

Capítulo 5. Cálculo Vectorial – Parte 2

-
- Parametrização de Curvas
 - Derivada de um Vetor
 - Comprimento de um Arco de Curva
 - Exercícios
-

5.4 Parametrização de Curvas

Na imagem esquerda da figura 89 está representada a circunferência de centro na origem e raio R . As duas equações,

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

dizem-se **equações paramétricas da circunferência** no **parâmetro** t , e fazem corresponder a cada valor do parâmetro t , no intervalo $[0, 2\pi]$, um ponto $(x(t), y(t))$ da circunferência.

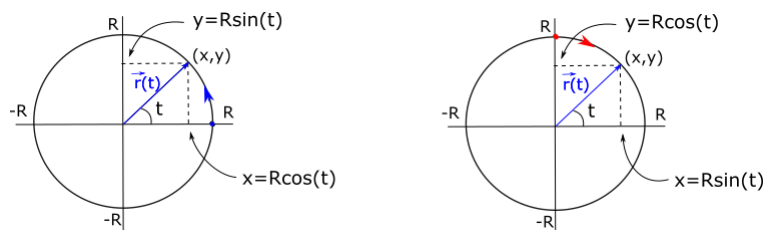


Figura 89:

É imediato verificar que os pontos $(x(t), y(t))$ pertencem à circunferência, uma vez que as funções coordenadas $x(t), y(t)$ destes pontos satisfazem a equação cartesiana da circunferência, $x^2 + y^2 = R^2$,

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = (R\cos(t))^2 + (R\sin(t))^2 = R^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = R^2.$$

Variando o ângulo t no intervalo $[0, 2\pi]$, ficam contemplados todos os pontos da circunferência. À medida que t aumenta, a extremidade do **vetor posição** $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ percorre a circunferência no sentido anti-horário. A circunferência definida pelas equações paramétricas diz-se **curva paramétrica**. Estabece-se assim uma diferença entre **curva**, que é uma linha no espaço, e **curva paramétrica**, que é

uma linha no espaço com um sentido associado. O **sentido** definido sobre a curva é o obtido quando se aumenta o parâmetro t .

A parametrização (1) define sobre a curva o sentido anti-horário (ou positivo). Para $t = 0$ temos

$$\vec{r}(0) = (x(0), y(0)) = (R\cos(0), R\sin(0)) = (R, 0).$$

Já a parametrização (figura 89, direita)

$$C : \begin{cases} x(t) = R\sin(t) \\ y(t) = R\cos(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

define sobre a curva o sentido horário (ou negativo). Neste caso, para $t = 0$ temos

$$\vec{r}(0) = (x(0), y(0)) = (R\sin(0), R\cos(0)) = (0, R).$$

Estas duas parametrizações representam a mesma curva, $x^2 + y^2 = R^2$, percorrida em sentidos opostos e com pontos diferentes para $\vec{r}(0)$.

Exercício 135. Escrever a equação vetorial, as equações paramétricas e a equação cartesiana da reta que contém o ponto $P = (4, 2)$ e tem a direcção do vetor $\vec{u} = (-1, 5)$.

Resolução. Equação vetorial

$$\vec{r}(t) = P + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{r}(t) = (4, 2) + t(-1, 5)$$

$$\vec{r}(t) = (4 - t)\hat{\mathbf{i}} + (2 + 5t)\hat{\mathbf{j}}$$

sendo $x(t) = 4 - t$ e $y(t) = 2 + 5t$ as coordenadas dos pontos da reta em função do parâmetro t . Qualquer uma destas duas últimas equações se diz **equação vetorial** da reta.

Equações paramétricas

Da equação vetorial anterior, $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}}$, obtemos as equações paramétricas

$$C : \begin{cases} x(t) = 4 - t \\ y(t) = 2 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

■

Na figura 90 está representado o gráfico da reta. O ponto correspondente a $t = 0$ é $(x(0), y(0)) = (4, 2)$. O sentido definido sobre a curva pela parametrização diz-se **sentido positivo**, que é, como já foi referido, o sentido correspondente ao aumento dos valores de t . Não confundir com o sentido positivo associado a um movimento circular, que é sinónimo de movimento no sentido oposto ao dos ponteiros do relógio.

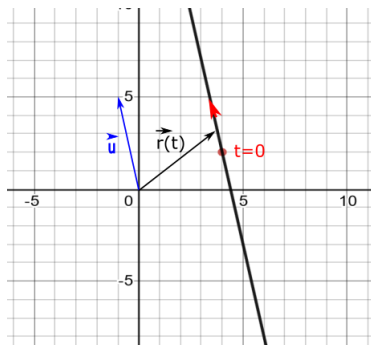


Figura 90:

Equação cartesiana

Resolvendo a primeira equação paramétrica em ordem a t obtém-se $t = 4 - x$. Substituindo esta expressão de t na segunda equação paramétrica, fica

$$y = 2 + 5t$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + 5(4 - x)$$

$$\Leftrightarrow y = -5x + 22$$

que é a equação cartesiana da reta.

Exercício 136. Parametrizar a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, sendo o parâmetro $0 \leq t \leq 2\pi$, de modo que $\vec{r}(0) = (x(0), y(0)) = (-5, 0)$, e o sentido definido sobre a curva seja o sentido horário (figura 91).

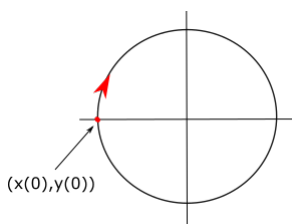


Figura 91:

Resolução. A parametrização usada na curva da figura 89 (à direita)

$$C : \begin{cases} x(t) = 5\sin(t) \\ y(t) = 5\cos(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

define o sentido pretendido sobre a curva, mas com $(x(0), y(0)) = (0, 5)$. Para obtermos $(x(0), y(0)) = (-5, 0)$, retiramos $\pi/2$ ao ângulo.

$$C : \begin{cases} x(t) = 5\sin(t - \pi/2) \\ y(t) = 5\cos(t - \pi/2) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(verificar que esta parametrização é a pretendida)

Por ser $\sin(t - \pi/2) = -\cos(t)$ e $\cos(t - \pi/2) = \sin(t)$, podemos escrever

$$C : \begin{cases} x(t) = -5\cos(t) \\ y(t) = 5\sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

■

Exercício 137. Escrever uma parametrização no parâmetro $0 \leq t \leq 1$ que represente o segmento da reta $y = 2x$, cujos extremos são os pontos $(1, 2)$ e $(2, 4)$ (figura 92), e que defina sobre este segmento o sentido indicado.

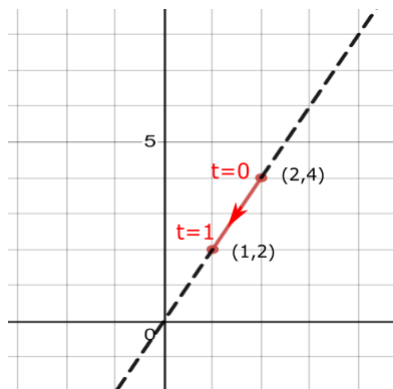


Figura 92:

Resolução. Para obtermos uma expressão para $x(t)$ podemos supor uma relação linear entre x e t , e usar os pontos $(t, x) = (0, 2)$ e $(t, x) = (1, 1)$ para obter a equação $x = -t + 2$. A partir desta relação,

obtém-se $y = 2x = 2(-t + 2) = -2t + 4$.

$$C : \begin{cases} x(t) = -t + 2 \\ y(t) = -2t + 4 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

■

Podemos verificar que qualquer uma das três parametrizações seguintes representa o mesmo segmento e define sobre ele o mesmo sentido.

$$C : \begin{cases} x(t) = -t^2 + 2 \\ y(t) = -2t^2 + 4 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C : \begin{cases} x(t) = -\cos(t) + 2 \\ y(t) = -2\cos(t) + 4 \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$$

Nem todas as parametrizações definem um sentido sobre uma curva geométrica. Por exemplo, a parametrização

$$C : \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 10\pi$$

produz um movimento de vai-vem sobre o segmento de reta $y = x$, $-1 \leq x \leq 1$.

5.5 Derivada de um Vector

Dada uma curva paramétrica com vetor posição $\vec{r}(t)$, consideremos a diferença de vetores $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ (figura 93). Fixemos o valor de t e façamos $\Delta t \rightarrow 0$. À medida que Δt diminui a extremidade do vetor $\vec{r}(t + \Delta t)$ vai deslizando sobre a curva, aproximando-se da extremidade do vetor $\vec{r}(t)$. A diferença $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ tende para o vetor nulo,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)) = \vec{0}.$$

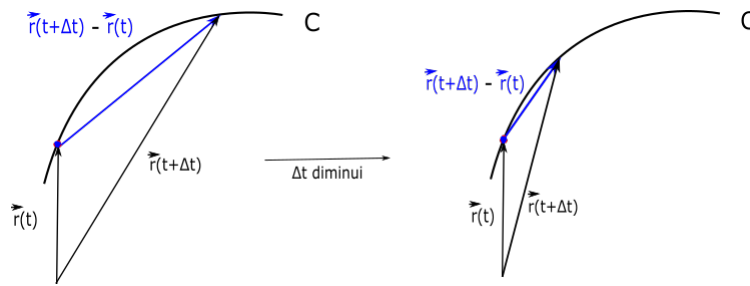


Figura 93:

Consideremos agora o limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

O cociente na expressão é um vetor com a direção de $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, uma vez que representa a multiplicação deste vetor pelo escalar $1/\Delta t$. Se o limite existir é um vetor que se designa por **derivada do vetor** $\vec{r}(t)$ no ponto t , e se escreve

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \text{ ou } \vec{r}'(t).$$

O vetor $\vec{r}'(t)$ tem a **direção** da reta tangente à curva no ponto onde é calculado. O seu **sentido** é o sentido definido sobre a curva pela parametrização.

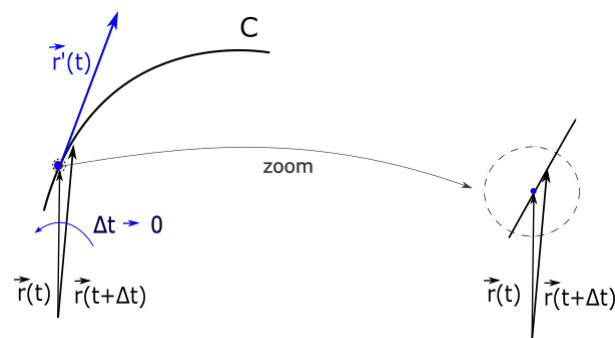


Figura 94:

Exercício 138. Dada a curva paramétrica

$$C : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3$$

- (a) Determinar um vetor com a direcção da reta tangente à curva no ponto $t = 2$.
 (b) Determinar uma equação vetorial da reta tangente à curva no ponto $t = 2$ (figura 95).

Resolução. (a) O vetor $\vec{r}'(2)$ tem a direcção da reta tangente à curva no ponto $t = 2$.

$$\vec{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} = (t, t^2)$$

$$\vec{r}'(t) = (1, 2t)$$

$$\vec{r}'(2) = (1, 4)$$

- (b) Seja q a reta e $\vec{q}(t)$ o seu vetor posição. A reta contém o ponto $(x(2), y(2)) = (2, 4)$, e tem a direcção do vetor $\vec{r}'(2)$. Com estes dados podemos escrever uma equação vetorial da reta.

$$\vec{q}(t) = (2, 4) + t(1, 4)$$

$$= (2 + t)\hat{\mathbf{i}} + (4 + 4t)\hat{\mathbf{j}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

■

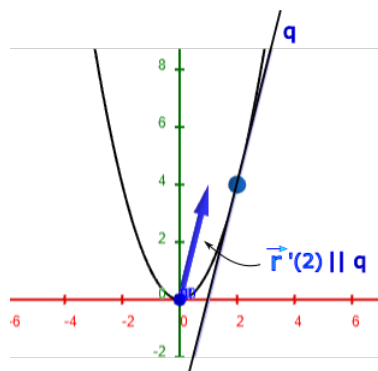


Figura 95: $\vec{r}'(2)$ é paralelo à reta.

5.6 Comprimento de um Arco de Curva

Problema: usar um integral para obter uma fórmula para o comprimento do **arco de curva**¹ correspondente ao gráfico de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ de valores de x .

¹Bocado de curva.

Na esquerda da figura 96 está representada uma curva a traço grosso, de comprimento L_1 . Podemos obter um valor aproximado para L_1 somando as medidas de segmentos de reta apoiados na curva. Seja L_3 a soma das medidas dos segmentos de reta representada a traço fino. É imediato verificar que $L_3 < L_1$ (porquê?). Uma aproximação melhor que L_3 pode ser conseguida substituindo cada segmento de reta a traço fino por dois segmentos tracejados, conforme se vê na imagem esquerda da figura. Se L_2 é o comprimento da linha quebrada a tracejado, podemos escrever $L_3 < L_2 < L_1$. Podemos melhorar ainda mais a aproximação, substituindo cada segmento de reta a tracejado por dois segmentos de reta apoiados na curva a traço grosso, somando depois os comprimentos dos segmentos que formam a linha quebrada resultante. Repetindo sucessivamente o processo, vamos obtendo linhas quebradas com cada vez mais segmentos, cujos comprimentos são aproximações cada vez melhores do comprimento L_1 .

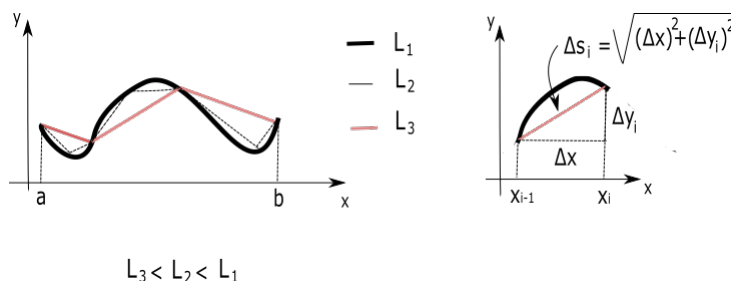


Figura 96:

Na imagem da direita no figura 96 está representado um arco da curva (traço grosso) e um segmento de reta aproximante (traço fino). O comprimento Δs_i do segmento de reta pode ser calculado usando o teorema de Pitágoras, com as diferenças de ordenadas, Δy_i , e de abcissas, Δx , dos pontos inicial e final do arco. A figura sugere a forma de obter uma linha quebrada formada pela justaposição de segmentos de reta: dividimos o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais de medida Δx , correspondendo a cada uma um pedaço da curva e o respectivo segmento de reta aproximante. O comprimento do i -ésimo segmento é $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$. A soma S_n dos comprimentos dos n segmentos da linha quebrada é

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ a taxa de variação $\Delta y_i / \Delta x$ tende para a derivada da função y' no ponto x_i . Se o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existir, então pode exprimir-se como um integral definido, bastando que a função $\sqrt{1 + (y')^2}$ seja contínua no intervalo $[a, b]$, o que acontece se $y' = f'(x)$ for contínua neste intervalo. Obtemos uma fórmula para o comprimento de uma curva suave (i.e., com derivada em todos os pontos) $y = f(x)$ no

intervalo $[a, b]$ de valores de x .

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \end{aligned}$$

e finalmente

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (2)$$

Exercício 139. Determinar o comprimento do arco da curva $y = x^{3/2}$, definido pelos pontos $(1, 1)$ e $(2, 2\sqrt{2})$.

Resolução. Aplicando a fórmula (2), temos

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (3)$$

Por ser $y' = 3\sqrt{x}/2$ temos $(y')^2 = 9x/4$ e o integral (3) fica

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + 9x/4} dx = \frac{9}{4} \frac{(1 + 9x/4)^{3/2}}{3/2} \Big|_1^2 \approx 2.09$$

■

5.7 Exercícios

Exercício 140. Considerar a função vetorial $\vec{r}(t) = (2 - t^2, 2t)$. Marcar no plano os vetores indicados.

(a) $\vec{r}(0)$

(b) $\vec{r}(-1)$

(c) $\vec{r}(1/2)$

Usar o plotter Geogebra3D para confirmar os resultados obtidos.

Resolução. (c)

$$\vec{r}(1/2) = (2 - (1/2)^2, 2(1/2)) = (7/4, 1).$$

■

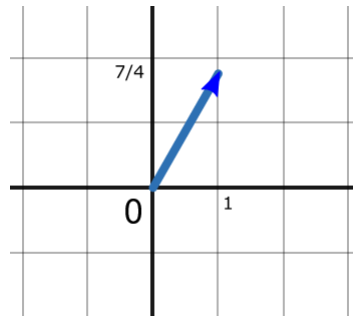


Figura 97:

Exercício 141. Mostrar que o gráfico da curva $\vec{r}(t) = t\sin(t)\vec{i} + t\cos(t)\vec{j} + t^2\vec{k}$ se encontra no parabolóide $z = x^2 + y^2$. Determinar a equação da reta tangente à curva no ponto $(\pi/2, 0, \pi^2/4)$. Usar o plotter Geogebra3D para confirmar os resultados obtidos.

Resolução. Para mostrarmos que o parabolóide é a superfície que contém a curva, temos que verificar que as funções coordenadas da curva

$$(x(t), y(t), z(t)) = (t\sin(t), t\cos(t), t^2)$$

satisfazem a equação

$$z = x^2 + y^2.$$

Substituindo nesta equação as coordenadas, obtemos

$$\begin{aligned} t^2 &= (t\sin(t))^2 + (t\cos(t))^2 \\ \Leftrightarrow t^2 &= t^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) \\ \Leftrightarrow t^2 &= t^2, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Exercício 142. A parametrização da trajetória de um ponto que se move no plano é $x = 2 - \cos(3t)$, $y = 3 + \sin(3t)$, $0 \leq t \leq b$.

- (a) Mostrar que a trajetória pertence a uma circunferência.
- (b) Determinar b de modo que a curva descrita corresponda a $3/7$ do perímetro da circunferência.

Usar o plotter Geogebra3D para confirmar os resultados obtidos.

Exercício 143. Determinar as equações das retas tangentes às curvas nos pontos indicados. Usar o

plotter Geogebra3D para confirmar os resultados obtidos.

$$(a) \vec{r}(t) = (1/t)\vec{i} + \tan(t)\vec{j} + e^{2t}\vec{k}, \quad t = \pi/4 \qquad (b) \vec{r}(t) = (t, t^2), \quad t = 2$$

Exercício 144. Determinar os comprimentos das curvas paramétricas.

$$(a) \quad x = \cos^3(t), \quad y = \sin^3(t), \quad z = 2, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$(b) \quad x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}t, \quad -1 \leq t \leq 1$$

Resolução. (b) Na figura 98 estão representadas duas vistas desta curva. Seja L o comprimento do arco delimitado pelos pontos $\vec{r}(-1) = (e^{-1}, e, -\sqrt{2}) = A$ e $\vec{r}(1) = (e, e^{-1}, \sqrt{2}) = B$. Quer-se calcular o integral (mais tarde, mostraremos que esta fórmula é equivalente à fórmula (2), na página 187)

$$L = \int_{-1}^1 \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

Vamos determinar $\|\vec{r}'(t)\|$.

$$\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$$

$$\vec{r}'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$$

Por ser

$$e^{2t} + e^{-2t} + 2 = (e^t + e^{-t})^2,$$

obtém-se

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}.$$

Escrevemos a expressão de L .

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 (e^t + e^{-t}) dt = (e^t - e^{-t}) \Big|_{-1}^1 \\ &= 2(e - e^{-1}) \approx 4.7 \quad (\text{unidades de comprimento}) \end{aligned}$$

■

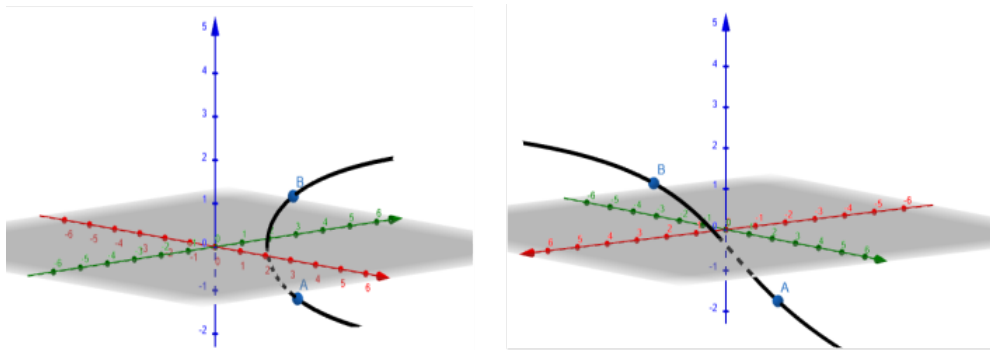


Figura 98: Duas perspectivas da curva C .

Exercício 145. Nas três colunas da figura 99 estão representadas as figuras correspondentes a três parametrizações de hélices circulares. Atribuir a cada coluna de figuras uma das parametrizações seguintes.

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = 3\cos(3t) \\ y(t) = 3\sin(3t) \\ z(t) = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4.$$

$$C_2 : \begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = 3\sin(t) \\ z(t) = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

$$C_3 : \begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = 3\sin(t) \\ z(t) = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4.$$

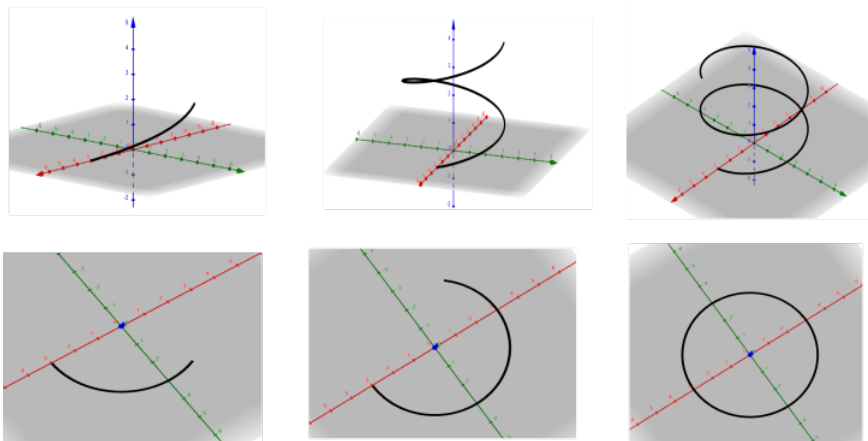


Figura 99:

Exercício 146. Parametrizar a curva $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 9$, no parâmetro $-1 \leq t \leq 1$, de modo que o vetor posição $\vec{r}(t)$ percorra a curva do ponto $(x, y) = (1, 1)$ ao ponto $(x, y) = (3, 9)$ quando t varia de -1 a 0 , e do ponto $(x, y) = (1, 9)$ ao ponto $(x, y) = (1, 1)$ quando t varia de 0 a 1 . Usar o plotter Geogebra3D para confirmar os resultados obtidos.

Exercício 147. Representar em coordenadas polares as seguintes curvas e regiões (começar por fazer a representação gráfica).

(a) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$

(b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$, $1 \leq x \leq \sqrt{2}$

(c) $0 \leq y \leq \sqrt{2}$, $y \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}$

(d) $y = x$

Resolução. (c) (ver a região $R2$ do exercício 109) Em coordenadas polares fica

$$0 \leq \theta \leq \pi/4, \quad 0 \leq r \leq 2.$$

■

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, Nikolai Piskounov.
2. *Calculus*, vol II, Howard Anton.