Notas das Aulas – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/~mar)

Capítulo 3. Transformadas da Laplace – Parte 3

- Resolução de PVIs usando TL
- Impulso Delta de Dirac
- Exercícios

3.4 Resolução de PVIs pelo Método das Transformadas de Laplace

Exercício 82. Resolver o pvi de 2ª ordem

$$\begin{cases} \ddot{x} + x &= u(t) - u(t-\pi) \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases} . \tag{1}$$

O pvi representa a equação do movimento $x(t)$ de uma massa de um sistema massa-mola não amortecido (figura 47), sobre a qual actua uma força constante $F = 1\ N$ no intervalo $0 \leq t < \pi$, com a direcção e sentido do eixo x (figura 48).

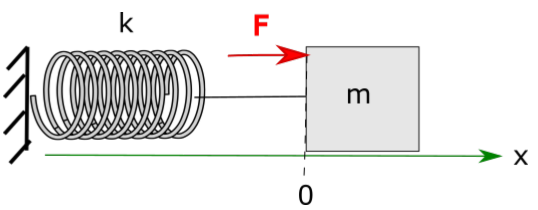

Figura 47: Sistema massa-mola não amortecido.

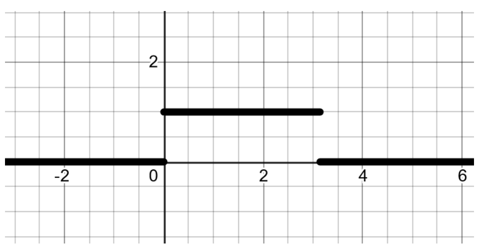

Figura 48: $u(t) - u(t-\pi)$

Resolução.

- Aplicar o operador $\mathscr{L}$ à ED e resolver a equação resultante em ordem a $X(s)$.

$$
\begin{aligned}
& \mathscr{L}(\ddot{x}+x) \;=\; \mathscr{L}(u(t)-u(t-\pi)) \\
\Leftrightarrow\; & \mathscr{L}(\ddot{x})+\mathscr{L}(x) \;=\; \mathscr{L}(u(t))-\mathscr{L}(u(t-\pi)) \\
\Leftrightarrow\; & s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+X(s) \;=\; \frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s} \\
\Leftrightarrow\; & X(s)(s^2+1) \;=\; \frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s} \\
\Leftrightarrow\; & X(s) \;=\; \frac{1}{s(s^2+1)}-e^{-\pi s}\frac{1}{s(s^2+1)}
\end{aligned}
$$

- Determinar a solução $x(t)$ do pvi.

  Por ser

$$\frac{1}{s(s^2+1)} \;=\; \frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1} \qquad \text{(verificar!)}$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) &= 1 \quad (F.\ 1) \\
\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) &= cos(t) \quad (F.\ 14,\ k=1)
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}(X(s)) \\
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)-\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-\pi s}\frac{1}{s(s^2+1)}\right) \\
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)-\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)\right) \\
x(t) &= (1-cos(t))-u(t-\pi)(1-cos(t-\pi)).
\end{aligned}
$$

Usando a relação $cos(a-b)=cos(a)cos(b)+sin(a)sin(b)$, temos

$$1-cos(t-\pi)=1-cos(t)cos(\pi)-sin(t)sin(\pi)=1+cos(t).$$

A expressão de $x(t)$ fica

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - cos(t) - u(t-\pi)(1+cos(t)) \\ \Leftrightarrow x(t) &= \begin{cases} 1 - cos(t), \ 0 \leq t < \pi \\ -2cos(t), \ t \geq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

A resposta $x(t)$ do sistema está representada no gráfico da figura 49.

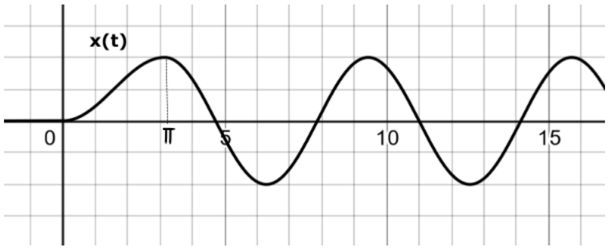

Figura 49:

Como resolveríamos este problema sem usar Transformadas de Laplace?

Resolvemos o problema em duas etapas no domínio do tempo, t.

1. Começamos por obter a solução do pvi no intervalo $0 \leq t < \pi$. Usamos a variável $y(t)$ para representar $x(t)$ neste intervalo.

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   A solução é

$$y(t) = 1 - cos(t), \quad 0 \leq t < \pi.$$

2. A partir do instante $t = \pi$ o sistema massa-mola fica livre (a força externa aplicada é nula), com as condições iniciais ditadas pela posição e velocidade da massa que resultam da solução do pvi (2), no instante $t = \pi$,

$$y(\pi) = 1 - cos(\pi) = 2, \qquad y'(\pi) = sin(\pi) = 0.$$

Por isso, a partir do instante $t = \pi$, a posição da massa é a solução do pvi de 2ª ordem

$$\begin{cases} \ddot{y} + y &= 0 \\ y(0) &= 2 \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{cases} \tag{3}$$

transladada no tempo π unidades no sentido positivo. A solução do pvi é $y(t) = 2cos(t)$, que transladada de π unidades fica

$$y(t) = 2cos(t - \pi), \quad t \geq \pi$$
$$\Leftrightarrow y(t) = -2cos(t), \quad t \geq \pi$$

por ser $cos(t - \pi) = cos(t)cos(\pi) + sin(t)sin(\pi) = -cos(t)$.

Agrupando agora as soluções dos PVIs (2) e (3), obtemos a solução pvi (1)

$$x(t) = \begin{cases} 1 - cos(t), \ 0 \leq t < \pi \\ -2cos(t), \ t \geq \pi \end{cases} .$$

que já havíamos determinado usando transformadas de Lapalace. Note-se a economia de cálculos obtida usando as transformadas.

O Impulso de Dirac

Suponhamos que uma força constante com módulo $F = 1\ N$, atua sobre uma massa m durante o intervalo de tempo $\Delta t = 1\ s$. Qual a variação de velocidade da massa devida à acção da força? Pela 2ª lei de Newton, $F = ma$, sabemos que se a força é constante, então a aceleração a também é constante. Por ser $a = dv/dt$, sendo v a velocidade, temos, considerando $\Delta t = t_1 - t_0$

$$\begin{aligned} & a = \frac{dv}{dt} \ \Rightarrow \ adt = dv \\ \Rightarrow \ & \int_{t_0}^{t_1} adt = \int_{v(t_0)}^{v(t_1)} dv \\ \Rightarrow \ & at\Big|_{t_0}^{t_1} = v\Big|_{v(t_0)}^{v(t_1)} \\ \Rightarrow \ & a(t_1 - t_0) = v(t_1) - v(t_0) \\ \Rightarrow \ & a\Delta t = \Delta v \\ \Rightarrow \ & a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Decorre daqui que

$$\begin{aligned} F &= ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} \\ \Leftrightarrow F\Delta t &= m\Delta v \\ \Leftrightarrow F\Delta t &= m(v(t_1) - v(t_0)) \end{aligned}$$

O produto $F\Delta t$ designa-se por **impulso** da força F no intervalo de tempo Δt. Dá-nos a variação da **quantidade de movimento** do corpo $m(v(t_1) - v(t_0))$ no intervalo Δt. A variação da velocidade do corpo no intervalo Δt é dada por

$$v(t_1) - v(t_0) = \frac{F\Delta t}{m}.$$

Conhecendo F, Δt, m, $v(t_0)$ podemos calcular $v(t_1)$. Na figura 50 estão representados três gráficos da força em função do tempo, todos eles com o mesmo valor do impulso, $F \times \Delta t = 1\ N \cdot s$ (a mesma área para os três retângulos).

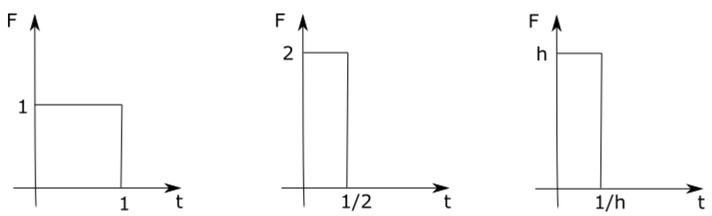

Figura 50:

Podemos colocar a seguinte questão: como representar matematicamente uma força instantânea que fornece ao corpo um impulso de 1 $N \cdot s$? Se aumentarmos a altura do rectângulo à direita na figura, atribuindo a h valores sucessivamente maiores, a largura diminui mas a área mantém-se igual a 1 para qualquer valor positivo de h. Neste processo, se a altura do retângulo tender para ∞, a largura tende para zero. Isto sugere uma "função" estranha definida da forma

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, \ t = 0 \\ 0, \ t \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

e satisfazendo a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad \text{(área=1)}. \tag{5}$$

A "função" que satisfaz estas condições designa-se por **delta de Dirac** ou **impulso de Dirac**[1]. Algumas representações de impulsos de Dirac estão na figura 51.

[1]Paul A. M. Dirac, 1902 – 1984, GB.

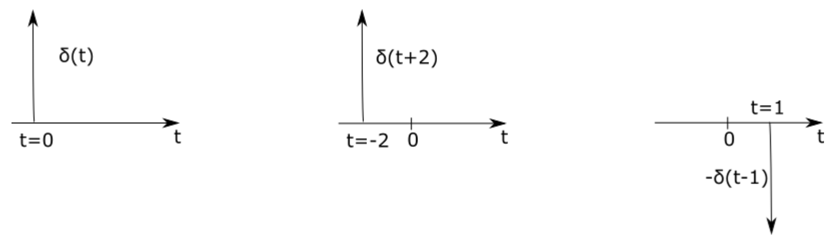

Figura 51:

É imediato perceber que $\delta(t)$ não é uma função no sentido que atribuimos a este termo em Cálculo, dado que uma função não toma o "valor" ∞ em nenhum ponto do seu domínio. Por outro lado, a igualdade (5) é apenas uma forma simbólica de indicar que uma força $\delta(t)$ corresponde a um impulso de 1 $N.s$, uma vez que um integral de Riemann só pode ser calculado se a função for limitada no domínio de integração, o que não acontece com a função $\delta(t)$. No entanto, por comodidade, passamos a designar $\delta(t)$ por função, sem aspas.

Uma definição rigorosa da função $\delta(t)$ é tratada no ramo da matemática designado por *Teoria das Distribuições*. É também possível tornar rigorosa a igualdade (5), usando um tipo de integral mais geral que o integral de Riemann, designado por *integral de Riemann-Stieltjes*. Usando este integral mais geral, é possível determinar a transformada de Laplace de $\delta(t)$, sendo que as transformadas das funções comuns se mantêm, quer se use o comum integral de Riemann ou o mais sofisticado integral de Riemann-Stieltjes. A resolução de pvis em que o segundo membro das EDs inclua impulsos de Dirac, segue como vimos anteriormente.

Exercício 83. Resolver o pvi de 2ª ordem.

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \delta(t-1) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

O pvi representa a equação do movimento $x(t)$ de uma massa de um sistema massa-mola não amortecido, sobre a qual actua uma força durante um intervalo de tempo tão pequeno que pode considerar-se instantânea no instante $t = 1$ s. A força fornece à massa um impulso igual a 1 $N \cdot s$.

Resolução.

- Aplicar o operador $\mathscr{L}$ à ED e resolver a equação resultante em ordem a $X(s)$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\ddot{x}+x) &= \mathscr{L}(\delta(t-1)) \\
\Leftrightarrow \mathscr{L}(\ddot{x})+\mathscr{L}(x) &= \mathscr{L}(\delta(t-1)) \\
\Leftrightarrow s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+X(s) &= e^{-s} \quad (F.\,6,\ t_0=1) \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{e^{-s}}{s^2+1} = e^{-s}\frac{1}{s^2+1} = e^{-s}F(s)
\end{aligned}$$

com $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$.

- Determinar a solução $x(t)$ do pvi.

Por ser

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}(e^{-s}F(s)) = u(t-1)f(t-1) \quad (F.\,4,\ a=1)$$

e

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s)) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = sin(t) \quad (F.\,13,\ k=1)$$

obtemos

$$x(t) = u(t-1)sen(t-1) = \begin{cases} 0, & t<1 \\ sin(t-1), & t\geq 1 \end{cases}.$$

A resposta $x(t)$ do sistema está representada na figura 52.

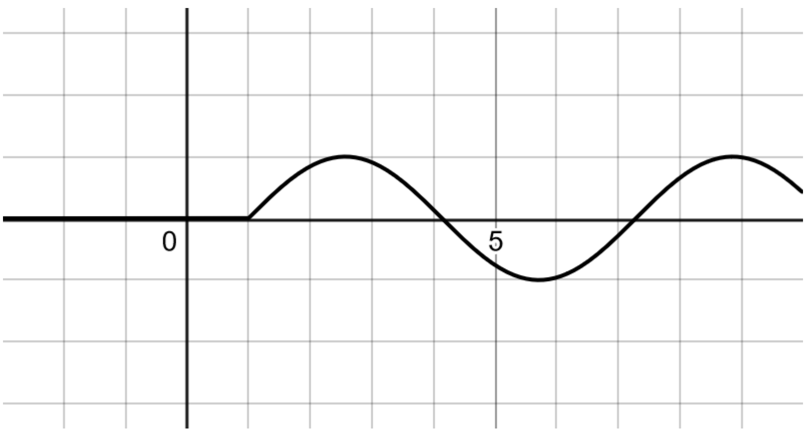

Figura 52:

Como resolveríamos este problema sem usar Transformadas de Laplace?

Podemos resolvê-lo supondo que o segundo membro da ED é uma função da forma (figura 53)

$$f(t) = h[u(t-1) + u(t-1-1/h)],$$

fazendo depois $h \to \infty$ na solução final obtida.

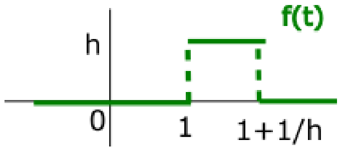

Figura 53: $f(t) = h(u(t-1) + u(t-1-1/h)$

1. Começamos por resolver o pvi de $2^{\underline{a}}$ ordem, no intervalo $0 \leq t < 1$. Usamos a variável $y(t)$ para representar $x(t)$ neste intervalo.

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Este problema tem solução nula,

$$y(t) = 0, \quad 0 \leq t < 1.$$

2. No intervalo $1 \leq t < 1 + 1/h$, o sistema fica sujeito à força externa $f(t) = h$. Resolvemos o pvi de $2^{\underline{a}}$ ordem, neste intervalo.

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = h \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Este problema tem solução $y(t) = h(1 - cos(t))$. Mas como o intervalo de tempo que estamos a tratar começa em $t = 1$, a solução tem a forma

$$y(t) = h(1 - cos(t-1)), \quad 1 \leq t < 1 + 1/h.$$

3. No intervalo $t \geq 1 + 1/h$, o sistema fica sujeito à força externa $f(t) = 0$, com as condições iniciais ditadas pela posição e velocidade da massa no instante $t = 1 + 1/h$, que se calculam usando a

solução obtida no item anterior.

$$y(1+1/h) = h(cos((1+1/h)-1)) = h(cos(1/h))$$

$$y'(t) = (h(1-cos(t-1)))' = hsin(t-1) \Rightarrow y'(1+1/h) = hsin(1/h)$$

A partir do instante $t = 1 + 1/h$, a posição da massa é dada pela solução do pvi de 2ª ordem

$$\begin{cases} \ddot{y} + y &= 0 \\ y(0) &= h(cos(1/h) \\ \dot{y}(0) &= hsin(1/h) \end{cases} \tag{9}$$

que é

$$y(t) = hcos(1/h)cos(t) + hsin(1/h)sin(t).$$

Mas como o intervalo de tempo que estamos a tratar neste pvi começa em $t = 1 + 1/h$, a solução tem a forma

$$y(t) = hcos(1/h)cos(t-1-1/h) + hsin(1/h)sin(t-1-1/h), \quad t \geq 1 + 1/h.$$

Agrupando agora as soluções dos pvis (7), (8), (9), temos

$$y(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \leq t < 1 \\ h(1-cos(t-1)),\ 1 \leq t < 1+1/h \\ hcos(1/h)cos(t-1-1/h) + hsin(1/h)sin(t-1-1/h),\ t \geq 1+1/h \end{cases} \tag{10}$$

Calculamos agora a solução do pvi inicial

$$x(t) = \lim_{h\to\infty} y(t).$$

O limite afeta apenas as duas últimas expressões em (10). A segunda expressão

$$h(1-cos(t-1)),$$

pode ser escrita

$$h(1-cos(1+1/h-1)) = h(1-cos(1/h)),$$

obtendo-se o limite

$$\lim_{h\to\infty} h(1 - cos(1/h)$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{1 - cos(1/h)}{1/h}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{-(1/h^2)sin(1/h)}{-1/h^2}, \text{ pela regra de l'Hôpital}$$

$$= \lim_{h\to\infty} sin(1/h) = sin(0) = 0$$

Calculamos agora o limite da terceira expressão de (10)

$$\lim_{h\to\infty} \left[hcos(1/h)cos(t-1-1/h) + hsin(1/h)sin(t-1-1/h)\right].$$

Notando que

$$\lim_{h\to\infty} (hcos(1/h)) = \lim_{h\to\infty} \frac{cos(1/h)}{1/h} = \lim_{h\to\infty} \frac{(-1/h^2)sin(1/h)}{-1/h^2} = sin(0) = 0$$

$$\lim_{h\to\infty} (cos(t-1-1/h)) = cos(t-1)$$

$$\lim_{h\to\infty} (hsin(1/h)) = \lim_{h\to\infty} \frac{sin(1/h)}{1/h} = 1$$

$$\lim_{h\to\infty} (sin(t-1-1/h)) = sin(t-1)$$

temos

$$\lim_{h\to\infty} [hcos(1/h)cos(t-1-1/h) + hsin(1/h)sin(t-1-1/h)] = sin(t-1).$$

Em resumo, a solução do pvi é

$$x(t) = \begin{cases} 0, \ t \leq 1 \\ sin(t-1), \ t > 1 \end{cases} \tag{11}$$

que já havíamos calculado usando transformadas de Laplace. Note-se a economia de cálculos proporcionada pelo uso de transformadas de Laplace.

3.4.1 Exercícios

Exercício 84. Considerar o PVI

$$\begin{cases} x'' + 4x' + 13x \;=\; f(t) \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -1 \end{cases}.$$

no qual a função incónita representa a posição (em metros), em função do tempo (em segundos), de uma massa num sistema massa-mola-amortecedor.

1. O que significa resolver o pvi?
2. A unidade de $f(t)$ é o Newton. Quais as unidades das constantes 4 e 13? Quais as unidades de x'', x' e x?
3. Resolver o pvi para a seguinte força externa

$$f(t) = \begin{cases} 1, \; 0 \le t \le 2 \\ -1, \; t > 2. \end{cases}$$

(sugestão: escrever $f(t)$ usando degraus de Heaviside e aplicar transformadas de Laplace).

Exercício 85. Considerar o pvi

$$\begin{cases} x'' + 4x \;=\; f(t) \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -1 \end{cases}.$$

1. Qual a posição e a velocidade inicial da massa?
2. Resolver o pvi para $f(t) = 0$. Qual a velocidade da massa no instante $t = 4$?
3. Escreva um pvi com os mesmos dados, escollhendo para $f(t)$ uma função da forma $k\Delta(t-a)$ (indicar k e a), de modo que a massa fique em repouso para $t > a$.

Exercício 86. O problema de valor inicial de segunda ordem

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t), \; x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = 0,$$

formaliza a posição da massa de um sistema massa-mola-amortecedor. A massa, quando se move, segue uma trajetória linear.

1. Quais as unidades de b e de k?

2. Resolver o pvi de segunda ordem, se for $f(t) = -2u(t-2)$, $m = 1$, $b = 0$, $k = 1$. No instante $t = 3\ s$, a massa moveu-se para a esquerda ou para a direita do ponto $x = 0$?

Exercício 87. Considerar o problema de valor inicial de segunda ordem

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} + 4x = f(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Justificar que o pvi não se refere a um sistema massa-mola-amortecedor.

(b) Resolver o pvi no tempo (isto é, sem usar transformadas de Laplace), se for $f(t) = 4 - 5sin(t)$.

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, N. Piskounov.

2. *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*, Stanley J. Farlow.

3. *Elementary Differential Equations*, William F. Trench (free download - link).

4. *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Joel L. Schiff