Notas das Aulas – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/∼mar)

Capítulo 2. Equações Diferenciais – Parte 3

- EDs Lineares de 2ª Ordem
- Resolução de EDs Lineares de 2ª Ordem, Homogéneas, de Coeficientes Constantes
- Aplicações das EDs Lineares de 2ª Ordem, Homogéneas, de Coeficientes Constantes
  - Sistema massa-mola não amortecido
  - Sistema massa-mola-amortecedor
- Anexo
  - Caso em que o polinómio característico tem raiz dupla.
  - Sinais da velocidade, aceleração e força no movimento linear.

2.9 Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

Uma ED linear de 2ª ordem é da forma

$$y'' + a(x)y' + b(x)y \;=\; f(x),$$

sendo $y(x)$ a função incógnita. Se $a(x)$ e $b(x)$ são constantes, a ED diz-se de **coeficientes constantes**; de contrário diz-se de **coeficientes variáveis**. Se $f(x) \equiv 0$ a ED diz-se **homogénea**; de contrário diz-se **não homogénea**.
Começamos por estudar a resolução de EDs lineares homogéneas de 2ª ordem.

2.10 Aspectos da Resolução de EDLs de 2ª Ordem

Vamos caracterizar a solução geral de uma ED linear homogénea de 2ª ordem

$$y'' + a(x)y' + b(x)y \;=\; 0.$$

Funções linearmente dependentes (independentes)

Duas funções $f(x)$ e $g(x)$ dizem-se **linearmente dependentes** no intervalo I de valores de x, se existirem duas constantes c_1, c_2, não ambas nulas, tais que

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) \;=\; 0, \tag{1}$$

para todos os valores $x \in I$. Caso contrário, diz-se que as funções são **linearmente independentes** no intervalo I.

Exemplo 1. As funções $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = e^{-x}$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$ porque, se fossem linearmente dependentes, existiriam duas constantes c_1, c_2 tais que

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \frac{c_1}{c_2} \;=\; -\frac{e^{-x}}{e^{2x}} \;\Rightarrow\; \frac{c_1}{c_2} \;=\; -e^{-3x}.$$

O primeiro membro da última igualdade é constante em $\mathbb{R}$, o que não acontece com o segundo membro. Não existem, por isso, constantes c_1, c_2 que validem a primeira igualdade para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2. As funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = -x$ são linearmente dependentes em $\mathbb{R}$, porque

$$c_1 2x + c_2(-x) \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \frac{c_1}{c_2} \;=\; \frac{x}{2x} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Se escolhermos $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$, ou qualquer outro par de valores que satisfaça $c_1/c_2 = 1/2$, a primeira igualdade é válida para todos os valores $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3. As funções $f(x) = e^x cos(2x)$ e $g(x) = e^x sen(2x)$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$, porque

$$c_1 e^x cos(2x) + c_2 e^x sen(2x) \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \frac{c_1}{c_2} \;=\; -\frac{e^x sen(2x)}{e^x cos(2x)} \;\Rightarrow\; \frac{c_1}{c_2} \;=\; -tan(2x).$$

O primeiro membro, c_1/c_2, da última igualdade é constante em $\mathbb{R}$, o que não acontece com o segundo membro, $-tan(2x)$. Não existem, por isso, constantes c_1, c_2 que validem a primeira igualdade para todos os valores $x \in \mathbb{R}$.

O teorema seguinte mostra-nos que, conhecendo duas soluções particulares linearmente independentes não triviais (não nulas) quaisquer, y_1, y_2, de uma ED linear homogénea de 2ª ordem, podemos escrever a solução geral da ED.

Teorema. *Se y_1, y_2 são duas soluções particulares linearmente independentes, não nulas, da ED*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y \;=\; 0$$

no intervalo (a, b), então qualquer solução da ED neste intervalo se pode escrever da forma

$$y \;=\; C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

para algum par de valores $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Diz-se **conjunto fundamental de soluções** ou **base de soluções** de uma ED linear homogénea de 2ª ordem, qualquer conjunto $\{y_1, y_2\}$ de soluções linearmente independentes, não nulas, da ED. O teorema anterior afirma que qualquer base de soluções de uma ED linear homogénea de 2a ordem, num dado intervalo, pode ser usado para escrever a sua solução geral nesse intervalo.

Ao contrário do que sucede com as EDs lineares de 1ª ordem, para as quais existe um bf método analítico de resolução, não existe um método geral que permita resolver todas as EDs lineares de 2ª ordem. Entretanto, **um método geral de solução existe para o caso das EDs lineares homogéneas de 2ª ordem de coeficientes constantes**. Estas EDs encontram-se na formalização matemática de variados sistemas físicos, como sistemas massa-mola, circuitos elétricos ou fenómenos oscilatórios. Vamos fazer o seu estudo e apresentar algumas aplicações práticas.

2.11 EDLs de 2ª Ordem, Homogéneas, com Coeficientes Constantes

Vamos resolver EDs do tipo

$$y'' + Ay' + By = 0, \tag{2}$$

com A, B, constantes. Podemos verificar que uma função do tipo e^{rt}, com uma escolha conveniente de r, resolve a ED (2).

$$\begin{aligned}
\left(e^{rt}\right)'' + A\left(e^{rt}\right)' + Be^{rt} &= 0 \Leftrightarrow \\
r^2 e^{rt} + Are^{rt} + Be^{rt} &= 0 \Leftrightarrow \\
r^2 + Ar + B &= 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

A equação (3) diz-se **equação característica** da ED. O polinómio $P(r) = r^2 + Ar + B$ diz-se **polinómio característico** da ED. Podemos ter três tipos de soluções da ED (2), consoante a natureza das raízes da equação característica.

$$r^2 + Ar + B = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

- **Caso 1.**($A^2 - 4B > 0$) A equação característica tem duas raízes reais distintas, r_1, r_2. Neste caso as funções $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$ são soluções particulares da ED e são linearmente independentes. A solução geral da ED é da forma

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercício 42. Resolver a ED

$$y'' + 5y' + 6y \;=\; 0.$$

Resolução.

– Solução da equação característica.

$$r^2 + 5r + 6 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; r \;=\; \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 6}}{2} \;\Leftrightarrow\; (r = -2)\dot{\vee}(r = -3)$$

– Solução geral da ED.

$$y \;=\; C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

– Algumas soluções particulares da ED.

$$\begin{array}{ll} C_1 \;=\; C_2 \;=\; 0 & \qquad y(x) \;=\; 0 \\ C_1 \;=\; 0,\; C_2 \;=\; 1 & \qquad y(x) \;=\; e^{-3x} \\ C_1 \;=\; -2,\; C_2 \;=\; \dfrac{1}{2} & \qquad y(x) \;=\; -2e^{-2x} + \dfrac{1}{2}e^{-3x} \end{array}$$

■

- **Caso 2.** $(A^2 - 4B = 0)$ A equação característica tem uma raiz real dupla, r. Neste caso as funções e^{rx}, xe^{rx} são soluções particulares da ED [1] e são linearmente independentes. A solução geral da ED é da forma

$$y \;=\; C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercício 43. Resolver a ED

$$y'' + 4y' + 4y \;=\; 0.$$

Resolução.

– Solução da equação característica.

$$r^2 + 4r + 4 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; r \;=\; \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4}}{2} \;\Leftrightarrow\; r \;=\; -2$$

[1] Prova em anexo.

– Solução geral da ED.

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

– Algumas soluções particulares da ED.

$$\begin{array}{ll} C_1 = C_2 = 0 & y(x) = 0 \\ C_1 = 3,\ C_2 = 1 & y(x) = 3e^{-2x} + xe^{-2x} \\ C_1 = -2,\ C_2 = 0 & y(x) = -2e^{-2x} \end{array}$$

■

- **Caso 3.** $(A^2 - 4B < 0)$ A equação característica tem duas raízes complexas conjugadas, $r = \alpha \pm i\beta$. Neste caso as funções

$$r_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$$

$$r_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$$

são soluções particulares da ED e são linearmente independentes. A solução geral da ED é da forma

$$y = C_1e^{\alpha x}e^{i\beta x} + C_2e^{\alpha x}e^{-i\beta x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Esta é uma solução geral complexa. É uma indicação dada pelo processo de cálculo de que a grandeza $y(x)$ representada pela ED tem comportamento oscilatório. No entanto, sendo $y(x)$ uma grandeza real pretendemos obter uma expressão real para ela. Para tal precisamos de obter duas soluções reais da ED, linearmente independentes (conforme o teorema da página 75). Eis como o fazer.

– As soluções da equação característica podem escrever-se da forma (usando a fórmula de Euler[2])

$$r_1 = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(cos(\beta x) + isen(\beta x))$$

$$r_1 = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(cos(\beta x) - isen(\beta x))$$

A solução geral (4) pode reescrever-se como a seguir se indica.

$$y = C_1e^{\alpha x}(cos(\beta x) + isen(\beta x)) + C_2e^{\alpha x}(cos(\beta x) - isen(\beta x)) \tag{5}$$

[2]Fórmula de Euler: $e^{ix} = cos(x) + isen(x)$.

– Fazendo $C_1 = C_2 = 1/2$ obtemos $y = e^{\alpha x}cos(\beta x)$, que é uma solução particular da ED.

– Fazendo $C_1 = -i/2$ e $C_2 = i/2$ obtemos $y = e^{\alpha x}sen(\beta x)$, que é outra solução particular da ED.

As duas soluções particulares $e^{\alpha x}cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}sen(\beta x)$ são funções linearmente independentes (porquê?). Podemos agora escrever a solução geral real da ED.

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x}cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}sen(\beta x) \\ y &= e^{\alpha x}\left(C_1 cos(\beta x) + C_2 sen(\beta x)\right), \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercício 44. Resolver a ED

$$y'' + 2y' + 4y = 0.$$

Resolução.

- Resolução da equação característica.

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 4 = 0 \Leftrightarrow r &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 4}}{2} \Leftrightarrow r = -1 \pm i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \alpha = -1; \;\; \beta = \sqrt{3} \end{aligned}$$

- Solução geral da ED.

$$y = e^{-x}\left(C_1 cos(\sqrt{3}x) + C_2 sen(\sqrt{3}x)\right), \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Algumas soluções particulares da ED.

$$\begin{array}{ll} C_1 = 0, \; C_2 = 0 & y(x) = 0 \\ C_1 = 3, \; C_2 = 1 & y(x) = e^{-x}\left(3cos(\sqrt{3}x) + sen(\sqrt{3}x)\right) \\ C_1 = 0, \; C_2 = 1 & y(x) = e^{-x}sen(\sqrt{3}x) \end{array}$$

■

2.12 Aplicações

Aplicações das Equações Diferenciais Lineares Homogéneas de 2ª Ordem de Coeficientes Constantes

2.12.1 Sistema Massa-Mola não Amortecido

A figura 24 representa uma mola com rigidez k (Newton/metro) fixada a uma parede no lado esquerdo e ligada a uma massa m (kg) no lado direito. A massa pode mover-se na direcção do eixo x, sem atrito. Supõe-se que a massa da mola é nula. De início a massa encontra-se estática na posição $x = 0$. A mola não está comprimida nem alongada. Diz-se que o sistema se encontra num **ponto de equilíbrio estável** e, se não for perturbado, continuará assim indefinidamente. Suponhamos agora que afastamos a massa da posição de equilíbrio, deslocando-a para a direita, e que a largamos.

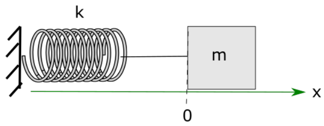

Figura 24: Sistema massa-mola não amortecido.

O deslocamento para a direita alonga a mola, que passa a exercer uma força sobre a massa no sentido oposto ao do eixo x, que tenta restituir a massa à posição de equilíbrio inicial (**força de restituição**). A força fornece uma aceleração à massa que, na passagem pela posição de equilíbrio $x = 0$, atinge a sua velocidade máxima no percurso. A energia cinética[3] da massa diz-se **energia cinética do sistema massa-mola**.

Por inércia, a massa continua a deslocar-se para a esquerda do ponto de equilíbrio, $x = 0$, comprimindo a mola. Ao ser comprimida, a mola exerce sobre a massa uma força com o sentido do eixo x, travando o seu movimento. A dado momento a massa pára. Neste instante toda a sua energia cinética foi convertida em energia potencial elástica armazenada na mola. Como a compresssão não existiria sem a massa, diz-se desta energia que é a **energia potencial do sistema massa-mola**. A força que a mola exerce sobre a massa no sentido do eixo x é agora máxima (em módulo) nos dois extremos do movimento, quando a massa tem velocidade nula.

A massa é então movida para a direita, passando pela origem e detendo-se no ponto para onde foi inicialmente puxada e libertada. A partir daí todo o processo se repete. A massa efectua um movimento oscilatório. Observe-se que a existência de um processo oscilatório depende da presença de, pelo menos, dois elementos que troquem energia entre si, neste caso a massa e a mola. O movimento realizado pela massa diz-se **movimento harmónico simples**. Este tipo de movimento acontece sempre que a força exercida sobre uma massa é proporcional à posição desta relativamente a um ponto de equilíbrio.

Pretendemos determinar a lei do movimento da massa, isto é, queremos determinar a expressão de uma função $x(t)$ que nos permita saber a posição x da massa em cada instante t, supondo que $t = 0$ corresponde

[3]Energia cinética = $\frac{1}{2}mv^2$.

ao momento em que a massa é largada. Supondo que a força exercida pela mola é descrita pela **Lei de Hooke**, $F_{mola} = -kx$ (válida para deslocamentos x pequenos; k é a rigidez da mola, uma constante positiva), usamos a 2ª Lei de Newton (lei da aceleração) referente à força F total exercida sobre a massa m ($\ddot{x}$ representa a aceleração da massa).

$$
\begin{aligned}
F \;=\; ma \Leftrightarrow -kx \;=\; m\ddot{x} \\
\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx \;=\; 0 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Esta equação diferencial designa-se por **equação do movimento da massa**. A solução $x(t)$ que obtivermos dela diz-se **lei do movimento da massa**. Como veremos adiante, precisamos de conhecer duas **condições iniciais** do problema para a obter.

Análise dimensional da fórmula (6)

Unidades da massa m: kg Unidades da aceleração $\ddot{x}$: $\dfrac{m}{s^2}$

Unidades da constante da mola k: $\dfrac{N}{m}$ Unidades da posição x: m

Substituindo estas unidades no primeiro membro da fórmula (6), obtemos

$$kg \times \frac{m}{s^2} + \frac{N}{m} \times m \;=\; \frac{kg \times m}{s^2} + N$$

Concluimos que a fórmula (6) é dimensionalmente correcta, uma vez que adiciona grandezas da mesma natureza e com as mesmas unidades, neste caso forças ($Newton = kg \times m/s^2$).

Resolução da ED (6)

$$m\ddot{x} + kx \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; \ddot{x} + \omega_0^2 x \;=\; 0$$

com $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

- Solução da equação característica.

$$r^2 + \omega_0^2 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 \;=\; -\omega_0^2 \;\Leftrightarrow\; r \;=\; \pm i\omega_0$$

Se as raízes da equação característica são complexas, então o movimento da massa é oscilatório (como era esperado).

- Solução geral da ED.

$$x(t) \;=\; C_1 cos(\omega_0 t) + C_2 sen(\omega_0 t),\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ diz-se **frequência natural** de oscilação do sistema e é independente das condições iniciais do problema (posição e velocidade da massa no instante $t = 0$).

Suponhamos que $k = 2$, $m = 1$. Consideremos também que no instante $t = 0$ se tem $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$, isto é, a massa é largada da posição $x = 0$ e recebe um impulso que lhe dá uma velocidade inicial de $1\ m/s$ no sentido do eixo x. O problema a resolver é um **problema de valor inicial de 2ª ordem**, e escreve-se

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x \;=\; 0 \\ x(0) \;=\; 0 \\ \dot{x}(0) \;=\; 1. \end{cases}$$

Vamos usar as condições iniciais na solução geral da ED. Começamos pela condição $x(0) = 0$.

$$\begin{aligned} x(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; & C_1 cos(\omega_0 \times 0) + C_2 sen(\omega_0 \times 0) \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow & \; C_1 \;=\; 0 \\ \therefore & \;\; x(t) \;=\; C_2 sen(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Usamos agora a condição $\dot{x}(0) = 1$. Notar que $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{2}\, rad/s$.

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \;=\; (C_2 sen(\omega_0 t))' \;=\; \omega_0 C_2 cos(\omega_0 t) \\ &\dot{x}(0) \;=\; 1 \;\Leftrightarrow\; \omega_0 C_2 cos(\omega_0 \times 0) \;=\; 1 \;\Leftrightarrow\; \omega_0 C_2 \;=\; 1 \\ &C_2 \;=\; \frac{1}{\omega_0} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

A lei do movimento da massa é

$$x(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2} t).$$

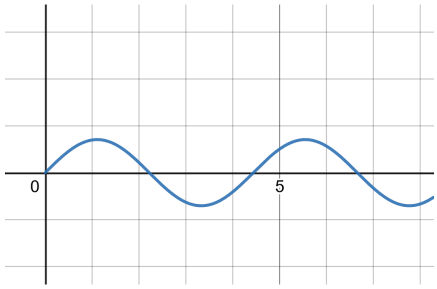

Figura 25: Resposta do sistema massa-mola não amortecido.

Na figura 25 está representada a resposta sinusoidal $x(t)$ do sistema às condições iniciais. A amplitude $1/\sqrt{2}$ da sinusóide é um pouco menor do que 1, e representa o afastamento máximo da massa em relação ao ponto $x = 0$. Entre o instante inicial e o instante $t \approx 1.1$, a posição $x(t)$ é crescente e positiva, como resultado da velocidade inicial $\dot{x} = 1$ que é comunicada à massa no instante inicial. Usando a frequência natural $\omega_0 = \sqrt{2}\ rad/s$, podemos determinar o **período** T (segundos) do movimento, isto é, o tempo que dura cada vai-vem da massa, e a **frequência** f (ciclos/segundo ou Hz – Hertz) do movimento[4], isto é, o número de vai-vens que a massa efectua em cada segundo.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \approx 4.4\ s \\
f &= \frac{1}{T} \approx 0.23\ Hz
\end{aligned}
$$

Estes valores podem ser confirmados na figura 25.

2.12.2 Sistema Massa-Mola Amortecido

A figura 26 representa uma mola com rigidez k (Newton/metro) fixada a uma parede no lado esquerdo, e ligada a uma massa m (kg) no lado direito, que por sua vez se encontrada ligada a um amortecedor com coeficiente de amortecimento b (kg/s). O amortecedor exerce sobre a massa uma força proporcional à velocidade e de sentido oposto a esta, $F_b = -b\dot{x}$ (simula o amortecimento que se verifica quando um corpo se move dentro de um fluido, com uma velocidade relativamente pequena).

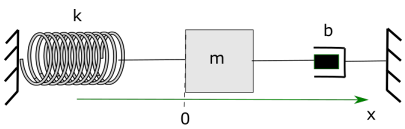

Figura 26: Sistema massa-mola-amortecedor.

Pretendemos determinar a lei do movimento da massa. Usamos a 2ª Lei de Newton referente à força F

[4]A constante ω costuma designar-se **frequência angular** do movimento, enquanto f se designa apenas por *frequência* do movimento.

total exercida sobre a massa m.

$$\begin{aligned} F = ma \Leftrightarrow -b\dot{x} - kx &= m\ddot{x} \\ \Leftrightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

A lei do movimento é-nos dada pela ED linear homogénea de 2ª ordem (7), tal como no caso não amortecido, mas agora no primeiro membro surge um termo em $\dot{x}$ respeitante ao amortecimento. Devemos resolver esta ED para obter $x(t)$.

Análise dimensional da fórmula (7)

Unidades da massa m: kg

Unidades da constante de amortecimento b: $\frac{kg}{s}$

Unidades da constante da mola k: $\frac{N}{m}$

Unidades da aceleração $\ddot{x}$: $\frac{m}{s^2}$

Unidades da velocidade $\dot{x}$: $\frac{m}{s}$

Unidades da posição x: m

Substituindo estas unidades no primeiro membro da fórmula (7), obtemos

$$kg \times \frac{m}{s^2} + \frac{kg}{s} \times \frac{m}{s} + \frac{N}{m} \times m = \frac{kg \times m}{s^2} + \frac{kg \times m}{s^2} + N$$

Concluimos que a fórmula (7) é dimensionalmente correcta, uma vez que adiciona grandezas da mesma natureza e com as mesmas unidades, neste caso forças ($Newton = kg \times m/s^2$).

Resolução da ED (7)

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

com $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

- Solução da equação característica.

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{b}{m}r + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 &= \frac{-b/m \pm \sqrt{b^2/m^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ \Leftrightarrow r &= -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \frac{b^2}{4m^2} - \omega_0^2$, o sistema pode classificar-se de três formas distintas: (i) sistema sobreamortecido ($\Delta > 0$), (ii) sistema criticamente amortecido ($\Delta = 0$), ou (iii) sistema subamortecido ($\Delta < 0$). Consideremos o caso subamortecido e façamos

$$r \;=\; -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \omega_0^2} \;=\; -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \;=\; -\frac{b}{2m} \pm i\omega$$

sendo $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$ a **frequência amortecida** de oscilação do sistema, que é independente das condições iniciais (posição e velocidade da massa no instante $t = 0$).

- Solução geral da ED.

$$x(t) \;=\; e^{-tb/(2m)} \left(C_1 cos(\omega t) + C_2 sen(\omega t) \right), \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Como exemplo, se $k = 1$, $m = 1$ e $b = 4$, então $\Delta = 3 > 0$ e temos o caso sobreamortecido. As raízes da equação característica são $r = -2 \pm \sqrt{3}$. A solução geral da ED é

$$x(t) \;=\; C_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Se $k = 1$, $m = 1$ e $b = 1$, então $\Delta = -3/4 < 0$ e temos o caso subamortecido. O sistema oscila. As raízes da equação característica são $r = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. A solução geral da ED é

$$x(t) \;=\; e^{-t/2} \left(C_1 cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + C_2 sen(\frac{\sqrt{3}}{2} t) \right), \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Suponhamos que no instante $t = 0$ se tem $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$, isto é, a massa é largada da posição $x = 1$ e recebe um impulso que lhe dá uma velocidade inicial de $1m/s$ no sentido do eixo x. O problema a resolver é um **problema de valor inicial de 2ª ordem**, e escreve-se

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x \;=\; 0 \\ x(0) \;=\; 1 \\ \dot{x}(0) \;=\; 1. \end{cases}$$

Vamos usar as condições iniciais na solução geral da ED (9). Começamos pela condição $x(0) = 1$.

$$\begin{aligned} x(0) = 1 \;\Leftrightarrow\; & e^{-0/2} \left(C_1 cos(0) + C_2 sen(0) \right) \;=\; 1 \\ & \Leftrightarrow C_1 \;=\; 1 \\ & \therefore\;\; x(t) \;=\; e^{-t/2} \left(cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + C_2 sen(\frac{\sqrt{3}}{2} t) \right) \end{aligned}$$

Usamos agora a condição $\dot{x}(0) = -1$.

$$\dot{x}(t) \; = \; \left(e^{-t/2}\left(cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + C_2 sen(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)\right)' \; = \; e^{-t/2}\left(\frac{C_2\sqrt{3}-1}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{C_2+\sqrt{3}}{2}sen(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$$

$$\dot{x}(0) \; = \; 1 \; \Leftrightarrow \; e^{-0/2}\left(\frac{C_2\sqrt{3}-1}{2}cos(0) - \frac{C_2+\sqrt{3}}{2}sen(0)\right) \; = \; 1 \; \Leftrightarrow \; \frac{C_2\sqrt{3}-1}{2} \; = \; 1 \; \Leftrightarrow \; C_2 \; = \; \sqrt{3}$$

A lei do movimento da massa é

$$x(t) \; = \; e^{-t/2}\left(cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \sqrt{3}sen(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right).$$

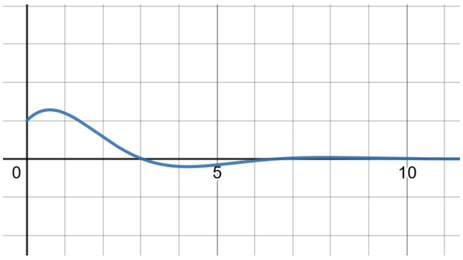

Figura 27: Resposta do sistema massa-mola-amortecedor.

Na figura 27 está representada a resposta $x(t)$ do sistema às condições iniciais. A posição inicial da massa é $x(0) = 1$ mas, como se pode verificar analisando o gráfico, a distância da massa à origem aumenta depois do instante inicial, devido à velocidade inicial positiva da massa. O declive da curva, à medida que t se aproxima de zero por valores à direita, tende para o valor da velocidade inicial $\dot{x} = 1$. A amplitude da oscilação diminui com o tempo devido ao termo $e^{-t/2}$, que não existe na resposta no exemplo anterior porque aí não há amortecedor. Usando a frequência $\omega = \sqrt{3}/2 \; rad/s$, podemos determinar o designado **período amortecido** T (segundos) do movimento (assim designado por o movimento não ser periódico puro), isto é, o tempo que dura cada vai-vem da massa, e a **frequência amortecida** f (Hz) do movimento, isto é, o número de vai-vens que a massa fectua em cada segundo.

$$T \; = \; \frac{2\pi}{\omega} \; = \; \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \; \approx \; 7.3 \; s$$

$$f \; = \; \frac{1}{T} \approx \; 0.14 \; Hz$$

Estes valores podem ser confirmados na figura 27.

2.13 Anexo

Caso em que o polinómio característico tem raiz dupla

Consideremos a ED com coeficientes constantes

$$y'' + Ay' + By \; = \; 0,$$

cujas raízes do polinómio característico são

$$r^2 + Ar + B \; = \; 0 \; \Leftrightarrow \; r \; = \; \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}.$$

Vamos verificar que, no caso de se ter $A^2 - 4B = 0$, a função $xe^{rx} = xe^{-Ax/2}$ é uma solução particular da ED. Substituindo esta função na ED, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
&\left(xe^{-Ax/2}\right)'' + A\left(xe^{-Ax/2}\right)' + Be^{rt} \; = \; 0 \; \Leftrightarrow \\
&\left(e^{-Ax/2} - \frac{xA}{2}e^{-Ax/2}\right)' + A\left(e^{-Ax/2} - \frac{xA}{2}e^{-Ax/2}\right) + Bxe^{-Ax/2} \; = \; 0 \; \Leftrightarrow \\
&-Ae^{-Ax/2} + \frac{A^2x}{4}e^{-Ax/2} + A\left(e^{-Ax/2} - \frac{xA}{2}e^{-Ax/2}\right) + Bxe^{-Ax/2} \; = \; 0 \; \Leftrightarrow \\
&xe^{-Ax/2}\left(\frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{2} + B\right) \; = \; 0 \; \Leftrightarrow \; xe^{-Ax/2}\left(-\frac{A^2}{4} + B\right) \; = \; 0
\end{aligned}$$

A expressão entre parênteses, $-A^2/4 + B$, é igual a zero (porquê?), o que mostra que a função $xe^{rx} = xe^{-Ax/2}$ é uma solução particular da ED.

Sinais da velocidade, aceleração e força no movimento linear

No estudo do movimento, as grandezas **posição**, **velocidade**, **aceleração** e **força**, são representadas por vectores. Porém, no caso em que o movimento é linear, estas grandezas têm a mesma direcção e um de dois sentidos possíveis. Podemos, por isso, dispensar a representação vectorial e usar uma representação que envolve o módulo da grandeza e um dos sinais, $\pm$, para distinguir os dois sentidos possíveis.

Nas duas imagens da figura 28, representam-se as posições x_1, x_2, de um corpo em movimento linear, em dois instantes t_1, t_2 distintos, com $t_2 > t_1$. O referencial é um eixo orientado. Na imagem da esquerda o corpo desloca-se no sentido do eixo, deslocando-se no sentido oposto ao do eixo na imagem da direita.

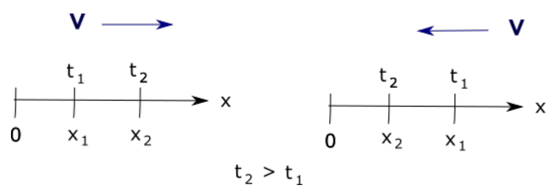

Figura 28:

Vamos determinar os sinais das velocidades médias, v_m, nos dois casos. Começamos pela figura na esquerda.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > 0$$

Usamos agora os dados da imagem na direita.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} < 0$$

Destes dois casos, podemos concluir o seguinte: se um corpo se move segundo uma trajectória rectilínea, a velocidade é positiva quando esse deslocamento se dá no sentido do eixo de referência, e é negativa quando o deslocamente se dá no sentido contrário ao do eixo de referência.

Analisemos agora a figura 29. As duas imagens representam as velocidades, $v(t_1)$, $v(t_2)$, de um corpo que se desloca no sentido do eixo de referência, nos instantes t_1, t_2.

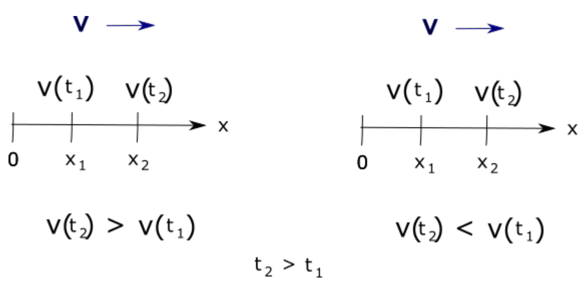

Figura 29:

Na figura da esquerda, a velocidade do corpo aumenta com o tempo. Na figura da direita, a velocidade do corpo diminui com o tempo. Vamos determinar a aceleração média, a_m, nos dois casos. Começamos pela figura na esquerda.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} > 0$$

Usamos agora os dados da imagem na direita.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} < 0$$

Destes dois casos, podemos concluir o seguinte: se um corpo se move segundo uma trajectória rectilínea no sentido do eixo de referência, então a aceleração é positiva se a velocidade aumenta com o tempo, e é negativa se a velocidade diminui com o tempo.

Analisemos agora a figura 30. As duas imagens representam as velocidades, $v(t_1)$, $v(t_2)$, de um corpo que se desloca no sentido contrário ao do eixo de referência, nos instantes t_1, t_2.

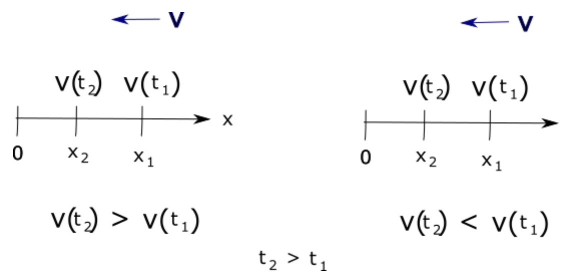

Figura 30:

Na figura da esquerda a velocidade do corpo aumenta (em módulo) com o tempo e tem sinal negativo por o deslocamento se dar no sentido contrário ao eixo de referência. Na figura da direita a velocidade do corpo diminui (em módulo) com o tempo e tem sinal negativo, por o deslocamento se dar no sentido contrário ao eixo de referência. Vamos determinar a aceleração média, a_m nos dois casos. Começamos pela figura na esquerda.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} < 0$$

Notar que $v(t_2) < v(t_1)$, porque as duas velocidades têm sinal negativo, sendo $v(t_2)$ a maior em módulo. Usamos agora os dados da imagem na direita.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} > 0$$

Destes dois casos podemos concluir o seguinte: se um corpo se move segundo uma trajectória rectilínea, no sentido contrário ao do eixo de referência, a aceleração é negativa se a velocidade aumenta em módulo com o tempo e é positiva se a velocidade diminui em módulo com o tempo.

Dos casos acima estudados podemos concluir que o sinal da aceleração é o sinal da força aplicada: (i) se um corpo que executa um movimento rectilíneo sofre um aumento do módulo da sua velocidade, então é porque lhe foi aplicada uma força com o sentido do seu deslocamento; (ii) se o corpo sofre uma diminuição do módulo da velocidade, então é porque lhe foi aplicada uma força com o sentido oposto ao do seu deslocamento. Seja qual for o sentido de deslocamento do corpo, a força que lhe é aplicada é positiva se tem o sentido do eixo de referência, e é negativa se tem o sentido oposto ao do eixo de referência. Se a velocidade e a aceleração têm o mesmo sinal, o movimento do corpo diz-se acelerado (o módulo da velocidade aumenta com o tempo). Se a velocidade e a aceleração têm sinais opostos, o movimento do corpo diz-se retardado (o módulo da velocidade diminui com o tempo).

2.14 Exercícios

Exercício 45. Resolver as equações diferenciais lineares.

$(a)\ y'' - 2y = 0$ $\qquad (b)\ -3y'' + y' = 2e^x$ $\qquad (c)\ -y'' + 2y' - 3y = 3cos(x)$

$(d)\ y'' + y = sin(x)$ $\qquad (e)\ y'' + y = e^{-2x},$ $\qquad (f)\ y'' + y = 5sin(x) - 4e^{-2x}$

Exercício 46. O problema de valor inicial de segunda ordem

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t),\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,$$

formaliza a posição da massa de um sistema massa-mola-amortecedor. A massa, quando se move, segue uma trajetória linear.
(a) Quais as unidades de b e de k?; (b) Resolver o pvi de segunda ordem, se for $f(t) = 2t$, $m = 1$, $b = 0$, $k = 1$. No instante $t = 3\ s$, a massa encontra-se à esquerda ou à direita do ponto $x = 0$?

Exercício 47. Considerar a ED $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = f(t)$.

(a) Resolver a ED homogénea associada.

(b) Se for $f(t) = sen(2t)$, obter a solução geral da ED. Escrever duas soluções particulares da ED.

Exercício 48. O problema de valor inicial de segunda ordem

$$\begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$$

formaliza um sistema massa-mola-amortecedor, sendo $x(t)$ a posição da massa, em metros, t o tempo, em segundos, e $f(t)$ uma força, em newtons, que actua sobre a massa. A massa move-se em linha reta.

(a) Quais as unidades de b e de $\dot{x}$.

(b) Esboçar o gráfico da função $f(t) = 2sin(3t)$.

(c) Resolver o pvi de segunda ordem, se for $f(t) = 2sin(3t)$, $m = 1$, $b = 0$, $k = 1$. Em que sentido se move a massa no instante $t = 1\ s$?

Exercício 49. A ED $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = f(t)$ formaliza um sistema massa-mola-amortecedor.

(a) Considerar o caso não forçado ($f(t) = 0$). Mostrar que o sistema é oscilante e determinar a frequência angular do movimento da massa.

(b) Se for $f(t) = cos(2t)$, obter uma solução particular do sistema, sendo $x(0) = 0$ e $\dot{x} = 0$. Qual a frequência angular da oscilação forçada? Por que é esta frequência diferente da calculada na alínea anterior?

Exercício 50. Dada a função

$$f(t) = 2sin(bt),$$

calcular b para cada um dos três casos seguintes: (a) Frequência angular do sinal: $\omega = 5\ rad/s$; (b) frequência do sinal: $f = 100\ Hz$; (c) Período do sinal: $T = 0.25\ s$. Em cada um dos casos calcular ω, f, T e fazer um esboço do gráfico da função.

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, N. Piskounov.

2. *Elementary Differential Equations*, William F. Trench (free download - link).

Créditos

A mola usada nas figuras deste texto foi retirada do endereço www.pngitem.com.