

Capítulo 3. Transformadas da Laplace – Parte 1

- Definição de transformada de Laplace
 - Linearidade do operador $\mathcal{L}$
 - Anexo: Integrais impróprios
 - Exercícios
-

As equações diferenciais lineares com coeficientes constantes são usadas para descrever a variação com o tempo de certas grandezas, como correntes e tensões em circuitos eléctricos, posições de massas em sistemas mecânicos oscilantes, fluxos de calor através de materiais, etc. Estas equações vêm, geralmente, acompanhadas de condições iniciais que descrevem o estado do sistema num certo instante, por exemplo $t = 0$. O problema de encontrar a solução duma equação diferencial, que satisfaz certas condições iniciais, designa-se por *problema de valor inicial*.

Uma técnica poderosa para resolver estes problemas recorre ao *Método das Transformadas de Laplace*, que transforma uma equação diferencial com incógnita $x(t)$, por exemplo, numa equação algébrica com incógnita $X(s)$, por meio da *transformada directa de Laplace*. A *transformada inversa de Laplace* da solução $X(s)$ da equação algébrica, fornece a solução $x(t)$ do problema. Este método é especialmente vantajoso quando se trata de sistemas forçados e a formalização matemática dos termos não-homogéneos envolve funções do tipo *degrau de Heaviside* ou distribuições do tipo *delta de Dirac*.

3.1 Definição de Transformada de Laplace

Definição . Se $f(t)$ é uma função real da variável $t > 0$ e s é um parâmetro complexo, a transformada de Laplace de $f(t)$ representa-se por $F(s)$, ou $\mathcal{L}(f(t))$, e define-se da forma

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

sempre que o limite existe. Se o limite não existe, então não existe transformada de Laplace da função $f(t)$. O conjunto dos valores de s para os quais $F(s)$ existe, diz-se domínio de $F(s)$.

Transformadas de Laplace de algumas funções elementares**Exemplo 1.** Determinar transformada de Laplace da função

$$f(t) = 0.$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}(0) = \int_0^{\infty} 0 \times e^{-st} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 0 dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} C \Big|_0^b \\ &= 0 \end{aligned}$$

A transformada é válida para qualquer valor de s .**Exemplo 2.** Determinar transformada de Laplace da função

$$f(t) = 1.$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-sb} - 1}{-s} \\ &= \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

Notar que a transformada é válida apenas se a parte real de $s = \alpha + i\omega$ for positiva ($\sigma > 0$), de modo a termos

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(\sigma+i\omega)b} = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\sigma b} e^{-i\omega b} = 0.$$

Caso contrário, o $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\sigma b} e^{-i\omega b}$ não existe. De facto, se $\operatorname{Re}(s) = \sigma = 0$, então este limite reduz-se a $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-i\omega b}$, que não existe, uma vez que $e^{-i\omega b} = \cos(\omega b) + i\sin(\omega b)$ e esta expressão não tem limite quando $b \rightarrow \infty$ (as partes real e imaginária oscilam indefinidamente) e o integral impróprio diverge. Se $\operatorname{Re}(s) = \sigma < 0$, então $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\sigma b} = \infty$ e o integral impróprio é divergente.

Exemplo 3. Determinar transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{rt}, \quad r \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}(e^{rt}) = \int_0^\infty e^{rt} e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(r-s)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{(r-s)t}}{r-s} \right|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{(r-s)b} - 1}{r-s} \\ &= \frac{-1}{r-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(r) \\ &= \frac{1}{s-r}. \end{aligned}$$

Notar que a transformada é válida apenas se for $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(r)$, de modo a termos

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{(r-s)b} = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(\operatorname{Re}(r)-\sigma)b} e^{i(\operatorname{Im}(r)-\omega)b} = 0$$

sendo $\operatorname{Re}(r)$ e $\operatorname{Im}(r)$, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de r . Como fica mostrado nos exemplos acima, a parte real do parâmetro s é usada para fazer convergir o integral (1). O conjunto de valores de s para os quais o integral converge diz-se **região de convergência** da transformada.

Linearidade do operador $\mathcal{L}$

A **propriedade da linearidade** é uma das propriedades mais importantes do operador $\mathcal{L}$.

Linearidade. Se $\mathcal{L}(f(t))$ e $\mathcal{L}(g(t))$ existem ambas para $\operatorname{Re}(s) > \gamma$, e c_1, c_2 são duas constantes arbitrárias, então

$$\mathcal{L}(c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 \mathcal{L}(f(t)) + c_2 \mathcal{L}(g(t)),$$

para $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.

O operador $\mathcal{L}$ herda esta propriedade do operador de integração usado na sua definição.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_1 f(t) + c_2 g(t)) &= \int_0^\infty (c_1 f(t) + c_2 g(t)) e^{-st} dt = c_1 \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt + c_2 \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \\ &= c_1 \mathcal{L}(f(t)) + c_2 \mathcal{L}(g(t)) \end{aligned}$$

Exercício 55. Determinar transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos(\omega t).$$

Resolução. Usando a fórmula de Euler $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, podemos escrever

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Podemos agora usar a linearidade do operador $\mathcal{L}$ e a transformada da função exponencial já calculada.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos(\omega t)) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}(e^{i\omega t}) + \mathcal{L}(e^{-i\omega t})) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right), \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{s - i\omega}{s^2 + \omega^2}\right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

■

Exercício 56. Determinar transformada de Laplace da função

$$f(t) = \sin(\omega t).$$

Resolução. Usando a fórmula de Euler podemos escrever

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Podemos agora usar a linearidade do operador $\mathcal{L}$ e a transformada da função exponencial.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin(\omega t)) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2i}(\mathcal{L}(e^{i\omega t}) - \mathcal{L}(e^{-i\omega t})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{s - i\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\
&= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0
\end{aligned} \tag{3}$$

■

Exercício 57. Determinar transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{at} \sin(\omega t).$$

Resolução. Usando a fórmula de Euler podemos escrever

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Podemos agora usar a linearidade do operador $\mathcal{L}$ e a transformada da função exponencial.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{at} \sin(\omega t)) &= \mathcal{L} \left(e^{at} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \mathcal{L} \left(e^{(a+i\omega)t} - e^{(a-i\omega)t} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\mathcal{L}(e^{(a+i\omega)t}) - \mathcal{L}(e^{(a-i\omega)t}) \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - (a + i\omega)} - \frac{1}{s - (a - i\omega)} \right), \quad \operatorname{Re}(s) > a \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{(s - a) - i\omega} - \frac{1}{(s - a) + i\omega} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \frac{(s - a) + i\omega - ((s - a) - i\omega)}{(s - a)^2 + \omega^2} \\
&= \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

■

Podemos construir uma pequena tabela com as transformadas de Laplace já calculadas.

t	$\mathcal{L}$	s
0	$\longrightarrow$	0
1	$\longrightarrow$	$\frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$e^{rt}, r \in \mathbb{C}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{s-r}, \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(r)$
$\sin(\omega t)$	$\longrightarrow$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\longrightarrow$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\longrightarrow$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}, \operatorname{Re}(s) > a$

3.2 Anexo

Integrais impróprios

Consideremos o problema de calcular a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ e o eixo das abcissas, no intervalo $[1, b]$, com $b \geq 1$ (figura 36). Obtém-se

$$\int_1^b 1/x^2 dx = -1/x \Big|_1^b = -1/b + 1.$$

Se $b = 2$, por exemplo, o valor da área é $-1/2 + 1 = 1/2$, se $b = 5$ o valor da área é $-1/5 + 1 = 4/5$, etc.

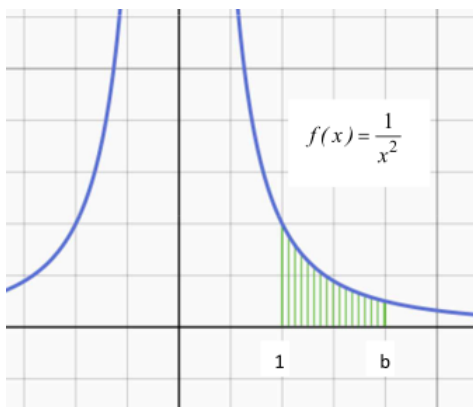


Figura 36:

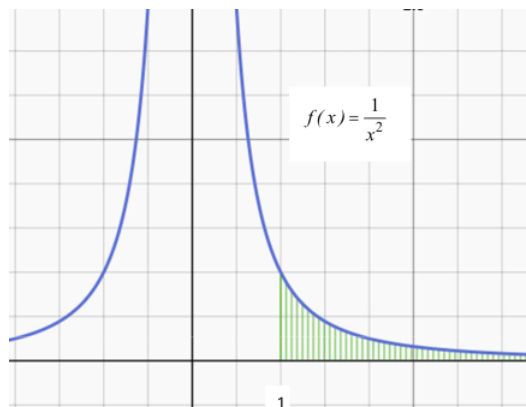


Figura 37:

Tem interesse averiguar como evolui o valor da área se formos aumentando b . Em particular, será finita ou infinita a área obtida quando $b \rightarrow +\infty$? A região correspondente está sombreada na figura 37 e o seu valor é dado pelo limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b 1/x^2 dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-1/b + 1) = 1.$$

Este resultado é curioso porque significa que a região definida pelo gráfico da função e o eixo das abcissas, no intervalo $[1, +\infty[$, apesar de ilimitada, tem área finita. Podemos expressar o integral e a operação de limite na forma mais compacta

$$\int_1^{+\infty} 1/x^2 dx \quad (4)$$

que significa

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b 1/x^2 dx. \quad (5)$$

O integral (4) é exemplo de um **integral impróprio de 1ª espécie**. Quando existe o limite envolvido no seu cálculo, diz-se que o integral **converge**.

Definição. Um integral $\int_a^b f(x)dx$ diz-se integral impróprio de 1ª espécie, se $b = +\infty$, ou $a = -\infty$, ou ambas, sendo $f(x)$ limitada no intervalo $[a, b]$.

O qualificativo “impróprio” dado a este tipo de integrais, refere-se à notação usada para os exprimir. A expressão (4) não representa uma operação de integração comum (como se poderia pensar lendo-a), mas sim uma operação de integração seguida do cálculo de um limite, conforme indicado em (5).

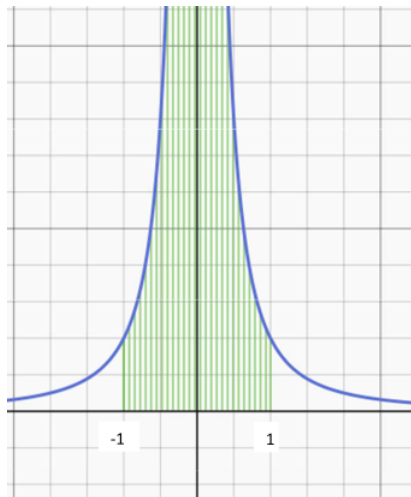


Figura 38:

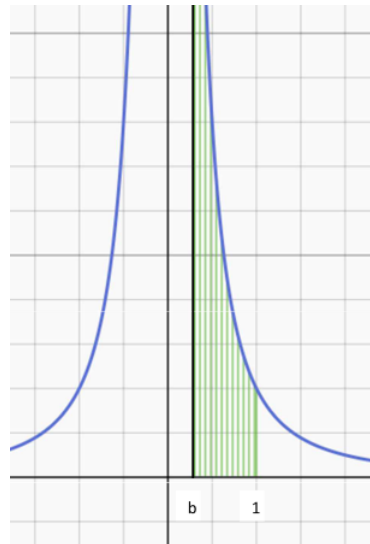


Figura 39:

Consideremos agora o problema de calcular a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ e o eixo das abcissas, no intervalo $[-1, 1]$ (figura 38). Se efectuarmos ‘despreocupadamente’ o cálculo de um integral definido, como fizemos no exemplo anterior, obtemos

$$\int_{-1}^1 1/x^2 dx = -1/x \Big|_{-1}^1 = -1/1 - (-1/(-1)) = -1 - 1 = -2.$$

Este resultado não é o esperado, uma vez que a função é positiva no intervalo $[-1, 1]$, o que significa que o valor do integral deveria ser positivo. O problema com este resultado é o uso **indevido** do teorema fundamental do cálculo, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Este teorema é válido se a função integranda é **limitada** no intervalo de integração.¹ Se tal não acontece, a igualdade que o teorema exhibe pode, ou não, ser válida. Ora a função $1/x^2$ não é *limitada superiormente* em nenhuma vizinhança de $x = 0$, não sendo válida, neste caso, a fórmula $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ num intervalo $[a, b]$ contendo este ponto.

Como calcular o valor duma área numa situação deste tipo? Uma forma de o fazer está sugerida na figura 39. Como $f(x)$ é uma função par, $f(x) = f(-x)$, o integral pode ser escrito na forma $2 \int_0^1 1/x^2 dx$. O problema reduz-se agora ao cálculo do integral $\int_0^1 1/x^2 dx$. Como o ponto $x = 0$ é um ponto de limite infinito da função², calcula-se previamente $\int_b^1 1/x^2 dx$, representando b um valor um pouco maior que

¹Uma função $f(x)$ diz-se *limitada* no intervalo $[a, b]$, se existem dois números reais $c \leq d$ tais que $c \leq f(x) \leq d$, para qualquer valor de $x \in [a, b]$.

²A função $f(x)$ tem *limite infinito* no ponto $x = a$ se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$. A expressão “tem limite” é um abuso de linguagem, já que o limite de uma função num ponto só existe quando o seu valor é um número.

zero.

$$\int_b^1 1/x^2 dx = -1/x \Big|_b^1 = -1 + 1/b$$

Fazendo agora b tender para zero, obtemos:

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 1/x^2 dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} (-1 + 1/b) = +\infty.$$

Verificamos que o integral não pode ser calculado (diz-se que *diverge*), o que é bem diferente de ter o valor negativo obtido acima. A área da região definida pelo gráfico da função e o eixo das abcissas, no intervalo $[-1, 1]$, é infinita.

Definição. Um integral $\int_a^b f(x)dx$, com extremos de integração finitos, em que $f(x)$ tem um limite infinito em algum ponto do intervalo $[a, b]$, diz-se **integral impróprio de 2ª espécie**.

Quando existe o limite envolvido no cálculo de um integral deste tipo, diz-se que o integral **converge**.

Exercício 58. Calcular o integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Resolução. O integral é de 2ª espécie, uma vez que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tem limite infinito no ponto $x = 0$. Temos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 x^{-1/2} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(2x^{1/2} \right) \Big|_b^1 = \lim_{b \rightarrow 0^+} (2 - 2b^{1/2}) = 2.$$

Um integral $\int_a^b f(x)dx$ diz-se **impróprio de 3ª espécie**, se é simultaneamente de 1ª espécie e de 2ª espécie, ou seja, pelo menos um dos limites de integração é infinito e $f(x)$ possui limite infinito em algum ponto do intervalo de integração. ■

3.2.1 Exercícios

Exercício 59. Qualificar os integrais impróprios de 1ª espécie como convergentes ou divergentes. Quando o integral represente uma área, indicar a região do plano correspondente.

$$(a) \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \quad (b) \int_{-\infty}^0 e^x dx \quad (c) \int_1^\infty \frac{1}{x} dx \quad (d) \int_0^\infty e^{-2x} dx$$

Exercício 60. Calcular as transformadas de Laplace das funções usando definição.

$$\begin{array}{lll} (a) f(t) = 2 & (b) f(t) = e^{-2t} & (c) f(t) = 3e^{-2t} \\ (d) f(t) = t/2 & (e) f(t) = t^2 e^{-t} & (f) f(t) = \sin(t + \pi/4) \end{array}$$

Exercício 61. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, calcular a Transformada de Laplace da combinação linear $2f(t) + 3g(t)$.

Exercício 62. Determinar as transformadas de Laplace.

$$(1) \mathcal{L}(2)$$

$$(2) \mathcal{L}(e^{-3t})$$

$$(3) \mathcal{L}(\sqrt{3} - 4e^t)$$

Resolução.

$$(1) \mathcal{L}(2) = 2\mathcal{L}(1) = \frac{2}{s}$$

$$(2) \mathcal{L}(e^{-3t}) = \frac{1}{s - (-3)} = \frac{1}{s + 3}$$

$$(3) \mathcal{L}(\sqrt{3} - 4e^t) = \mathcal{L}(\sqrt{3}) - \mathcal{L}(4e^t) = \sqrt{3}\mathcal{L}(1) - 4\mathcal{L}(e^t) = \frac{\sqrt{3}}{s} - \frac{4}{s - 1}$$

■

Exercício 63. Calcular as transformadas de Laplace das funções usando uma tabela de transformadas.

$$(a) f(t) = 2$$

$$(b) f(t) = e^{-2t}$$

$$(c) f(t) = 3e^{-2t}$$

$$(d) f(t) = t/2$$

$$(e) f(t) = t^2$$

$$(f) f(t) = t^2 e^{-t}$$

$$(g) f(t) = e^{-5t} \sin(8t)$$

$$(h) f(t) = t^3 \cos(6t)$$

$$(i) f(t) = \sin(t + \pi/4)$$

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, N. Piskounov.
2. *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*, Stanley J. Farlow.
3. *Elementary Differential Equations*, William F. Trench (free download - link).
4. *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Joel L. Schiff