Notas das Aulas – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/~mar)

Capítulo 4. Integrais Múltiplos

4.5 Integrais Duplos Sobre Regiões Não Rectangulares

Teorema. *Se $f(x,y)$ é contínua nas regiões R_1, R_2 (figura 62), então*

$$\iint_{R_1} f(x,y)\,dA = \int_a^b \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy}_{Integração\ parcial}\,dx \tag{1}$$

$$\iint_{R_2} f(x,y)\,dA = \int_c^d \underbrace{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx}_{Integração\ parcial}\,dy \tag{2}$$

O integral interior em (1) é calculado supondo x constante, sendo o integral interior em (2) calculado supondo y constante.

Os limites de integração dos integrais em (1) e (2) podiam ser escritos nas formas seguintes, para salientar o seu significado.

$$\iint_{R_1} f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\iint_{R_2} f(x,y)\,dA = \int_{y=c}^{y=d}\int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

No entanto a informação adicionada pode ser obtida das fórmulas (1) e (2).

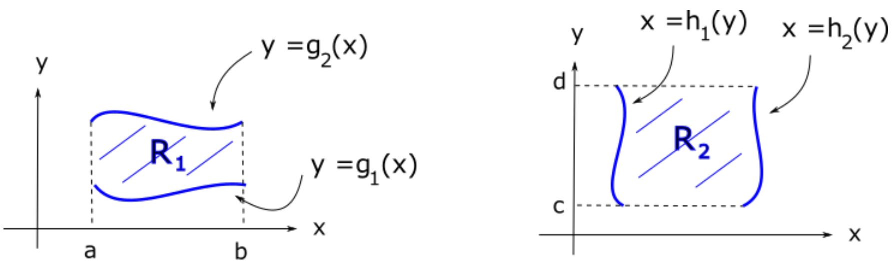

Figura 62:

Exercício 93. Calcular o integral

$$I = \iint_R xy\,dA$$

sendo R a região delimitada pelas curvas

$$y = \frac{x}{2} \qquad y = \sqrt{x} \qquad x = 2 \qquad x = 4.$$

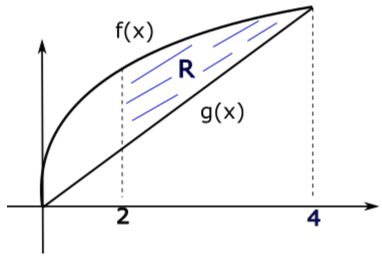

Figura 63: $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x/2.$

Resolução.

- Região de integração R (figura 63).
  Os gráficos intersetam-se nos pontos de abcissas $x = 0$ e $x = 4$, como se mostra a seguir.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{x^2}{4} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

- Cálculo do integral I.

$$I = \int_2^4 \underbrace{\int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy\, dy}_{I_1}\, dx$$

$$I_1 = \int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy\, dy = \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x/2}^{y=\sqrt{x}} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}$$

$$I = \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}\right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32}\right)\Bigg|_2^4 = \frac{11}{6}$$

O valor deste integral representa o volume da região de topo $f(x,y) = xy$ e base R, porque $f(x,y) \geq 0$ sobre R. ■

Exercício 94. Escrever o integral duplo que representa a área da região R do exemplo anterior.

Resolução. A área de um sólido de base no plano xy e topo $f(x,y) = 1$ é numericamente igual ao volume do sólido (porquê?).

$$\text{Área} = \int_2^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} dy\, dx$$

■

Exercício 95. Calcular o integral

$$I = \iint_R (2x - y^2)\, dA$$

sendo R a região do plano xy delimitada pelas rectas

$$y = -x + 1 \qquad y = 3 \qquad y = x + 1.$$

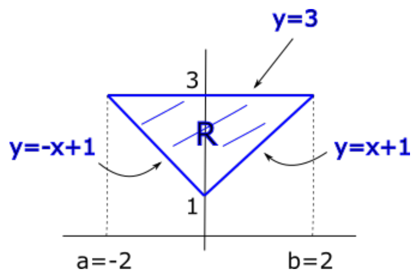

Figura 64:

Resolução.

- Esclarecer a região de integração.
  A região de integração R está representada na figura 64. As abcissas a e b foram determinadas como a seguir se indica.

$$\text{a:}\ -x+1=3 \Rightarrow x=-2$$
$$\text{b:}\ x+1=3 \Rightarrow x=2$$

- Cálculo do integral I.
  Como R está justamente contida na faixa definida por $1 \le y \le 3$, podemos escrever e calcular I da forma que se segue.

$$I = \int_1^3 \underbrace{\int_{1-y}^{y-1} (2x-y^2)\,dx\,dy}_{I_1}$$

$$I_1 = \int_{1-y}^{y-1} (2x-y^2)\,dx = \left(x^2-xy^2\right)\Big|_{x=1-y}^{x=y-1} = -2y^3+2y^2$$

$$I = \int_1^3 (-2y^3+2y^2)\,dy = \left(-\frac{y^4}{2}+\frac{2y^3}{3}\right)\Big|_1^3 = -\frac{68}{3}$$

A troca da ordem de integração é, neste caso, desvantajosa em termos dos cálculos a efectuar, porque envolve dois integrais duplos.

$$I = \int_{-2}^{0}\int_{-x+1}^{3} (2x-y^2)\,dy\,dx + \int_0^2\int_{x+1}^{3} (2x-y^2)\,dy\,dx = -\frac{68}{3} \qquad (verificar!)$$

Este integral também se pode escrever[1]

$$\int_{-2}^{2}\int_{|x|+1}^{3} (2x-y^2)\,dy\,dx.$$

■

Exercício 96. Calcular o volume do sólido delimitado superiormente pelo plano $z=4-x-y$ e inferiormente pela região $R=[0,1]\times[0,2]$ do plano xy.

[1] Por sugestão dos alunos de Eng. Mecânica.

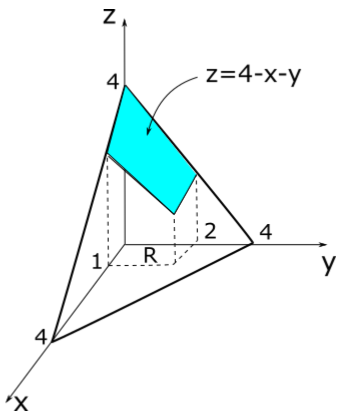

Figura 65:

Resolução. O sólido está representado na figura 65. A região de integração R (base do sólido) é o rectângulo contido no plano xy, definido por $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2$. Designando por V o volume do sólido, temos

$$V \;=\; \iint_R (4-x-y)\,dA \;=\; \int_0^1 \underbrace{\int_0^2 (4-x-y)\,dy}_{I_1}\,dx$$

$$I_1 \;=\; \int_0^2 (4-x-y)\,dy \;=\; \left(4y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2} \;=\; 6-2x$$

$$V \;=\; \int_0^1 (6-2x)\,dx \;=\; (6x-x^2)\Big|_0^1 \;=\; 5.$$

■

Exercício 97. Calcular o integral

$$I \;=\; \iint_R e^{y^4}\,dA$$

sendo R a reunião das regiões R_1 e R_2 indicadas na figura 66.

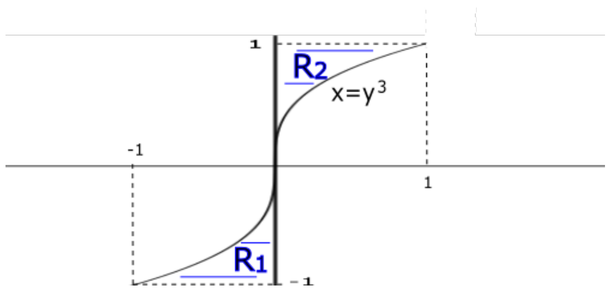

Figura 66:

Resolução.

- O integral pode ser indicado na forma

$$I \;=\; \iint_R e^{y^4}\,dA \;=\; \iint_{R_1} e^{y^4}\,dA + \iint_{R_2} e^{y^4}\,dA.$$

- Atendendo à simetria da figura e à função integranda e^{y^4}, podemos escrever

$$I = \iint_R e^{y^4}\, dA = 2\iint_{R_1} e^{y^4}\, dA.$$

O cálculo de I é como a seguir se indica.

$$I = 2\iint_{R_1} e^{y^4}\, dA = 2\int_{-1}^{0}\underbrace{\int_{y^3}^{0} e^{y^4}\, dx}_{I_1}\, dy$$

$$I_1 = \int_{y^3}^{0} e^{y^4}\, dx = \left(xe^{y^4}\right)\Big|_{x=y^3}^{x=0} = -y^3e^{y^4}$$

$$I = 2\int_{-1}^{0} -y^3e^{y^4}\, dy = 2\left(-\frac{e^{y^4}}{4}\Big|_{-1}^{0}\right) = \frac{e-1}{2}$$

A troca da ordem de integração é, neste caso, desfavorável. A região de integração R_1 é definida pelas duplas desigualdades $-1 \le x \le 0, \quad -1 \le y \le \sqrt[3]{x}$. O integral sobre esta região escreve-se (trocando a ordem de integração usada acima)

$$I = \iint_{R_1} e^{y^4}\, dA = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{\sqrt[3]{x}} e^{y^4}\, dy\, dx.$$

A dificuldade reside no facto de o integral

$$\int_{-1}^{\sqrt[3]{x}} e^{y^4}\, dy$$

não ser resolúvel por funções elementares. Isto significa que não conseguimos obter uma solução exata para ele. O melhor que se pode fazer é usar métodos numéricos para obter uma expressão aproximada. ■

Exercício 98. Calcular a massa de uma lâmina[2] triangular, de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, e densidade de massa $\delta(x,y) = xy\, kg/m^2$.

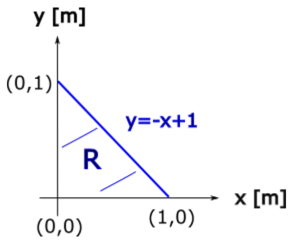

Figura 67:

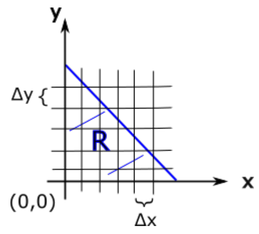

Figura 68:

Resolução.

- A lâmina está representada na figura 67.
- Uma expressão para a massa da lâmina pode ser determinada da seguinte forma. Considera-se a lâmina subdividida em pequenos rectângulos de dimensões Δx, Δy (figura 68). Os rectângulos são suficientemente pequenos para que a função $\delta(x,y)$ seja aproximadamente constante em cada um deles. A massa de cada rectângulo é $m_{ij} \approx \delta(x_i, y_j)\Delta x\Delta y$, sendo (x_i, y_j) um ponto qualquer do

[2] O termo 'lâmina' é geralmente usado para referir um sólido cuja espessura é muito pequena quando comparada com as outras duas dimensões.

rectângulo. Somando as massas de todos os rectângulos, obtém-se uma aproximação para a massa M da lâmina (considerando $\delta(x,y) = 0$ nos rectângulos que estão fora da região R).

$$M \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \delta(x_i, x_j)\Delta x \Delta y.$$

Como a função densidade de massa é contínua, o valor exacto da massa é dado pelo integral duplo

$$M = \iint_R \delta(x,y)\, dA = \int_0^1 \underbrace{\int_0^{-x+1} xy\, dy}_{I_1}\, dx.$$

$$I_1 = \int_0^{-x+1} xy\, dy = \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=-x+1} = \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}$$

$$M = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}\, kg$$

■

4.6 Integrais Duplos em Coordenada Polares

A representação de um arco de circunferência, de uma região circular, ou de um sector circular (todos estes elementos em 2D), é simplificada se forem usadas coordenadas polares para decrever estas curvas e regiões.

Coordenada Polares

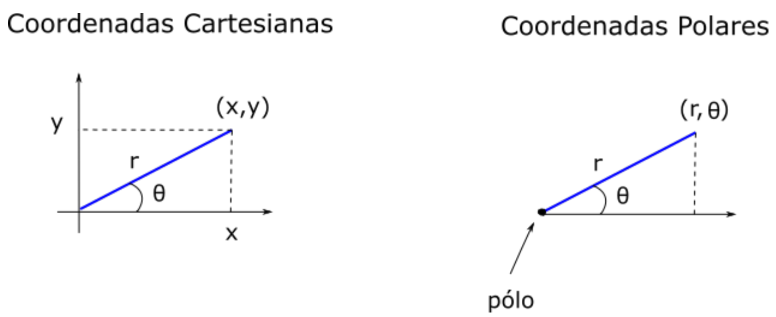

Figura 69: Coordenadas polares.

Conversão coordenadas polares → coordenadas cartesianas.

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$

Conversão coordenadas cartesianas → coordenadas polares.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad [\pm\pi], \text{ supondo } -\pi < \theta \leq \pi.$$

Na expressão do ângulo θ, a soma ou subtracção de π é necessária apenas para pontos nos $2^{\underline{o}}$ ou $3^{\underline{o}}$ qua-drantes, dado que a função $tan^{-1}(x)$ devolve valores no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Exercício 99. Determinar as coordenadas rectangulares (= cartesianas) do ponto $(r, \theta) = (2, \pi/3)$.

$$x = rcos(\theta) = 2cos(\pi/3) = 1$$
$$y = rsin(\theta) = 2sin(\pi/3) = \sqrt{3}$$
$$(x, y) = (1, \sqrt{3})$$

Exercício 100. Determinar as coordenadas polares do ponto $(x, y) = (-1, 2)$.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$$
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) + \pi \approx 2\,rad$$
$$(r, \theta) = (\sqrt{5}, 2)$$

O uso de coordenadas polares simplifica a representação matemática de circunferências e arcos de circunferência. Por exemplo, a circunferência de centro na origem e raio 2 representa-se por $x^2 + y^2 = 4$ em coordenadas cartesianas e pela expressão, mais simples, $r = 2$ em coordenadas polares.

4.6.1 Área de um Rectângulo Polar

Quando usamos coordenadas cartesianas, as **curvas coordenadas** (curvas com x ou y constantes) são retas dos tipos $y = b$ e $x = a$, que dividem o plano em regiões retangulares (à esquerda na figura 70).

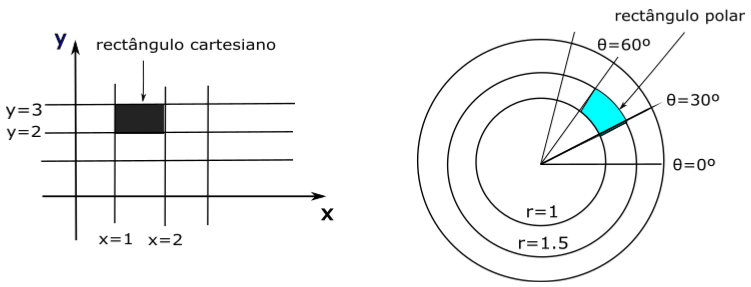

Figura 70: Curvas coordenadas

No caso das coordenadas polares, as **curvas coordenadas** são curvas com r ou θ constantes, dos tipos $r = b$ e $\theta = a$, que dividem o plano em regiões retangulares polares (à direita na figura 70). Necessitamos conhecer a expressão matemática da área do retângulo polar, para podermos escrever integrais duplos usando coordenadas polares.

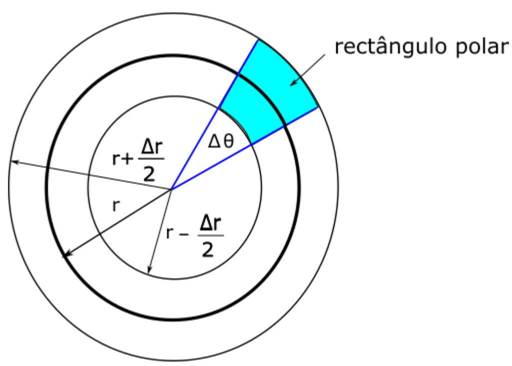

Figura 71: Rectângulo polar.

Seja A a área do rectângulo polar na figura 71. Subtraímos a área do sector circular de raio $r - \Delta r/2$ à área do sector de raio $r + \Delta r/2$, ambos com ângulo $\Delta\theta$. A área de um sector circular de ângulo θ e raio

R é igual a $(\theta R^2)/2$. A área A do retângulo polar da figura é dada por

$$A = \frac{\Delta\theta}{2}\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \frac{\Delta\theta}{2}\left(r - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 = r\,\Delta r\,\Delta\theta \quad \text{(verificar!)}$$

4.6.2 Integral duplo: coordenadas cartesianas ↔ coordenadas polares

O cálculo de um integral duplo sobre uma região circular, ou sobre um sector circular, é geralmente simplificado se forem usadas coordenadas polares para decrever a região.

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dA_{xy} = \iint_{R_{r\theta}} f(rcos(\theta), rsin(\theta))\,dA_{r\theta} \tag{3}$$

$\mathbf{dA_{xy}}$ pode ser $dx\,dy$ ou $dy\,dx$. Já $\mathbf{dA_{r\theta}}$ pode ser $r\,dr\,d\theta$ ou $r\,d\theta\,dr$.

Exercício 101. Determinar o volume do sólido delimitado pelo cilindro $x^2+y^2=4$ e pelos planos $z=0$ e $y+z=4$.

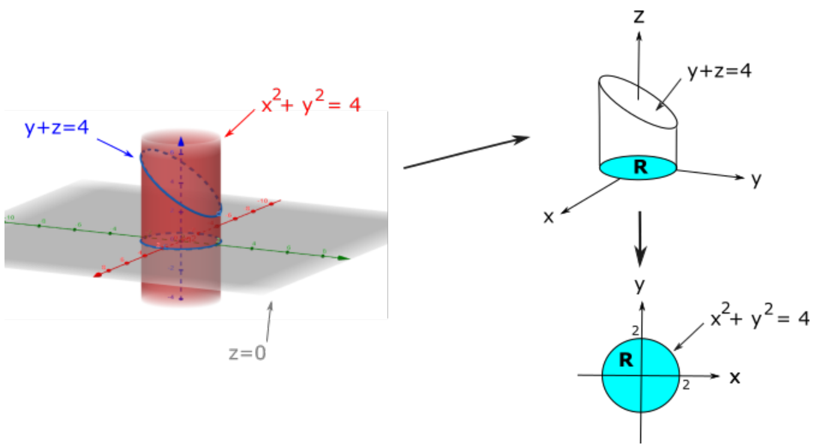

Figura 72:

Resolução. A figura 72 representa o sólido e a região de integração R. O cálculo do volume V é como a seguir se indica.

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (4-y)\,dA = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-y)\,dy\,dx \\ &= \int_{-2}^{2} 8\sqrt{4-x^2}\,dx \quad \text{(verificar!)} \end{aligned}$$

Para calcular este último integral é necessário fazer uma mudança de variável (por exemplo, $x = 2sin(t)$). É mais fácil calcular o integral usando coordenadas polares para descrever a região de integração.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^2 (4 - rsin(\theta))r\,dr}_{I_1}\,d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 (4 - rsin(\theta))r\,dr \;=\; \int_0^2 (4r - r^2 sin(\theta))\,dr \\ &= \left(2r^2 - \frac{r^3}{3}sin(\theta)\right)\Big|_{r=0}^{r=2} \;=\; 8 - \frac{8}{3}sin(\theta) \\ V &= \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3}sin(\theta)\right)\,d\theta \;=\; \left(8\theta + \frac{8}{3}cos(\theta)\right)\Big|_0^{2\pi} \;=\; 16\pi. \end{aligned}$$

■

Exercício 102. Indicar o integral usando coordenadas polares (figura 73).

$$I \;=\; \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

Resolução.

$$I \;=\; \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^3\,d\theta\,dr$$

■

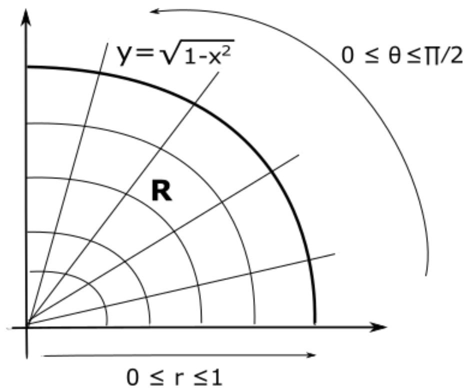

Figura 73:

Exercício 103. Indicar o integral usando coordenadas polares (figura 74).

$$I \;=\; \int_0^4 \int_3^{\sqrt{25-x^2}} dy\,dx$$

Resolução.

$$I \;=\; \int_{tan^{-1}(3/4)}^{\pi/2} \int_{3/sin(\theta)}^{5} r\,dr\,d\theta.$$

■

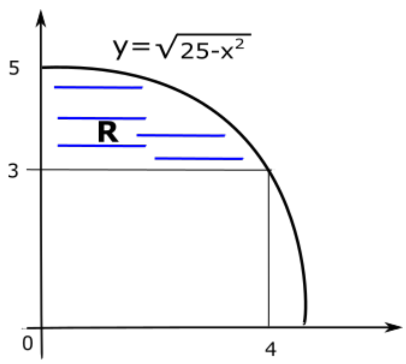

Figura 74:

4.7 Integrais Triplos

Integral triplo em coordenadas cartesianas.

$$I = \iiint_G f(x,y,z)dV$$

G é uma região 3D. **dV** pode ser uma das seis permutações possíveis dos diferenciais dx, dy, dz (por exemplo, $dx\,dy\,dz$).

Exercício 104. Calcular o integral

$$I = \iiint_G 12xy^2z^3\,dV,$$

sindo a região de integração G o paralelepípedo definido pelas duplas desigualdades

$$-1 \le x \le 2 \qquad 0 \le y \le 3 \qquad 0 \le z \le 2.$$

Resolução.

$$I = \int_0^2 \int_{-1}^2 \underbrace{\int_0^3 12xy^2z^3\,dy}_{I_1:\ x,z constantes}\,dx\,dz$$

$$I_1 = \int_0^3 12xy^2z^3\,dy = (4xy^3z^3)\Big|_{y=0}^{y=3} = 108xz^3$$

$$I = \int_0^2 \underbrace{\int_{-1}^2 108xz^3\,dx}_{I_2:\ z constante}\,dz$$

$$I_2 = \int_{-1}^2 108xz^3\,dx = 54x^2z^3\Big|_{x=-1}^{x=2} = 162z^3$$

$$I = \int_0^2 162z^3\,dz = \frac{81}{2}z^4\Big|_{z=0}^{z=2} = 648$$

■

Exercício 105. Escrever o integral

$$I = \int_0^5 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

na forma

$$I = \iiint_G f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx \tag{4}$$

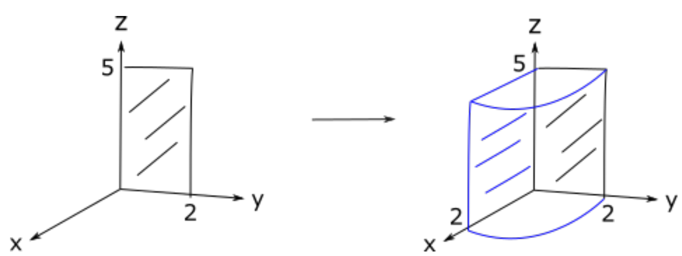

Figura 75: Região de integração 3D (à direita).

Resolução.

- Na imagem da esquerda na figura 75 está representada a região no plano yz referente aos dois integrais exteriores $\int_0^5 \int_0^2 \cdots \, dy \, dz$ de I. Na imagem da direita está a região 3D de integração.
- No integral triplo (4) a base da região de integração é considerada no plano xz. Por observação da figura 75 (à direita), verificamos que os extremos dos dois integrais exteriores devem ser,

$$I = \int_0^2 \int_0^5 \cdots \, dz \, dx.$$

- Os extremos do integral interior (em ordem a y) são funções do tipo $y = h(x, z)$. Observando a figura 75, verificamos que para cada ponto (x, z) da base da região de integração, y varia de $y = 0$ a $y = \sqrt{4 - x^2}$. O integral na forma (4) fica

$$I = \int_0^2 \int_0^5 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

■

4.8 Integrais Triplos em Coordenada Cilíndricas

4.8.1 Coordenadas Cilíndricas

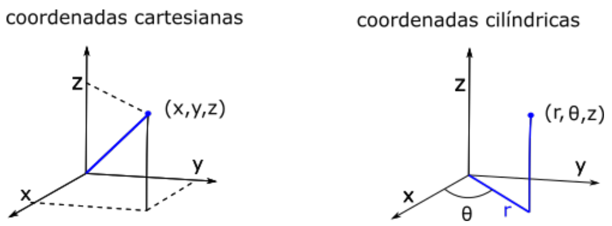

Figura 76:

Conversão coordenadas cilíndricas → coordenadas cartesianas.

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$
$$z = z$$

Conversão coordenadas cartesianas → coordenadas cilíndricas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad [\pm\pi]$$
$$z = z$$

Exercício 106. Determinar as coordenadas cartesianas do ponto $(r, \theta, z) = (2, \pi/3, 4)$.

Resolução.

$$x = rcos(\theta) = 2cos(\pi/3) = 1$$
$$y = rsin(\theta) = 2sin(\pi/3) = \sqrt{3}$$
$$z = 4$$
$$(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 4)$$

■

A representação matemática de curvas pertencentes a cilindros circulares, ou de regiões 3D cuja secção é circular ou um setor circular, é geralmente simplificada se forem usadas coordenadas cilíndricas para des-crever as curvas ou as regiões em questão. Como exemplo, a equação em coordenadas cilíndricas do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ é $r = 2$.

4.8.2 Integral triplo: coordenadas cartesianas $\leftrightarrow$ coordenadas cilíndricas

$$\iiint_{G_{xyz}} f(x, y, z)\, dV_{xyz} = \iiint_{R_{r\theta z}} f(rcos(\theta), rsin(\theta), z)\, dV_{r\theta z} \tag{5}$$

O diferencial $\mathbf{dV_{xyz}}$ pode ser uma das seis permutações de dx, dy, dz. Já o diferencial $\mathbf{dV_{r\theta z}}$ é o produto de r por uma das seis permutações de dr, $d\theta$, dz.

O cálculo de um integral triplo sobre uma região 3D cuja secção é um círculo ou um sector circular, é geralmente simplificado se forem usadas coordenadas polares para descrever a região de integração.

Exercício 107. Escrever os limites de integração do integral

$$I = \iiint_G z\, dV,$$

sendo a região de integração G delimitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e pelo plano $y = x$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$.

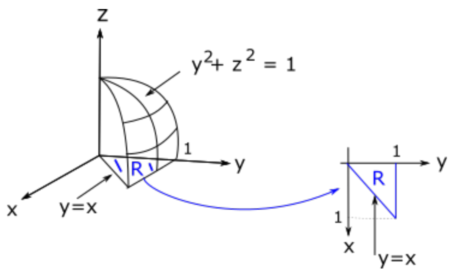

Figura 77:

Resolução.

- Na figura 77 estão representadas a região de integração (3D) e a sua base R no plano xy. Usamos os extremos de integração dos dois integrais exteriores, para descrever a base triangular da região de integração.

$$I = \int_0^1 \int_x^1 \cdots\, dy\, dx.$$

- Para cada ponto (x, y) da base, z varia de $z = 0$ ('chão') a $z = \sqrt{1-y^2}$ ('tecto').

$$I \;=\; \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\,dz\,dy\,dx.$$

■

Exercício 108. Usar coordenadas cilíndricas para calcular o integral

$$I \;=\; \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1+y} dz\,dy\,dx.$$

Resolução.

- A região de integração está representada na figura 78.

- Cálculo do integral I.
  Descrevemos a base do sólido, que é um quarto de círculo, usando coordenadas polares.

$$\begin{aligned}
I \;&=\; \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1+y} dz\,dy\,dx \\
&=\; \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{1+rcos(\theta)} r\,dz\,d\theta\,dr \\
&=\; \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(r + r^2 cos(\theta)\right)\,d\theta\,dr \\
&=\; \int_0^1 \left(r\theta + r^2 sin(\theta)\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\,dr \\
&=\; \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}r + r^2\right)\,dr \\
&=\; \left(\frac{\pi}{4}r^2 + \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\
&=\; \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

■

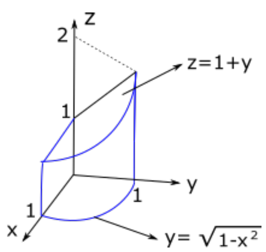

Figura 78:

4.9 Exercícios

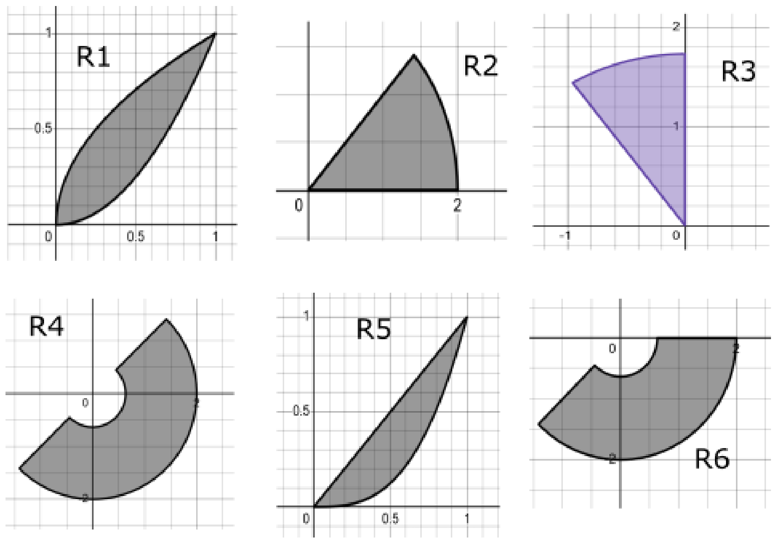

Figura 79:

Exercício 109. Na figura 79, identificar as regiões seguintes.

(a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \geq 0.4 \\ y \leq x \end{cases}$

(b) $x^2 + y^2 \leq 3, \;\; x \leq 0, \;\; y \geq (-3/2)x$

(c) $y = \sqrt{x}, \;\; y = x^2, \;\; 0 \leq y \leq 1$

(d) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \geq 0.4 \\ y \leq x \\ y \leq 0 \end{cases}$

(e) $y = x, \;\; y = x^3, \;\; x = 0, \;\; x = 1$

(f) $y = \sqrt{4 - x^2}, \;\; y = 0, \;\; y = x$

Exercício 110. Para cada uma das regiões na figura 79, escrever e calcular o integral

$$\iint_R 2xy \, dA,$$

usando coordenadas retangulares ou polares, conforme adequado.

Exercício 111. Escrever cada um dos integrais obtidos no exercício 110 com a ordem de integração invertida.

Exercício 112. Calcular os integrais.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 (x+3) dx dy$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \int_0^{\ln(2)} e^{x+y} dx dy$

(c) $\displaystyle\int\int_R 4yx^3 dx dy$

$R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$

(d) $\displaystyle\int\int_R (x sen(y) - y sen(x)) dx dy$

$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/3\}$

Exercício 113. Calcular os integrais usando as duas ordens de integração possíveis.

$(a)\ \displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 dydx$ $\qquad (b)\ \displaystyle\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2} dxdy$

$(c)\ \displaystyle\int\int_R x^2 dA$ $\qquad (d)\ \displaystyle\int\int_R 3x - 2ydA$

$R:\ y = 16/x,\ y = x,\ x = 8$ $\qquad R$: delimitada pela circ. $x^2 + y^2 = 1$

Exercício 114. Calcular os integrais.

$(a)\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{sen(\theta)} cos(\theta) rdrd\theta$ $\qquad (b)\ \displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{1+cos(\theta)} rdrd\theta$

Exercício 115. Escrever os integrais usando coordenadas polares.

$(a)\ \displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (y^2 + x^2) dydx$ $\qquad (b)\ \displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dydx$

Exercício 116. Acrescentar os diferenciais.

$(a)\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+y^2+x^2}} ??$ $\qquad (b)\ \displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} ??$

Exercício 117. (i) Resolver o integral $I = \int_2^3 \int_1^3 \frac{x}{(1-x)(2+x)} dxdy$, sendo R a região delimitada pelas rectas $y = 2x$, $y = 0$ e $x = 4$. (ii) Escrever em coordenadas cartesianas o integral $I = \int_0^2 \int_0^{\pi/4} r^2 d\theta dr$.

Exercício 118. Calcular os integrais. Esboçar as regiões de integração.

$(a)\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$ $\qquad (b)\ \displaystyle\int_0^2 \int_{-1}^{y^2} \int_{-1}^{z} yzdxdzdy$

Exercício 119. Acrescentar os diferenciais.

$(a)\ \displaystyle\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln(z)} xe^y dy??$ $\qquad (b)\ \displaystyle\int_1^2 \int_z^2 \int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{x^2+y^2} dx??$

Exercício 120. Calcular os volumes dos sólidos.

(a) Sólido no 1º octante, delimitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 6y + 4z = 12$.

(b) Sólido delimitado pelo cilindro elíptico $x^2 + 9y^2 = 9$ e pelos planos $z = 0,\ z = x + 3$.

Exercício 121. Calcular usando coordenadas cilíndricas.

$(a)\ \displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dzdxdy$ $\qquad (b)\ \displaystyle\int_0^9 \int_0^{a^2-x^2} \int_0^{x^2} xdzdydx,\ a > 0.$

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, Nikolai Piskounov.
2. *Calculus*,vol II, Howard Anton.