Notas das Aulas – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/∼mar)

Capítulo 5. Cálculo Vetorial – Parte 1

- Tópicos sobre Vetores
- Produtos Escalar e Vetorial
- Exercícios

5.1 Tópicos sobre Vetores

Grandezas escalares: exprimem-se por um número real, possivelmente acompanhado de uma unidade (por exemplo, 5 kg).

Grandezas vetoriais: além do número real, têm também uma direcção e um sentido. Notação: $\vec{u}$, $\vec{v}$, etc.

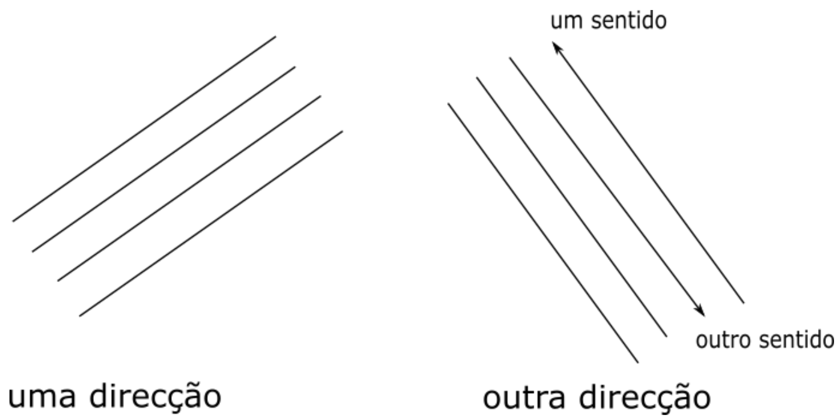

Figura 79:

Vetor definido por dois pontos

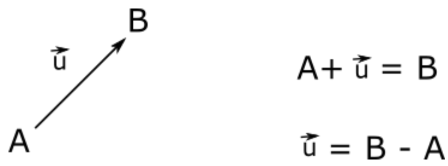

Figura 80: Origem do vetor: A; extremidade (seta) do vetor: B.

Uma vez fixado um referencial (figura 91), a origem A do vetor é feita coincidir com a origem do referencial.

Representação cartesiana de um vetor:

– $\vec{u} = (u_x, u_y)$ no plano e $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ no espaço, representam as coordenadas da extremidade (ponta da seta) do vetor e dizem-se **representação cartesiana** do vetor.

– Os números u_x, u_y, u_z são as **componentes** do vetor segundo cada uma das direções dos eixos do referencial.

– A origem do vetor é a origem do referencial: $(0, 0)$ no plano; $(0, 0, 0)$ no espaço.

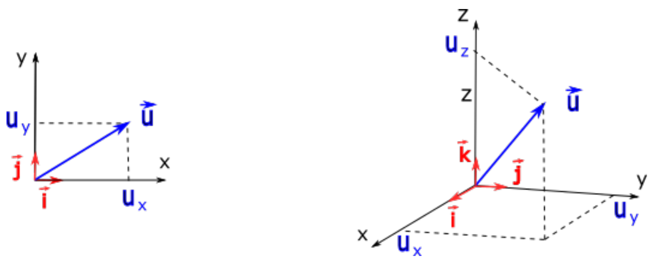

Figura 81:

Módulo de um vetor: é o seu comprimento.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

no plano e (análogo no plano).

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2},$$

no espaço.

Vector nulo: $\vec{O} = (0, 0)$ no plano e $\vec{O} = (0, 0, 0)$ no espaço. Este vetor tem módulo nulo e não tem direcção nem sentido definidos.

Vector unitário: é qualquer vetor com comprimento igual a 1. Dado qualquer vetor não nulo $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, o vetor

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},$$

é um vetor unitário com a mesma direcção e sentido de $\vec{u}$ (analogamente no plano). Os vetores unitários

$$\hat{\mathbf{i}} \;=\; (1, 0, 0) \quad \hat{\mathbf{j}} \;=\; (0, 1, 0) \quad \hat{\mathbf{k}} \;=\; (0, 0, 1),$$

têm, respectivamente, a direcção e sentido dos eixos dos x, y e z (analogamente no plano).

Representação vetorial de um vetor:

$$\vec{u} \;=\; (u_x, u_y, u_z) \;=\; u_x\hat{\mathbf{i}} + u_y\hat{\mathbf{j}} + u_z\hat{\mathbf{k}} \text{ (analogamente no plano).}$$

Multiplicação de um vetor por um escalar. Adição/Subtracção de vetores :

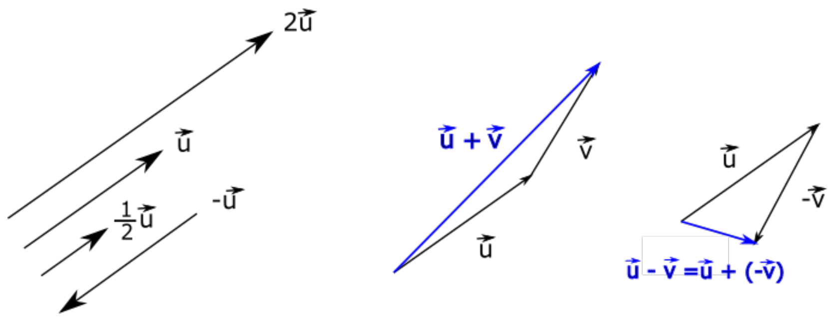

Figura 82:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= (u_x, u_y, u_z); \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \\
\vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u} = (u_x + v_x,\ u_y + v_y,\ u_z + v_z) \\
k \text{ constante} \quad k\vec{u} &= (ku_x, ku_y, ku_z)
\end{aligned}$$

Exercício 122. Dados os vetores $\vec{u} = (-2, 1, 3)$, $\vec{v} = (3, 4, 1)$, determinar a representação cartesiana do vetor $2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$.

Resolução.

$$\begin{aligned}
& 2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} \\
&= 2(-2, 1, 3) - \frac{1}{3}(3, 4, 1) \\
&= (-4, 2, 6) - (1, 4/3, 1/3) = \quad (-4 - 1, 2 - 4/3, 6 - 1/3) = (-5, 2/3, 17/3).
\end{aligned}$$

■

Exercício 123. Dados os vetores $\vec{u} = -2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{v} = 3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, determinar a representação cartesiana do $2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$.

Resolução.

$$\begin{aligned}
2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} &= 2(-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}) - \frac{1}{3}(3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \\
&= (-4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}) - (\hat{\mathbf{i}} + \frac{4}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}}) \\
&= (-4-1)\hat{\mathbf{i}} + (2 - \frac{4}{3})\hat{\mathbf{j}} + (6 - \frac{1}{3})\hat{\mathbf{k}} \\
&= -5\hat{\mathbf{i}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{17}{3}\hat{\mathbf{k}} \\
&= \left(-5,\ \frac{2}{3},\ \frac{17}{3}\right)
\end{aligned}$$

■

Exercício 124. Determinar o vetor unitário com a direcção e o sentido de $\vec{u} = (-2, 1, 3)$.

Resolução.

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(-2,1,3)}{\sqrt{(-2)^2 + 1 + 3^2}} = \frac{(-2,1,3)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

■

5.2 Produtos Escalar e Vectorial

5.2.1 Produto Escalar

O **produto escalar**, ou **produto interno**, de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é um escalar indicado da forma $\vec{u} \cdot \vec{v}$. É definido sobre espaços vetoriais de qualquer dimensão (2D, 3D, etc).

2D

$$\vec{u} = (u_x, u_y) \quad \vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{u}\|\,cos(\theta) = u_x v_x + u_y v_y$$

3D

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,cos(\theta) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

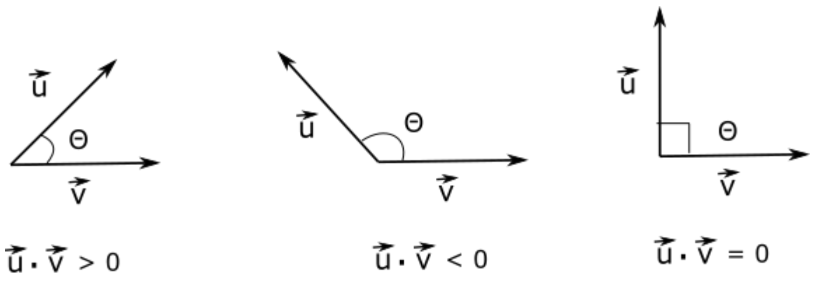

Figura 83:

O produto escalar de dois vetores pode usar-se para representar a **projecção escalar** (ou **componente escalar**) $u_{\vec{v}}$ do vetor $\vec{u}$ na direcção do vetor $\vec{v}$ (figura 94).

$$u_{\vec{v}} \ = \ \vec{u} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \ = \ \|\vec{u}\| cos(\theta)$$

Diz-se **projecção vetorial** (ou **componente vetorial**) de $\vec{u}$ na direcção de $\vec{v}$, o vetor

$$u_{\vec{v}}\hat{\mathbf{v}},$$

que tem a direcção e o sentido de $\vec{v}$ e módulo $u_{\vec{v}}$.

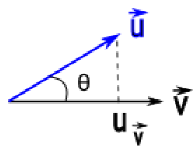

Figura 84:

Exercício 125. Dados os vetores $\vec{u} \ = \ (-2, 1, 3)$, $\vec{v} \ = \ (3, 4, 1)$, determinar (a) os seus módulos; (b) o seu produto escalar; (c) o ângulo formado pelos vetores.

Resolução.

$$(a) \ \|\vec{u}\| \ = \ \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} \ = \ \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| \ = \ \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} \ = \ \sqrt{26}$$

$$(b) \ \vec{u} \cdot \vec{v} \ = \ -2 \times 3 + 1 \times 4 + 3 \times 1 \ = \ 1$$

$$(c) \ \theta \ = \ cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}\right) \ = \ cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{26}}\right) \ \approx \ 1.52 \, rad \quad (\approx 87^o)$$

■

Exercício 126. Determinar dois vetores ortogonais ao vetor $\vec{u} = (-2, 3, 4)$.

Resolução. Para qualquer vetor (x, y, z) ortogonal a $\vec{u}$, verifica-se

$$(x, y, z) \cdot \vec{u} = (x, y, z) \cdot (-2, 3, 4) = -2x + 3y + 4z = 0.$$

Usando a última igualdade escolhemos os valores de duas das variáveis e calculamos a terceira de modo a verificar a igualdade. Por exemplo, fazendo $x = 0,\ y = 4$ obtemos $12 + 4z = 0 \Rightarrow z = -3$. O vetor $(0, 4, -3)$ é ortogonal a $\vec{u}$. Verificar que o vetor $(1, 1, -1/4)$ é também ortogonal ao vetor $\vec{u}$. ■

Exercício 127. Dados os vetores $\vec{u} = (-2, 1, 3),\ \vec{v} = (3, 4, 1)$, determinar (a) a projecção escalar de $\vec{u}$ na direcção de $\vec{v}$; (b) a projecção vetorial de $\vec{u}$ na direcção de $\vec{v}$.

Resolução. (a) Seja θ o ângulo formado pelos dois vetores. Temos

$$cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

A projecção escalar de $\vec{u}$ na direcção de $\vec{v}$ fica

$$\begin{aligned} u_{\vec{v}} &= \|\vec{u}\| cos(\theta) = \|\vec{u}\| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \\ &= \frac{(-2, 1, 3) \cdot (3, 4, 1)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{26}} \end{aligned}$$

(b) A projecção vetorial de $\vec{u}$ na direcção de $\vec{v}$ é

$$u_{\vec{v}}\, \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{26}} \frac{(3, 4, 1)}{\sqrt{26}} = \frac{(3, 4, 1)}{26} = \left(\frac{3}{26}, \frac{4}{26}, \frac{1}{26} \right),$$

sendo $\hat{v}$ o vetor unitário com a direção e sentido de $\vec{v}$. ■

Exercício 128. Usar o produto escalar para mostrar que a equação cartesiana de um plano,

$$Ax, By + Cz = D,$$

se pode obter conhecendo um vetor $\vec{u} = (A, B, C)$ perpendicular ao plano e um ponto (x_0, y_0, z_0) pertencente ao plano.

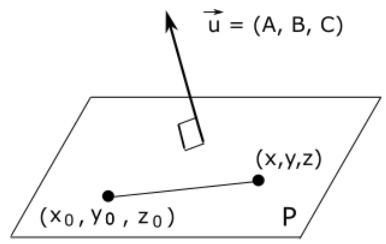

Figura 85:

Resolução. Recorde-se que, na equação cartesiana de um plano

- A, B, C, D são constantes, com, pelo menos, uma de entre A, B, C não nula;
- x, y, z são variáveis;
- Um ponto (α, β, γ) pertence ao plano se, substituindo na equação as variáveis x, y, z por, respetivamente, α, β, γ se obtém uma igualdade verdadeira.

Na figura 95, está representado um plano, P, e dois pontos do plano, (x_0, y_0, z_0) e (x, y, z), bem como o segmento de reta que os une. Está também representado um vetor $\vec{u} = (A, B, C)$ perpendicular ao plano. Note-se que um vetor perpendicular a um plano é perpendicular a qualquer segmento de reta do plano. Isto significa que o produto escalar do vetor $\vec{u}$ pelo vetor $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ é nulo,

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0. \tag{1}$$

Efetuando o produto escalar e reordenando os termos da equação resultante, temos

$$\begin{aligned}
&(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & Ax + By + Cz = D
\end{aligned}$$

sendo $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ constante. ■

Exercício 129. Determinar a equação cartesiana do plano que contém o ponto $(1, -2, 2)$ e é perpendicular ao vetor $(1, 1, 1)$.

Resolução. Usando a resolução anterior, temos

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, -2, 2), \qquad (A, B, C) = (1, 1, 1).$$

A equação cartesiana do plano é

$$\begin{aligned} & Ax + By + Cz = D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 \\ \Leftrightarrow\ & x + y + z = 1 - 2 + 2 \\ \Leftrightarrow\ & x + y + z = 1 \end{aligned}$$

■

5.2.2 Produto Vectorial

O **produto vetorial**, ou **produto externo**, de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é um vetor indicado da forma $\vec{u} \times \vec{v}$. É definido apenas sobre espaços vetoriais de dimensão 3.

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y,\ u_z v_x - u_x v_z,\ u_x v_y - u_y v_x)$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y)\hat{\mathbf{i}} + (u_z v_x - u_x v_z)\hat{\mathbf{j}} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

O produto vetorial serve para representar áreas e orientações espaciais de paralelogramos em 3D. O módulo do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ representa o valor da área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\text{Área do paralelogramo} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,sin(\theta)$$

A direcção de $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular ao paralelogramo (figura 96) definido pelos vetores. O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela **regra da mão direita**: enrolando os dedos da mão direita de modo que estes apontem da seta de $\vec{u}$ para a seta de $\vec{v}$, o polegar fica a 'apontar' no sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$.

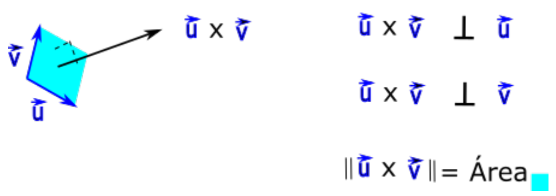

Figura 86:

Os **módulos** das coordenadas do produto vetorial (2) representam as **áreas das projecções** do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos planos coordenados perpendiculares aos vetores unitários $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ correspondentes. Por exemplo, a área da projecção do paralelogramo no plano xy é o módulo do coeficiente de $\hat{\mathbf{k}}$ do produto vetorial (figura 97).

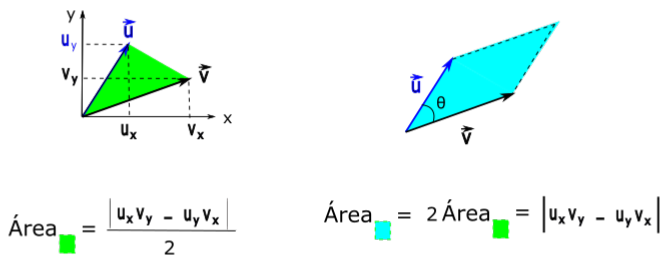

Figura 87:

Demonstração das igualdades na figura 97

$$\begin{aligned}
\text{Área verde} &= u_y v_x - \frac{1}{2}(u_y u_x + v_x v_y + (u_y - v_y)(v_x - u_x)) \\
&= u_y v_x - \frac{1}{2}(u_y u_x + v_x v_y + (u_y v_x - u_y u_x - v_y v_x + v_y u_x) \\
&= u_y v_x - \frac{1}{2}(u_y v_x + v_y u_x) \\
&= \frac{1}{2}(u_y v_x - u_x v_y) \;=\; \frac{1}{2}|u_x v_y - u_y v_x| \\
\text{Área azul} &= 2\text{Área verde} \;=\; |u_x v_y - u_y v_x|
\end{aligned}$$

Exemplo 1.

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= (-2, 1, 3) \quad \vec{v} \;=\; (3, 4, 1) \\
\|\vec{u}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} \;=\; \sqrt{14} \\
\|\vec{v}\| &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} \;=\; \sqrt{26} \\
\vec{u} \times \vec{v} &= (1 \times 1 - 3 \times 4,\, 3 \times 3 - (-2) \times 1,\, (-2) \times 4 - 1 \times 3) \;=\; (-11,\, 11,\, -11) \\
\theta &= sin^{-1}\left(\frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right) \;=\; sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{(-11)^2 + (11)2 + (-11)^2}}{\sqrt{14}\sqrt{26}}\right) \;\approx\; 1.52\,rad \quad (\approx 87^o)
\end{aligned}$$

Exemplo 2. O produto vetorial dos vetores $\vec{u} = (2, 2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 2, -1)$ pode determinar-se, também, da forma abaixo indicada.

- Sabendo que

$$\begin{array}{lll} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \vec{0} & \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \vec{0} & \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \vec{0} & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}, \end{array}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) \\ &= 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) + 2\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) + \hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) \\ &= (-2\vec{0} + 4\hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{j}}) + (2\hat{\mathbf{k}} + 4\vec{0} - 2\hat{\mathbf{i}}) + (-\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{i}} + \vec{0}) \\ &= -4\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}} \\ &= (-4, 1, 6). \end{aligned}$$

- O cálculo é mais expedito se usarmos o determinante simbólico

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = (-2-2,\ -(-2)-1,\ 4-(-2))$$

$$= (-4, 1, 6) \tag{3}$$

Na figura 98 estão representadas as projecções do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (2, 2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 2 - 1)$ nos planos coordenados. Os módulos das coordenadas do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$, $|-4|$, 1, 6, correspondem às áreas das projecções dos paralelogramos nos planos coordenados, sendo cada uma destas projecções perpendicular a um vetor unitário. Por exemplo, $|-4|$ é a área da projecção do paralelogramo no plano yz (figura da direita); esta projecção é perpendicular ao vetor $\hat{\mathbf{i}}$. O sinal da coordenada é positivo, ou negativo, conforme a regra da mão direita sobre as projecções dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ indicar o sentido do vetor unitário $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ perpendicular ao plano coordenado, ou o sentido oposto.

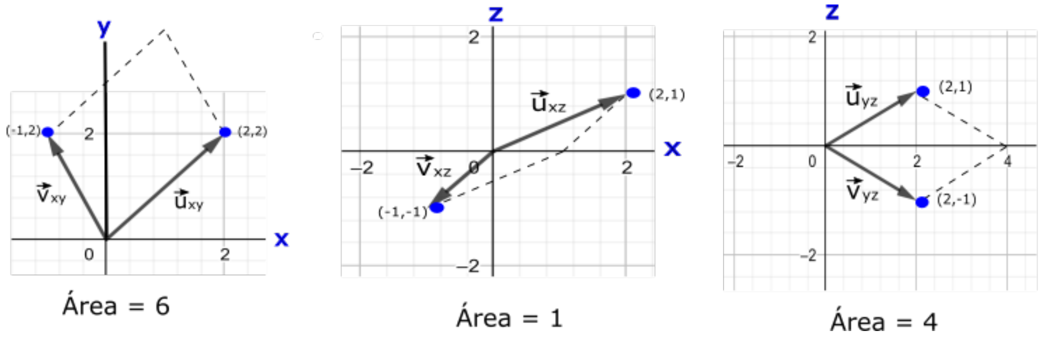

Figura 88:

5.3 Exercícios

Exercício 130. Determinar um vector perpendicular e um vector colinear, para cada um dos vectores indicados.

(a) $\vec{u} = (-2, 1)$ (b) $\vec{u} = (\pi, 0)$ (c) $\vec{u} = (3, 1, -1)$ (d) $\vec{u} = (2, 2, 2)$

(e) $\vec{u} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$ (f) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ (g) $\vec{u} = t\vec{i} + 2sen(t)\vec{j} - 1\vec{k}$

Exercício 131. Determinar as projecções vetoriais dos vectores da questão 143 sobre o eixo x.

Exercício 132. Dado um vetor $\vec{u} = (A, B, C)$, qualquer outro vetor da forma $k(A, B, C)$, com $k \in \mathbb{R}$, tem a direção de $\vec{u}$. Mostrar que a equação cartesiana do plano não se altera se usarmos na fórmula (1) da página 185, o vetor $(3A, 3B, 3C)$ em vez de (A, B, C) *(isto significa quaisquer ponto do plano e vetor perpendicular ao plano servem para determinar a sua equação cartesiana).*

Exercício 133. Determinar a equação do plano que contém o ponto A e é perpendicular ao vetor $\vec{u}$, nos casos indicados.

(a) $A = (-5, 0, 1)$, $\vec{u} = (0, 0, 1)$ (b) $A = (\sqrt{5}, -1/2, 1)$, $\vec{u} = (-5, 0, 1)$

Exercício 134. Determinar a equação do plano que contém o ponto A e é paralelo aos vetores $\vec{u}, \vec{v}$, nos casos indicados (sugestão: determinar um vetor perpendicular ao plano efetuando o produto $\vec{u} \times \vec{v}$.

(a) $A = (-5, 0, 1)$, $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 3, 0)$

(b) $A = (\sqrt{5}, -1/2, 1)$, $\vec{u} = (-5, 0, 1)$, $\vec{v} = (1/2, -1/2, 1)$

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, Nikolai Piskounov.

2. *Calculus*,vol II, Howard Anton.

3. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*, Jacir J. Venturi