

Capítulo 4. Integrais Múltiplos

-
- Motivação do Integral Simples: O Problema da Área
 - Motivação do Integral Duplo: O Problema do Volume
 - Integrais Duplos Sobre Regiões Rectangulares
-

4.1 Motivação do Integral Simples: O Problema da Área

Problema da Área: determinar a área da região do plano delimitada pelo gráfico da função $f(x)$, pelo eixo das abcissas e pelas rectas $x = a$ e $x = b$ (figura 54).

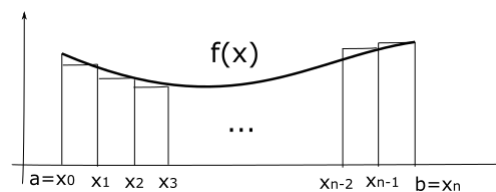


Figura 54: Problema da área.

Resolução

- Dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de medida $\Delta x = (b - a)/n$;
- Designar por $f_k \Delta x$ a área do retângulo de altura $f(x_k)$ e área da base Δx (figura 54).
- Considerar como aproximação da área da região o somatório das áreas dos retângulos obtidos;

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$
$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x.$$

- Fazendo o número de subdivisões tender para infinito de modo que $\Delta x \rightarrow 0$, se existir o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

ele representa o valor exato da área e escreve-se

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

O integral (1) diz-se **integral simples** de $f(x, y)$ sobre o intervalo $[a, b]$.

No caso geral, se $f(x)$ tomar valores positivos e negativos no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Área da região acima do eixo dos } x - \text{Área da região abaixo do eixo dos } x.$$

4.2 Motivação do Integral Duplo: O Problema do Volume

Problema do Volume: determinar o volume do sólido delimitado pelo topo $z = f(x, y)$, pela projecção R do topo no plano xy , e pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ (figura 55).

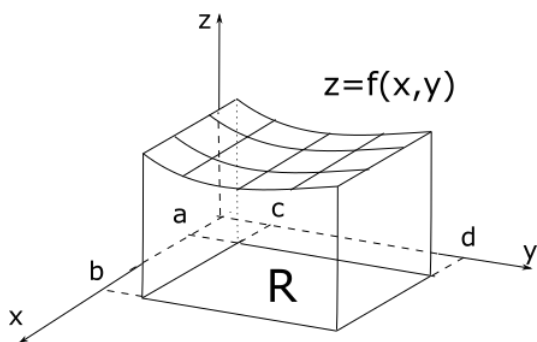


Figura 55:

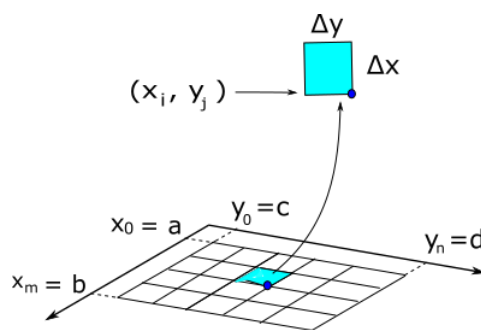


Figura 56: Região R : malha de rectângulos.

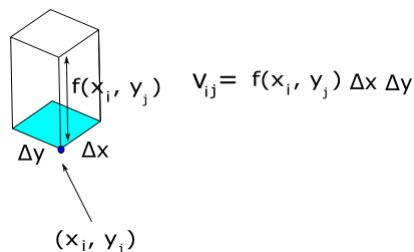


Figura 57: Volume do paralelepípedo.

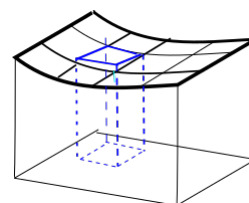


Figura 58:

Resolução

- Dividir a região R numa malha de $m \times n$ rectângulos de medidas Δx , Δy e escolher um ponto (x_i, y_j) em cada rectângulo (figura 56). O intervalo $a \leq x \leq b$ é dividido em m partes; o intervalo $c \leq y \leq d$ é dividido em n partes
- Designar por v_{ij} o volume do paralelepípedo de altura $f(x_i, y_j)$ e área da base $\Delta x \times \Delta y$ (figura 57).
- Considerar como aproximação do volume do sólido, o somatório dos volumes dos paralelepípedos

obtidos (figura 58).

$$\begin{aligned}
 V &\approx f(x_1, y_1)\Delta x\Delta y + f(x_1, y_2)\Delta x\Delta y + \cdots + f(x_1, y_n)\Delta x\Delta y + \\
 &+ f(x_2, y_1)\Delta x\Delta y + f(x_2, y_2)\Delta x\Delta y + \cdots + f(x_2, y_n)\Delta x\Delta y + \\
 &+ \cdots + \\
 &+ f(x_m, y_1)\Delta x\Delta y + f(x_m, y_2)\Delta x\Delta y + \cdots + f(x_m, y_n)\Delta x\Delta y \\
 V &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j)\Delta x\Delta y.
 \end{aligned}$$

- Fazendo o número de retângulos da malha tender para infinito, de modo que $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, o duplo limite

$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j)\Delta x\Delta y,$$

se existir, representa o valor exato do volume e escreve-se

$$V = \iint_R F(x, y) dA, \quad (2)$$

sendo $dA = dx dy$, ou $dA = dy dx$, o diferencial de área. O integral (2) diz-se **integral duplo** de $f(x, y)$ sobre a região R .

No caso geral, se $f(x, y)$ tomar valores positivos e negativos na região de integração R , então

$$\iint_R F(x, y) dA = \text{Volume do sólido acima do plano } xy - \text{Volume do sólido abaixo do plano } xy.$$

Esta estratégia de cálculo aplica-se também a regiões de integração não rectangulares.

4.3 Integrais Duplos Sobre Regiões Rectangulares

Teorema. *Seja R uma região rectangular definida pelas desigualdades*

$$a \leq x \leq b \quad c \leq y \leq d.$$

Se $f(x, y)$ é contínua neste rectângulo, então as duas expressões seguintes podem ser usadas para calcular o integral duplo de $f(x, y)$ sobre R :

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^b f(x, y) dx \right]}_{\text{Integração parcial}} dy \quad (3)$$

ou

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \underbrace{\left[\int_c^d f(x, y) dy \right]}_{\text{Integração parcial}} dx. \quad (4)$$

O integral interior em (3) é calculado supondo y constante, sendo o integral interior em (4) calculado supondo x constante.

Observação: em (3) integra-se primeiro em ordem a x e depois em ordem a y ; em (4) integra-se primeiro em ordem a y e depois em ordem a x . Esta forma simbólica simples de trocar a ordem de integração **só é válida** quando os extremos de integração a, b, c, d são constantes.

Exercício 88. Calcular o integral

$$\int_0^3 \int_1^2 (1 + 8xy) dy dx.$$

Notar que o integral podia indicar-se (gastando mais tinta)

$$\int_{x=0}^{x=3} \int_{y=1}^{y=2} (1 + 8xy) dy dx.$$

Resolução. A região de integração R está representada na figura 59.

$$I = \int_0^3 \underbrace{\int_1^2 (1 + 8xy) dy}_{I_1} dx$$

$$I_1 = \int_1^2 (1 + 8xy) dy = (y + 4xy^2) \Big|_{y=1}^{y=2} = (2 + 16x) - (1 + 4x) = 12x + 1$$

$$I = \int_0^3 (12x + 1) dx = (6x^2 + x) \Big|_0^3 = 57$$

■

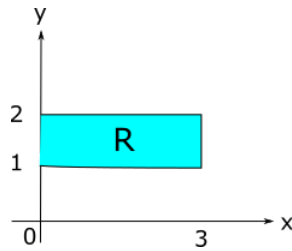


Figura 59:

Exercício 89. Verificar que se obtém o mesmo resultado trocando a ordem de integração,

$$\int_1^2 \int_0^3 (1 + 8xy) dx dy = 57.$$

Exercício 90. Calcular o integral

$$\iint_R y^2 x dA$$

sobre a região rectangular

$$R = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Resolução. A região de integração está representada na figura 60.

$$I = \int_0^1 \underbrace{\int_{-3}^2 y^2 x dx}_{I_1} dy$$

$$I_1 = \int_{-3}^2 y^2 x dx = \left(\frac{y^2 x^2}{2} \right) \Big|_{x=-3}^{x=2} = -\frac{5y^2}{2}$$

$$I = \int_0^1 -\frac{5y^2}{2} dy = \left(-\frac{5y^3}{6} \right) \Big|_0^1 = -\frac{5}{6}$$

■

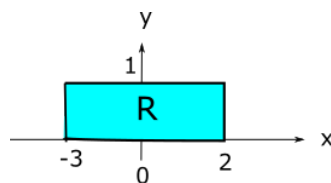


Figura 60:

4.4 Exercícios

Exercício 91. Calcular os integrais. Indicar quais correspondem a volumes de sólidos (o topo do sólido não tem partes abaixo do plano xy). Indicar o valor da função integranda num ponto da região de integração à escolha.

$$(a) \int_0^1 \int_0^2 (x+3) dx dy$$

$$(b) \int_0^{\ln(3)} \int_0^{\ln(2)} e^{x+y} dx dy$$

$$(c) \int \int_R 4yx^3 dx dy$$

$$(d) \int \int_R (x \operatorname{sen}(y) - y \operatorname{sen}(x)) dx dy$$

$$R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$$

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/3\}$$

Exercício 92. Escrever o integral

$$\int \int_R f(x, y) dA$$

com os extremos e integração e os diferenciais adequados, para cada região de integração na figura 61.

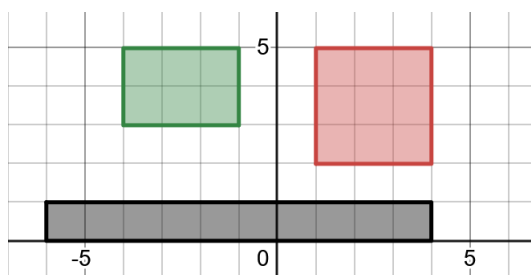


Figura 61:

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, Nikolai Piskounov.
2. *Calculus*, vol II, Howard Anton.