\,'(t)\|dt,$$

sendo t_a e t_b os valores de t correspondentes a $x=a$ e $x=b$. Se fixarmos o ponto t_a e deixarmos o extremo superior de integração livre, temos

$$s(t) \;=\; \int_{t_a}^{t} \|\vec{r}\,'(t)\|dt,$$

que representa a relação entre s e t. Invertendo-a obtém-se t em função de s. É imediato verificar que $s(t_a)=0$, pelo que t_a representa o ponto onde $s=0$; é o ponto da curva em relação ao qual o valor do parâmetro s determina o comprimento do arco.

Exercício 148. Reparametrizar no comprimento do arco a recta

$$C : \begin{cases} x(t) \;=\; 2t+1 \\ y(t) \;=\; 3t-2 \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R},$$

de modo a ser $s=0$ no ponto $(x,y)=(3,1)$ e o sentido definido sobre a curva se mantenha.

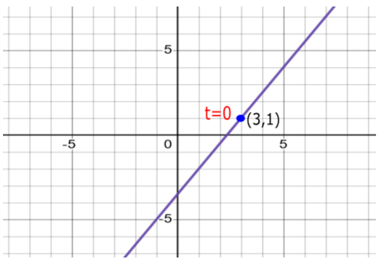

Figura 101:

Resolução. Queremos usar a parametrização C para obter uma nova parametização, no parâmetro s, que representa o comprimento do arco. Para isso começamos por obter uma expressão para t em função de s. O ponto $(x,y)=(3,1)$ corresponde a $t=1$. Para termos $s=0$ neste ponto, deve ser

$$s(t) \;=\; \int_{1}^{t} \|\vec{r}\,'(t)\|dt.$$

Vamos determinar $\|\vec{r}\,'(t)\|$.

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (2t+1, 3t-2) \\
\vec{r}\,'(t) &= (2,3) \\
\|\vec{r}\,'(t)\| &= \sqrt{2^2+3^3} = \sqrt{13}
\end{aligned}
$$

Podemos agora escrever uma expressão para t em função de s.

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_1^t \sqrt{13}dt = \sqrt{13}t - \sqrt{13} \\
\Rightarrow t &= \frac{s+\sqrt{13}}{\sqrt{13}}
\end{aligned}
$$

Substitui-se o parâmetro t nas equações paramétricas C por esta expressão,

$$
C_1 : \begin{cases} x(s) = 2\frac{s+\sqrt{13}}{\sqrt{13}} + 1 \\ y(t) = 3\frac{s+\sqrt{13}}{\sqrt{13}} - 2 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.
$$

Fazendo $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ é imediato verificar que $\vec{r}(0) = (3,1)$.

O sentido definido sobre a curva por esta nova parametrização é o definido pela parametrização C.

Notar que C e C_1 representam a mesma curva, mas atribuem aos pontos valores diferentes dos parâmetros.

São, por isso, parametrizações **diferentes**. ■

Exercício 149. Determinar o comprimento da curva

$$
C : \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = \sqrt{2}t \end{cases} \quad -1 \le t \le 1.
$$

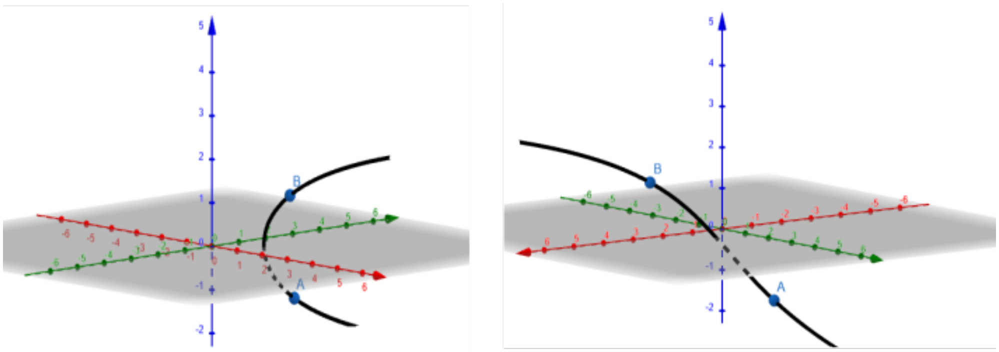

Figura 102: Duas perspetivas da curva C.

Resolução. Na figura 102 estão representadas duas vistas desta curva. Seja L o comprimento do arco delimitado pelos pontos $\vec{r}(-1) = (e^{-1}, e, -\sqrt{2}) = A$ e $\vec{r}(1) = (e, e^{-1}, \sqrt{2}) = B$. Quer-se calcular o integral

$$s = \int_{-1}^{1} \|\vec{r}\,'(t)\| dt.$$

Vamos determinar $\|\vec{r}\,'(t)\|$.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t) \\
\vec{r}\,'(t) &= (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \\
\|\vec{r}\,'(t)\| &= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}
\end{aligned}$$

Por ser

$$e^{2t} + e^{-2t} + 2 = \left(e^t + e^{-t}\right)^2,$$

obtém-se

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{\left(e^t + e^{-t}\right)^2} = e^t + e^{-t}.$$

Escrevemos a expressão de s.

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-1}^{1} (e^t + e^{-t}) dt = \left(e^t - e^{-t}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= 2(e - e^{-1}) \approx 4.7 \quad \text{(unidades de comprimento)}
\end{aligned}$$

■

Exercício 150. Em cada uma das 3 colunas de dois gráficos da figura 103, está representada uma curva paramétrica diferente, em cima, e a respetiva projeção no plano xy, em baixo (a vermelho o eixo dos x; a verde o eixo dos y). Atribuir a cada uma das 3 curvas uma das parametrizações seguintes.

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = 3cos(3t) \\ y(t) = 3sen(3t) \qquad 0 \leq t \leq 4. \\ z(t) = t \end{cases}$$

$$C_2 : \begin{cases} x(t) &= 3cos(t) \\ y(t) &= 3sen(t) \qquad 0 \leq t \leq 2. \\ z(t) &= t \end{cases}$$

$$C_3 : \begin{cases} x(t) &= 3cos(t) \\ y(t) &= 3sen(t) \qquad 0 \leq t \leq 4. \\ z(t) &= t \end{cases}$$

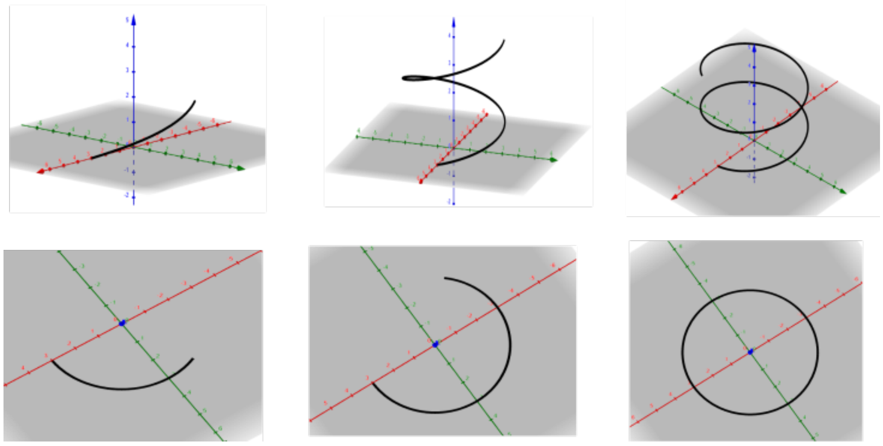

Figura 103:

5.9 Integrais de Linha

Generalização do problema da área: dada uma curva C no plano xy, parametrizada no comprimento do arco, e uma função $z = f(x, y)$, cujo domínio inclui os pontos de C, qual a área da 'parede' cujo fundo é C e o topo é a linha pertencente à superfície $z = f(x, y)$ que se projecta, no plano xy, sobre a curva C? (imagem na esquerda da figura 104)?

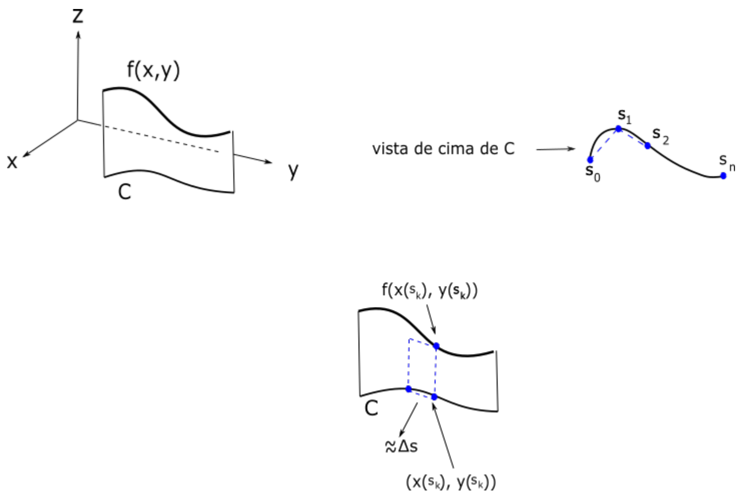

Figura 104:

A resolução deste problema remete para o cálculo da área de uma superfície plana com um integral simples.

- Subdividir a curva C em n partes, cada uma delas delimitada pelos pontos $s_k,\ s_{k+1}$, com $0 \leq k \leq n-1$ (quatro destes pontos estão representados na imagem superior direita da figura 104). A medida do segmento de recta que une cada par de pontos consecutivos é, aproximadamente, Δs, sendo Δs o comprimento do pedaço de curva delimitado pelos dois pontos.

- Considerar os rectângulos cujas bases são os segmentos de recta de extremos $s_k,\ s_{k+1}$ e as alturas são os valores que a função $f(x,y)$ toma nos pontos s_k, $0 \leq k \leq n-1$ (imagem inferior da figura 104). Tomar a soma das áreas do rectângulos como uma aproximação da área pretendida.

$$\text{Área} \ \approx \ \sum_{k=1}^{n} f(x(s_k), y(s_k))\, \Delta s$$

Se existir o limite deste somatório quando $n \to \infty$, então ele corresponde ao valor exacto da área e escreve-se

$$\begin{aligned} \text{Área} \ &= \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s \\ &= \int_C f(x(s), y(s))\, ds. \end{aligned} \tag{2}$$

O integral designa-se por **integral de linha** de $f(x,y)$ sobre a curva C parametrizada no comprimento do arco.

Se a curva C vier parametrizada num parâmetro t, diferente do comprimento do arco, podemos fazer uma mudança de variável no integral (2). Começamos por notar que

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt \\ \Rightarrow \frac{ds}{dt} &= \|\vec{r}\,'(t)\| \\ \Rightarrow ds &= \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt. \end{aligned}$$

Daqui resulta uma expressão para o integral de linha de $f(x, y)$ sobre a curva C, independente da parametrizção desta.

$$\int_C f(x(s), y(s))\, ds = \int_C f(x(t), y(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

Os extremos de integração são os valores inicial e final de t.

Notar que se $f(x, y)$ tomar valores positivos e negativos ao longo da linha C, o valor do integral (2) é igual à diferença entre a área da região acima do plano xy e área da região abaixo do plano xy.

Exercício 151. Determinar o integral de linha

$$I = \int_C (1 + xy^2)\, ds$$

sendo C o arco da curva definida no plano xy

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

que tem como pontos extremos $(0, 0)$ e $(1, 2)$.

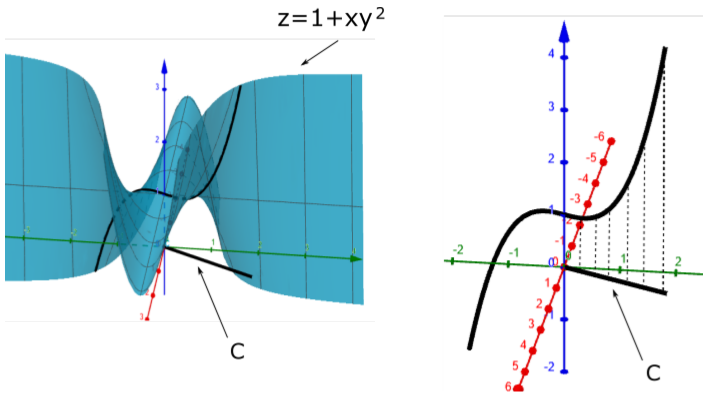

Figura 105:

Resolução. Na imagem esquerda da figura 105 estão representadas a superfície $z = 1 + xy^2$ (azul) e a curva C (recta) no plano xy. A parte da superfície que se projecta sobre C, está representado pela linha a preto contida na superfície a azul. Na imagem da direita está representada, a tracejado, a superfície cuja área é determinada pelo integral I.

O bocado de curva que tem como extremos os pontos $(0,0)$ e $(1,2)$, corresponde ao intervalo de valores $t \in [0,1]$. Temos então

$$I = \int_C (1+xy^2)\,ds = \int_0^1 (1+xy^2)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt.$$

Começamos por calcular $\|\vec{r}\,'(t)\|$.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (t, 2t)\\ \vec{r}\,'(t) &= (1,2)\\ \|\vec{r}\,'(t)\| &= \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

Por ser

$$\begin{aligned}x(t) &= t\\ y(t) &= 2t,\end{aligned}$$

a expressão da superfície $z = f(x,y)$ sobre os pontos da curva C fica

$$(1+xy^2) = (1+t(2t)^2) = 1+4t^3.$$

Calculamos o valor do integral.

$$\begin{aligned}I = \int_C (1+xy^2)\,ds &= \int_0^1 (1+xy^2)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt\\ &= \int_0^1 (1+4t^3)\sqrt{5}\,dt = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

■

Exercício 152. Calcular a massa do fio semi-circular de densidade de massa $\delta(x,y) = (15-y)$ grama/metro, localizado no plano xy sobre a curva (figura 106)

$$C: \begin{cases} x(t) = 5cos(t) \\ y(t) = 5sen(t) \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

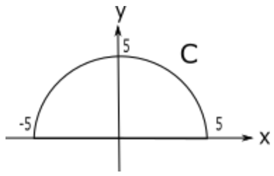

Figura 106:

Resolução. A função densidade de massa $\delta(x, y)$ é contínua. Dividindo o fio em n segmentos com comprimento Δs suficientemente pequeno, podemos considerar $\delta(x, y)$ aproximadamente constante em cada um destes segmentos. Se for $\delta(x_k, y_k)$ o valor aproximado da densidade de massa no k-ésimo segmento, a massa do segmento é aproximadamente $\delta(x_k, y_k)\,\Delta s$. A massa total do fio é aproximada pelo somatório das massas assim obtidas para os n segmentos. Atendendo à definição de integral de linha vista anteriormente, conclui-se que o valor exacto da massa é dado pelo integral

$$M \;=\; \int_C \delta(x, y)\, ds \;=\; \int_0^{\pi} (15 - y)\, \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

Começamos por calcular $\|\vec{r}\,'(t)\|$.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) \;&=\; (5cos(t), 5sen(t)) \\
\vec{r}\,'(t) \;&=\; (-5sen(t), 5cos(t)) \\
\|\vec{r}\,'(t)\| \;&=\; \sqrt{25sen^2(t) + 25cos^2(t)} \;=\; \sqrt{25} \;=\; 5
\end{aligned}$$

A massa do fio é

$$\begin{aligned}
M \;&=\; \int_C \delta(x, y)\, ds \;=\; \int_0^{\pi} (15 - y)\, \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt \\
&=\; \int_0^{\pi} (15 - 5sen(t))5\, dt \;\approx\; 185.6 \quad \text{(gramas)}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Se t vier em *segundos* e as coordenadas de $\vec{r}(t)$ vierem em *metros*, então $\|\vec{r}\,'(t)\| = \|d\vec{r}(t)/dt\|$ vem em *metro/segundo*. Como $\delta(x, y) = (15 - y)$ vem em *grama/metro*, então a unidade de

$$\pi(15 - y)\, \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

é

$$\frac{grama}{metro}\frac{metro}{segundo} segundo \;=\; grama,$$

o que justifica que o valor obtido em (3) representa a massa do fio em gramas. ■

Exercício 153. Determinar a área da região do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, delimitada inferiormente pelo plano $z = 0$ e superiormente pela superfície $z = 1 - x^2$.

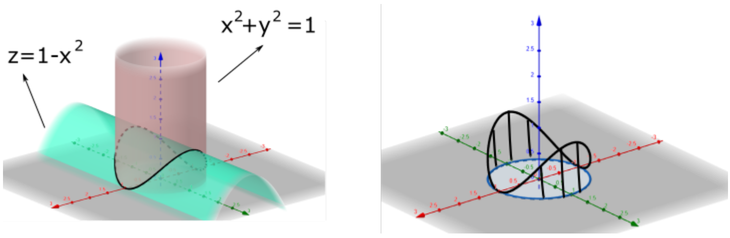

Figura 107:

Resolução. Na figura 107 (esquerda) estão representadas as superfícies $x^2 + y^2 = 1$ (cilindro circular) e $z = 1 - x^2$ (prabolóide cilíndrico), sendo a curva a negro a intersecção destas superfícies. A região do cilindro cuja área se quer calcular está representada a tracejado na figura da direita.

$$\text{Área} \;=\; \int_C (1 - x^2) ds \;=\; \int_C (1 - x^2)\, \|\vec{r}^{\,'}(t)\|\, dt$$

A curva C é a circunferência de centro na origem e raio 1,

$$C : \begin{cases} x(t) \;=\; cos(t) \\ y(t) \;=\; sen(t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Começamos por calcular $\|\vec{r}^{\,'}(t)\|$.

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) \;&=\; (cos(t), sen(t)) \\ \vec{r}^{\,'}(t) \;&=\; (-sen(t), cos(t)) \\ \|\vec{r}^{\,'}(t)\| \;&=\; \sqrt{sen^2(t) + cos^2(t)} \;=\; \sqrt{1} \;=\; 1 \end{aligned}$$

O cálculo da área prossegue.

$$\begin{aligned} 1 - x^2 \;&=\; 1 - cos^2(t) \;=\; sen^2(t) \;=\; \frac{1 - cos(2t)}{2} \\ \text{Área} \;&=\; \int_C (1 - x^2)\, ds \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1 - cos(2t)}{2}\, dt \\ &=\; \left(\frac{t}{2} - \frac{sen(2t)}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} \;=\; \pi \quad \text{(unidades de área)} \end{aligned}$$

■

5.10 Aplicação dos Integrais de Linha

Uma aplicação importante dos integrais de linha é o cálculo do trabalho realizado por um campo de forças ao longo de um caminho. Começamos por definir **campo de forças** (ou **campo vetorial**).

Campo de forças, ou **campo vetorial**, é uma função que atribui um vetor a cada ponto do espaço.

2D

$$\vec{F}(x,y) \;=\; f(x,y)\hat{\mathbf{i}} + g(x,y)\hat{\mathbf{j}} \;=\; (f(x,y),\; g(x,y))$$

3D

$$\vec{F}(x,y,z) \;=\; f(x,y,z)\hat{\mathbf{i}} + g(x,y,z)\hat{\mathbf{j}} + h(x,y,z)\hat{\mathbf{k}} \;=\; (f(x,y,z),\; g(x,y,z),\; h(x,y,z))$$

Exemplo 1. Um esboço do campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) \;=\; x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

está representado na esquerda da figura 108. Cada vetor representado no plano xy corresponde ao valor do campo vetorial no respectivo ponto.

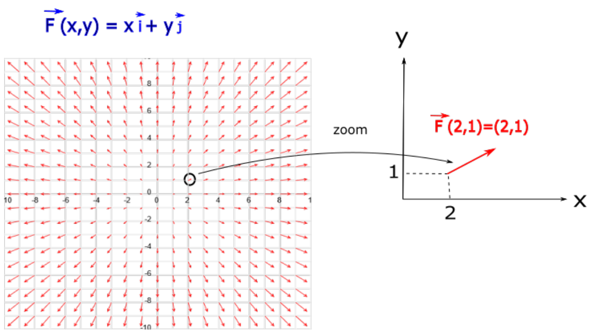

Figura 108:

Na imagem da direita representa-se o vetor $\vec{F}(2,1) = (2,1)$ aplicado no ponto $(x,y) = (2,1)$. O vetor representa o valor do campo vetorial $\vec{F}(x,y)$ no ponto $(2,1)$.

Exemplo 2.

$$\vec{F}(x,y) \;=\; y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$$

Um esboço deste campo vetorial está representado na esquerda da figura 109.

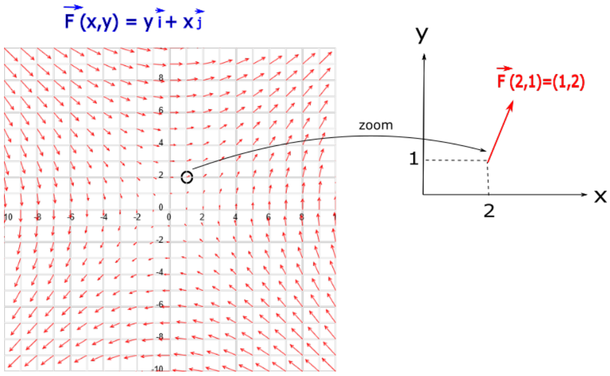

Figura 109:

Na imagem da direita representa-se o vetor $\vec{F}(2,1) = (1,2)$ aplicado no ponto $(2,1)$.

Exemplo 3.

$$\vec{F}(x,y) \;=\; -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$$

Um esboço deste campo vetorial está representado na esquerda da figura 110.

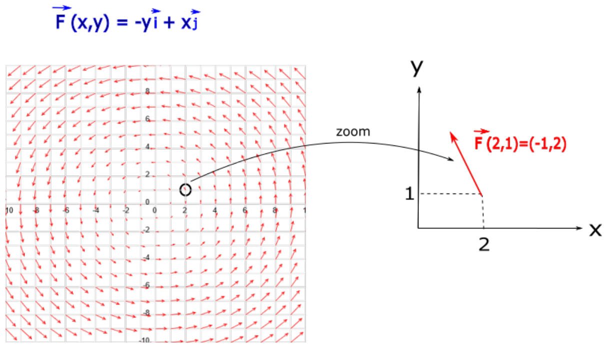

Figura 110:

Na figura da direita, representa-se o vetor $\vec{F}(2,1) = (-1,2)$ aplicado no ponto $(2,1)$.

Trabalho Realizado por uma Força ao Longo de um Caminho

Caminho é uma curva definida por uma parametrização.

Trabalho , em física, significa energia. Vamos recordar o conceito.

Um objecto de massa m (kg), deslocando-se segundo uma trajectória linear, com uma velocidade de módulo v_i (m/s), é actuado por uma força constante de intensidade F (N), com a direcção e o sentido do movimento do corpo. A força é exercida ao longo do percurso retilíneo que começa no ponto $x = 0$ e termina no ponto $x = D$ (m). Qual a velocidade v_f do corpo no final do segmento de comprimento D? (imagem esquerda, figura 111)

Figura 111:

Vamos fazer uma experiência matemática para averiguar que informação nos pode dar o produto FD. Por ser $F = ma$ constante, a aceleração $a(t)$ é também constante, sendo a velocidade $v(t)$ linear e crescente (figura 112). Consideramos $t = 0$ o instante em que o corpo se encontra na posição $x = 0$ e a força F começa a ser exercida. Podemos escrever

$$FD \;=\; maD \;=\; m\frac{\Delta v}{\Delta t}D \;=\; m\Delta v\frac{D}{\Delta t}, \tag{4}$$

sendo Δt o tempo que o objecto leva a percorrer o trajecto linear de $x = 0$ a $x = D$ e $\Delta v/\Delta t$ a aceleração. A variação de velocidade é $\Delta v = v_f - v_i$ e $D/\Delta t$ representa a velocidade média $(v_f + v_i)/2$ entre os pontos $x = 0$ e $x = D$. A expressão (4) fica

$$FD \;=\; m(v_f - v_i)\frac{v_f + v_i}{2},$$

ou

$$\begin{aligned} FD &= m\frac{v_f^2 - v_i^2}{2} \\ FD &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2. \end{aligned} \tag{5}$$

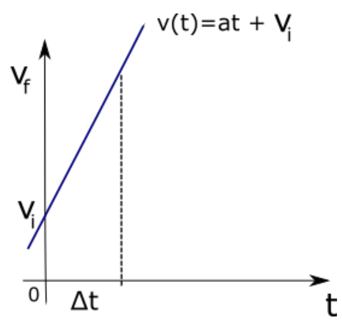

Figura 112: Aceleração constante, positiva; velocidade linear, crescente.

O valor de FD em (5) diz-se **trabalho efectuado pela força** F sobre o corpo de massa m, **ao longo do caminho** de medida D. Conhecendo a força F, a distância D, a massa do corpo m e a sua velocidade inicial v_i, podemos usar (5) para calcular a velocidade final v_f.

Um significado físico para a expressão $mv_i^2/2$ pode ser obtido se supusermos que a força tem o sentido contrário ao do movimento do corpo, conforme a imagem na direita da figura 111. Neste caso, qual a distância **D** ao fim da qual o corpo, com velocidade inicial v_i, pára por acção da força $-F$? A resposta é dada usando a fórmula (5), com F substituida por $-F$ e v_f substituida por 0, por ser nula a velocidade do corpo parado. Resolvendo a equação resultante em ordem a D, temos

$$D = \frac{mv_i^2}{2F}. \qquad (6)$$

Verificamos que, conhecida a força F, o termo $mv_i^2/2$ é directamente proporcional à distância necessária para travar o corpo. O termo $mv_i^2/2$ dá-nos uma medida do estrago que o corpo causa quando embate num alvo (D é a distância que o corpo percorre num meio que lhe oferece uma resistência $-\vec{F}$ até ser parado). É designado por **energia cinética** (= energia de movimento) do corpo. Obviamente, um corpo parado tem energia cinética nula.

Na figura 113 temos a indicação de como calcular a energia cinética ganha, ou perdida, por um corpo em movimento sujeito a uma força variável.

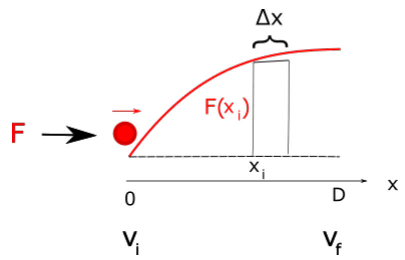

Figura 113:

Subdivide-se o percurso em pequenos deslocamentos Δx nos quais a força pode ser tomada como constante (esta aproximação é tanto melhor quanto menor for Δx). Para cada deslocamento Δx a variação da energia cinética do corpo é dada por $F(x_i)\Delta x$, que corresponde à área do rectângulo cuja base é delimitada pelos pontos x_i e x_{i+1}. Trata-se agora de somar os produtos $F(x)\Delta x$ para os restantes rectângulos da subdivisão do trajecto, e fazer o número de rectângulos tender para infinito na expressão resultante. Temos o mesmo processo que já encontrámos no cálculo do comprimento de uma curva, ou no caso geral de aplicação de um integral simples. Podemos reescrever a expressão (5) para o caso de uma força variável,

$$\int_0^D F(x)dx \;=\; \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2, \tag{7}$$

Se a força for variável ao longo da trajectória, ou se a trajectória não for linear (imagem à esquerda na figura 114), podemos subdividir a trajectória em arcos de medida Δs suficientemente pequena, de modo que se possa considerar a força aproximadamente constante sobre cada subdivisão, cada uma das subdivisões sendo aproximadamente linear (imagem à direita na figura 114). O trabalho ΔW_k realizado pela força ao longo da k-ésima subdivisão da trajectória é

$$\Delta W_k \;\approx\; \|\vec{F}_k\| cos(\theta)\Delta s. \tag{8}$$

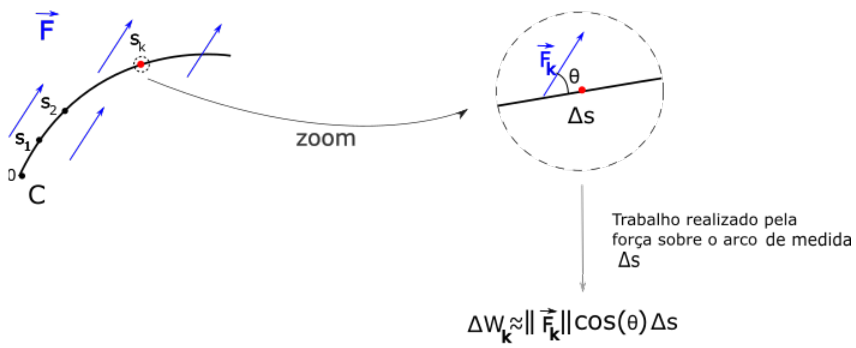

Figura 114:

Fica claro que o trabalho realizado pela força sobre a curva C é dado por um integral de linha, que resulta do limite do somatório dos trabalhos realizados ao longo dos percursos de medida Δs.

$$W \;\approx\; \sum_{k=1}^{n} \Delta w_k$$
$$W \;=\; \int_C dW$$

Quer-se obter uma fórmula que possamos usar, tendo como dados o campo de forças $\vec{F}$ e uma parametrização da curva C. Na fórmula (8), a expressão $\|\vec{F}_k\| cos(\theta)$ corresponde à projecção de $\vec{F}$ na direcção da tangente à curva. Esta expressão pode escrever-se

$$\|\vec{F}_k\| cos(\theta) \;=\; \vec{F}_k \cdot \frac{\vec{r}_k^{\,'}}{\|\vec{r}_k^{\,'}(t)\|}$$

sendo $\vec{r}_k^{\,'}/\|\vec{r}_k^{\,'}(t)\|$ o vetor unitário com a direcção tangente à curva no ponto e sentido igual ao sentido que a parametrização define sobre a curva. Podemos escrever

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}^{\,'}(t)}{\|\vec{r}^{\,'}(t)\|} ds.$$

Como $ds = \|\vec{r}^{\,'}(t)\|\, dt$, obtém-se

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}^{\,'}(t)}{\|\vec{r}^{\,'}(t)\|} \|\vec{r}^{\,'}(t)\|\, dt \\ W &= \int_C \vec{F} \cdot \vec{r}^{\,'}(t)\, dt \end{aligned}$$

Se

- $W = 0$, o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é **nulo**. As velocidades inicial e final de um corpo que percorra o caminho, sob ação do campo de forças $vecF$, são iguais;

- $W > 0$, o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é **positivo**. A velocidade final de um corpo que percorra o caminho, sob ação do campo de forças $vecF$, é superior à sua velocidade inicial;

- $W < 0$, o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é **negativo**. A velocidade final de um corpo que percorra o caminho, sob ação do campo de forças $vecF$, é inferior à sua velocidade inicial.

Exercício 154. Determinar o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$ ao longo da curva C: $x^2 + y^2 = 9,\ x, y \geq 0$, orientada no sentido retrógrado.

Resolução. A curva admite a parametrização

$$C : \begin{cases} x(t) &= 3cos(t) \\ y(t) &= 3sen(t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Um esboço do campo vetorial $\vec{F}(x, y)$ e da curva C, está representado na figura 115.

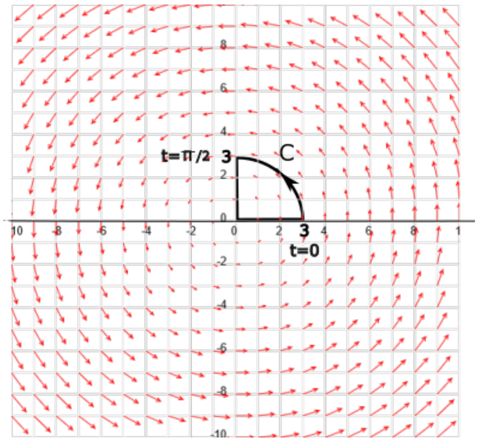

Figura 115:

Como o sentido da projecção do campo de forças sobre a curva coincide com o sentido em que esta é descrita, o trabalho realizado pelo campo de forças sobre C deve ser positivo.

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

Começamos por calcular $\vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)$.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (3cos(t), 3sen(t)) \\
\vec{r}\,'(t) &= (-3sen(t), 3cos(t)) \\
\vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t) &= (-y, x) \cdot (-3sen(t), 3cos(t)) \\
&= (-3sen(t), 3cos(t)) \cdot (-3sen(t), 3cos(t)) \;=\; 9sen^2(t) + 9cos^2(t) \;=\; 9
\end{aligned}$$

Substituimos este valor no integral.

$$W = \int_0^{\pi/2} 9dt = \frac{9}{2}\pi \;\; Joules.$$

Como o trabalho do campo $\vec{F}$ sobre a curva C, parametrizada no sentido indicado, é positivo, concluimos que a ação do campo vetorial aumenta a velocidade de um corpo que se desloque sobre C neste sentido.

Conhecendo o módulo da velocidade inicial v_i do corpo e a sua massa m, podemos determinar o módulo da velocidade do corpo no fim do percurso, v_f, resolvendo em ordem a v_f a equação

$$\frac{9\pi}{2} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2.$$

■

Vamos agora calcular o trabalho realizado sobre o caminho da figura 116. A curva continua a ser o mesmo quarto de circunferência do caso anterior, mas a parametrização define sobre ela o sentido oposto. O trabalho deve ter um valor igual em módulo e de sinal oposto ao calculado acima. Notar que o sentido definido sobre a curva deve ser interpretado como o sentido de deslocação de um corpo sobre o qual atua o campo de forças. A velocidade final deve, neste caso, ser menor que a velocidade inicial.

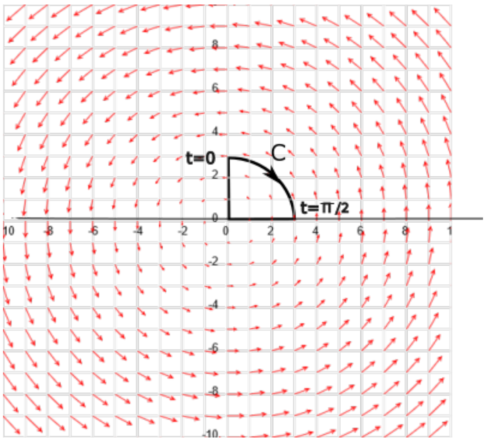

Figura 116:

Começamos por parametrizar esta curva.

$$C: \begin{cases} x(t) &= 3cos(-t+\pi/2) \\ y(t) &= 3sen(-t+\pi/2) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Verifiquemos que esta parametrização é correta. Para $t=0$ temos

$$(x(0), y(0)) = (3cos(\pi/2), 3sin(\pi/2)) = (0,3),$$

e para $t=\pi/2$

$$(x(\pi/2), y(\pi/2)) = (3cos(0), 3sin(0)) = (3,0).$$

Usando as fórmulas do seno e co-seno de uma soma de ângulos, obtemos esta versão simplificada da curva paramétrica,

$$C: \begin{cases} x(t) &= 3sin(t) \\ y(t) &= 3cos(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Efetuamos em seguida o cálculo do trabalho.

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

Começamos por calcular $\vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)$.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (3sin(t), 3cos(t)) \\
\vec{r}\,'(t) &= (3cos(t), -3sin(t)) \\
\vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t) &= (-y, x) \cdot (3cos(t), -3sin(t)) \\
&= (-3cos(t), 3sin(t)) \cdot (3cos(t), -3sin(t)) \;=\; -9cos^2(t) - 9sin^2(t) \;=\; -9
\end{aligned}$$

Substituimos este valor no integral.

$$W = \int_0^{\pi/2} -9dt = -\frac{9}{2}\pi \;\; Joules.$$

Exercício 155. Determinar o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - z\hat{\mathbf{k}}$ ao longo de uma circunferência de centro no ponto $(0, 0, 1)$ e raio 3, no sentido horário na perspetiva de quem olha de cima para a projeção da curva no plano xy.

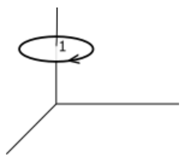

Figura 117:

Resolução. A curva (figura 117) admite a parametrização

$$C : \begin{cases} x(t) = 3sin(t) \\ y(t) = 3cos(t) \\ z(t) = 1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Calculamos o trabalho realizado da forma

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

Começamos por calcular $\vec{F}\cdot\vec{r}\,'(t)$.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (3sin(t), 3cos(t), 1)\\
\vec{r}\,'(t) &= (3cos(t), -3sin(t), 0)\\
\vec{F}\cdot\vec{r}\,'(t) &= (xy, 3, -z)\cdot(3cos(t), -3sin(t), 0)\\
&= (9cos(t)sin(t), 3, -1)\cdot(3cos(t), -3sin(t), 0) \;=\; 27cos^2(t)sin(t) - 9sin(t)
\end{aligned}$$

O cálculo do trabalho prossegue.

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{2\pi}(27cos^2(t)sin(t) - 9sin(t))dt\\
&= \left(-9cos^3(t) + 9cos(t)\right)\Big|_0^{2\pi} \;=\; 0\ Joules.
\end{aligned}$$

Como o trabalho do campo $\vec{F}$ sobre a curva C, parametrizada no sentido indicado, é nulo, concluimos que as velocidades inicial e final de um corpo que se desloca sobre C, sob ação do campo vetorial, são iguais. ■

Exercício 156. Considerar a curva no plano definida pelos pontos $(x, y) = (2, 2k)$, $k \in [0, 2]$.

(a) Mostrar que a curva não está parametrizada no comprimento do arco.

(b) Parametrizar a curva no comprimento do arco, sendo $s = 0$ no ponto $(2, 4)$.

(c) Considerar o campo de forças $\vec{F}(x, y) = (x+y)\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{2}\hat{\mathbf{j}}$. Marcar sobre a curva os vetores $\vec{F}(2, 0)$, $\vec{F}(2, 2)$ e $\vec{F}(2, 4)$. Determinar o trabalho efetuado pelo campo de forças ao longo dos caminhos definidos pela parametrização usada na alínea (a) e pela parametrização usada na alínea (b).

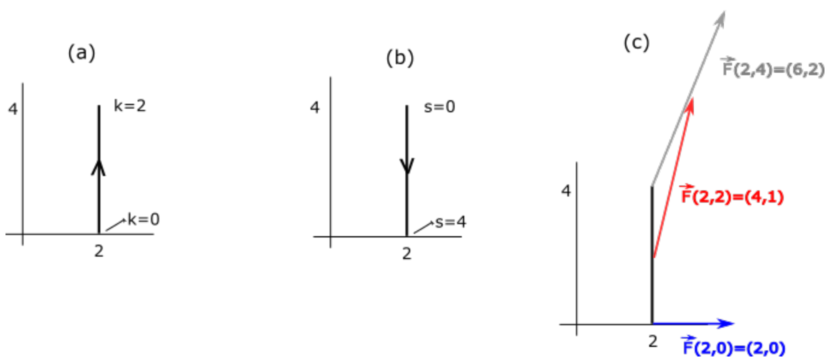

Figura 118:

Resolução.

(a) A curva (figura 118, (a)) admite a parametrização

$$C: \begin{cases} x(t) &= 2 \\ y(t) &= 2t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Claramente o parâmetro t não representa o comprimento do arco medido desde o ponto $t = 0$, já que o valor máximo de t é 2 e o comprimento do segmento é igual a 4.

(b) Para parametrizarmos a curva no comprimento do arco s, definindo sobre ela o sentido indicado na figura 118 (b), precisamos de obter uma expressão de t em função de s, $t = t(s)$, para substituir no parâmetro t de C. Tem que ser $s = 0$ quando $t = 2$ e $s = 4$ quando $t = 0$. Usamos a relação

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}\,'(t)\| dt$$

da forma

$$s(t) = \int_{t}^{2} \|\vec{r}\,'(t)\| dt,$$

para termos $s(2) = 0$, e por ser $t \leq 2$ no intervalo $[0, 2]$ do parâmetro.

$$\vec{r}(t) = (2, 2t) \Rightarrow \vec{r}\,'(t) = (0, 2) \Rightarrow \|\vec{r}\,'(t)\| = 2$$
$$s(t) = \int_{t}^{2} 2dt = 2t\Big|_{t}^{2} = 4 - 2t \Rightarrow t = 2 - \frac{s}{2}$$

Substituindo esta expressão na variável t da parametrização da alínea (a) e adaptando os extremos do intervalo de s temos

$$C: \begin{cases} x(s) &= 2 \\ y(s) &= 4 - s \end{cases} \qquad 0 \leq s \leq 4$$

que é a parametrização de C no comprimento do arco, com o sentido indicado na figura 118 (b).

(c) Os vetores estão marcados na figura 118 (c). O seu cálculo é imediato por ser $\vec{F}(x, y) = (x + y)\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{2}\hat{\mathbf{j}} = (x + y, y/2)$.

$$\begin{aligned} \vec{F}(2, 0) &= (2, 0) \\ \vec{F}(2, 2) &= (4, 1) \\ \vec{F}(2, 4) &= (6, 2) \end{aligned}$$

Calculamos o trabalho realizado da forma

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt,$$

usando a parametrização da alínea (a), que define na curva o sentido de baixo para cima. Começamos por determinar $\vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)$ usando alguns dos cálculos já efetuados.

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'(t) &= (0, 2) \\ \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t) &= (x + y, y/2) \cdot (0, 2) \\ &= (2 + 2t, t) \cdot (0, 2) \; = \; 2t \end{aligned}$$

O cálculo do trabalho prossegue.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^2 2t\; dt \\ &= t^2 \Big|_0^2 \; = \; 4\; Joules. \end{aligned}$$

Como o trabalho do campo $\vec{F}$ sobre a curva C, parametrizada no sentido indicado, é positivo, concluimos que a ação do campo vetorial aumenta a velocidade de um corpo que se desloque sobre C neste sentido.

O trabalho para o caso da parametrização da alínea (b) é de -4 *Joules*, porque neste caso a curva é percorrida no sentido oposto ao da alínea (a). O campo de forças trava o movimento efetuado neste sentido. Mas vamos verificar este resultado efetuando os cálculos. Como a parametrização é no parâmetro s, o comprimento do arco, o integral que fornece o trabalho é da forma

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(s)\, ds.$$

Começamos por calcular $\vec{F} \cdot \vec{r}\,'(s)$ usando alguns dos cálculos já efetuados.

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'(t) &= (2, 4 - s)\,' = (0, -1) \\ \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(s) &= (x + y, y/2) \cdot (0, -1) \\ &= (2 + (4 - s), (4 - s)/2) \cdot (0, -1) \; = \; -2 + \frac{s}{2} \end{aligned}$$

O cálculo do trabalho prossegue.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^4 \left(-2+\frac{s}{2}\right)\, ds \\ &= \left(-2s+\frac{s^2}{4}\right)\Big|_0^4 \;=\; -8+4 \;=\; -4\, Joules. \end{aligned}$$

■

5.11 Exercícios

Exercício 157. Encontrar as parametrizações seguintes no comprimento s do arco, para a reta

$$x = 2t+1, \;\; y = 3t-2.$$

(a) O sentido definido sobre a reta mantém-se e $s=0$ para $t=0$.

(b) O sentido definido sobre a reta é invertido e $s=0$ para $t=-2$.

Exercício 158. Determinar os comprimentos das curvas paramétricas.

(a) $x = cos^3(t),\; y = sen^3(t),\; z = 2,\; 0 \le t \le \pi/2$

(b) $x = e^t,\; y = e^{-t},\; z = \sqrt{2}t,\; -1 \le t \le 1$

Exercício 159.

(a) Representar graficamente o arco da curva definida no plano xy

$$C : \begin{cases} x(t) \;=\; t \\ y(t) \;=\; t/2 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R},$$

que tem como pontos extremos $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) = (4, 2)$.

(b) Indicar o sentido definido pela parametrização sobre a curva.

(c) Escrever a equação cartesiana da curva C.

(d) Determinar o integral de linha

$$I = \int_C (x+y)\, ds$$

sobre o arco de curva definido pelos dois extremos indicados e atribuir-lhe um significado geométrico.

Exercício 160. Considerar a curva paramétrica,

$$C : \begin{cases} x(t) &= -3sen(2t) \\ y(t) &= 3cos(2t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

(a) Representar graficamente a curva, marcar o vetor $\vec{r}(0) = (x(0), y(0))$, e indicar o sentido definido sobre a curva.

(b) Determinar a equação vetorial da reta tangente à curva no ponto $t = \pi/8$.

Exercício 161. Seja C a curva definida no plano xy pela parametrização

$$\begin{cases} x(t) &= 2sin(t) \\ y(t) &= 2cos(t) \end{cases} , \; 0 \leq t \leq \pi.$$

(**a**) Escrever a equação cartesiana da curva C.

(**b**) Representar graficamente a curva C; marcar sobre a curva os pontos $(\mathbf{x}(\mathbf{0}), \mathbf{y}(\mathbf{0}))$ e $(\mathbf{x}(\pi), \mathbf{y}(\pi))$. Indicar o sentido definido sobre a curva pela parametrização.

(**c**) Determinar o trabalho realizado pelo campo vetorial $\vec{F} = -\mathbf{y}\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{2x}\hat{\mathbf{j}}$ sobre a curva C. Atribuir um significado físico ao valor obtido.

Exercício 162. Considerar a curva paramétrica,

$$C : \begin{cases} x(t) &= -3sen(2t) \\ y(t) &= 3cos(2t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

(a) Representar graficamente a curva, marcar o vetor $\vec{r}(0) = (x(0), y(0))$, e indicar o sentido definido sobre a curva.

(b) Determinar a equação vetorial da reta tangente à curva no ponto $t = \pi/8$.

(c) Calcular o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = (2, 0)$ sbre uma partícula que se desloque sobre a curva. Qual o significado do resultado obtido?

Exercício 163. Considerar a curva paramétrica,

$$C : \begin{cases} x(t) &= 2t \\ y(t) &= 8t^3 + 4 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(a) Escrever a equação cartesiana da curva, marcar o vetor $\vec{r}(0) = (x(0), y(0))$, e indicar o sentido definido sobre a curva.

(b) Determinar a equação vetorial da reta tangente à curva no ponto $t = 1/2$.

(c) Calcular o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = (-y/x, 2x)$ sobre o caminho C. Qual o significado do resultado obtido?

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, Nikolai Piskounov.

2. *Calculus*,vol II, Howard Anton.