Notas das Aulas – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/~mar)

Capítulo 2. Equações Diferenciais – Parte 4

- Resolução de EDs Lineares Não Homogéneas de 2ª Ordem, com Coeficientes Constantes
- Aplicações
  - Sistemas massa-amortecedor-mola
- Anexo
  - Sobre a resolução de EDs lineares de 2ª ordem

2.14 EDLs de 2ª Ordem Completas, com Coeficientes Constantes

Queremos resolver EDs lineares da forma

$$y'' + Ay' + By \;=\; f(x) \tag{1}$$

com A e B constantes e $f(x) \neq 0$.

Os passos para a resolução deste tipo de EDs são os seguintes.

- Determinar a **solução geral, $\mathbf{y_h}$, da ED homogénea** associada $y'' + Ay' + By \;=\; 0$.
  Esta solução tem a forma
  $$y_h \;=\; C_1y_1 + C_2y_2,$$
  sendo y_1, y_2 duas soluções particulares linearmente independentes quaisquer da ED homogénea e C_1, C_2 parâmetros reais.

- Determinar **uma solução particular $\mathbf{y_p}$ qualquer da ED completa (1)**.

- Escrever a solução geral da ED completa (1). A solução geral tem a forma
  $$y \;=\; C_1y_1 + C_2y_2 + y_p, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Já estudámos anteriormente a resolução da ED homogéna. Vamos agora ver como obter uma solução particular, y_p, da ED completa.

2.14.1 Método dos Coeficientes Indeterminados

O método que vamos apresentar para calcular uma solução particular da ED linear completa de 2ª ordem, designa-se por **Método dos Coeficientes Indeterminados**. Este método aplica-se apenas aos casos em que o termo independente $f(x)$ é de um dos tipos

- $f(x) = e^{kx}$;
- $f(x) = sin(\alpha x)$, $f(x) = cos(\alpha x)$;
- $f(x) = p(x)$, sendo $p(x)$ um polinómio,

ou então tem a forma de produtos e somas destas funções, com k e α constantes.[1] No Método dos Coeficientes Indeterminados a forma da solução particular y_p é motivada pela forma do termo não-homogéneo $f(x)$, como a tabela seguinte sugere.

	f(x)	Forma de y_p
1. Exponencial	e^{kx}	$\mathbf{x^n}\left(Re^{kx}\right)$
2. Co-seno, Seno	$cos(\alpha x),\ sin(\alpha x)$	$\mathbf{x^n}\left(Rcos(\alpha x) + Ssin(\alpha x)\right)$
3. Polinómio	$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$	$\mathbf{x^n}\left(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n\right)$

sendo os coeficientes $R, S, A_0, A_1, \cdots, A_n$ constantes a determinar. O parâmetro n pode toma o valor mínimo entre $\{0, 1, 2\}$, que garanta que a solução particular y_p procurada **não é gerada** pela solução geral da ED homogénea associada.

Vamos mostrar como se usa o método, por meio de exemplos.

Caso (i): $f(x) = e^{kx},\ s \in \mathbb{R}$

Exemplo 1. Determinar a solução geral da ED

$$y'' - 2y = e^{3x}.$$

A solução geral da ED homogénea $y'' - 2y = 0$ é $y = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x}$. Como a solução geral da ED homogénea não gera termos da forma Re^{3x}, procuramos uma solução particular com esta forma. Para calcular o valor do coeficiente R, substitui-se a expressão $y = Re^{3x}$ na ED completa e resolve-se esta em

[1] As EDs lineares de 2ª ordem que não sejam desta forma devem ser resolvidas por outros métodos, não existindo um processo geral para a sua resolução (ver Anexo).

ordem a R.

$$\begin{aligned}\left(Re^{3x}\right)'' - 2Re^{3x} = e^{3x} &\Leftrightarrow 9Re^{3x} - 2Re^{3x} = e^{3x}\\ &\Leftrightarrow 7R = 1\\ &\Leftrightarrow R = \frac{1}{7}\end{aligned}$$

A solução particular procurada é $y_p = \frac{e^{3x}}{7}$ (verificar!). A solução geral da ED é

$$y = y_h + y_p = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{7},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2. Determinar a solução geral da ED

$$y'' - 2y \ = \ e^{\sqrt{2}x}.$$

A solução geral da ED homogénea $y'' - 2y = 0$ é $y = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x}$. O termo independente da ED completa é $e^{\sqrt{2}x}$. Neste caso **não** podemos procurar uma solução particular da forma $Re^{\sqrt{2}x}$ porque ela é gerada pela solução geral da ED homogénea (fazendo $C_1 = R,\ C_2 = 0$). Em vez disso, procuramos uma solução particular da forma $y = Rxe^{\sqrt{2}x}$, não gerada pela solução geral da ED homogénea. Substituimos esta expressão na ED completa para determinar o coeficiente R.

$$\begin{aligned}\left(Rxe^{\sqrt{2}x}\right)'' - 2Rxe^{\sqrt{2}x} = e^{3x} &\Leftrightarrow 2\sqrt{2}Re^{\sqrt{2}x} + 2Rxe^{\sqrt{2}x} - 2Rxe^{\sqrt{2}x} = e^{\sqrt{2}x}\\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{2}R = 1\\ &\Leftrightarrow R = \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

A solução particular procurada é $y_p = \frac{xe^{\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}}$ (verificar!). A solução geral da ED é

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} + \frac{xe^{\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3. Determinar uma solução particular da ED

$$y'' + 2y' + y \ = \ e^{-x}.$$

A solução geral da ED homogénea $y'' + 2y' + y = 0$ é $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$. O termo independente da ED completa é e^{-x}. Neste caso **não** podemos procurar uma solução particular da forma Re^{-x}, ou da forma Rxe^{-x} porque ambas são geradas pela solução geral da ED homogénea. Em vez disso, procuramos uma solução particular da forma $y = Rx^2e^{-x}$. Substituimos esta função na ED completa para determinar o coeficiente R.

$$
\begin{aligned}
& \left(Rx^2e^{-x}\right)'' + 2\left(Rx^2e^{-x}\right)' + Rx^2e^{-x} = e^{-x} \\
\Leftrightarrow\ & \left(Rx^2e^{-x} - 4Rxe^{-x} + 2Re^{-x}\right) + 2\left(2Rxe^{-x} - Rx^2e^{-x}\right) + Rx^2e^{-x} = e^{-x} \\
\Leftrightarrow\ & 2Re^{-x} = e^{-x} \\
\Leftrightarrow\ & R = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

A solução particular procurada é $y_p = \frac{x^2e^{-x}}{2}$ (verificar!). A solução geral da ED é

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{x^2e^{-x}}{2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Casos (ii), (iii): $f(x) = sin(\alpha x), \quad f(x) = cos(\alpha x)$

Exemplo 4. Resolver a ED

$$y'' - 2y' + y \;=\; sin(2x). \tag{2}$$

A solução geral da ED homogénea $y'' - 2y' + y = 0$ é $y = C_1e^x + C_2xe^x$.

Como a solução geral da ED homogénea não gera termos da forma $Rcos(2x)$ ou $Ssin(2x)$, podemos procurar uma solução particular com a forma $Rcos(2x) + Ssin(2x)$. Para calcular o valor dos coeficientes R, S, substitui-se a expressão $y = Rcos(2x) + Ssin(2x)$ na ED completa.

$$
\begin{aligned}
& (Rcos(2x) + Ssin(2x))'' - 2\,(Rcos(2x) + Ssin(2x))' + (Rcos(2x) + Ssin(2x)) = sin(2x) \\
\Leftrightarrow\ & (-4Rcos(2x) - 4Ssin(2x)) - 2\,(-2Rsin(2x) + 2Scos(2x)) + (Rcos(2x) + Ssin(2x)) = sin(2x) \\
\Leftrightarrow\ & (-3R - 4S)\,cos(2x) + (4R - 3S)\,sin(2x) = sin(2x) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -3R - 4S = 0 \\ 4R - 3S = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 4/25 \\ S = -3/25 \end{cases}
\end{aligned}
$$

A solução particular procurada é $y_p = \frac{4}{25}cos(2x) - \frac{3}{25}sin(2x)$ (verificar!). A solução geral da ED é

$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{4}{25}cos(2x) - \frac{3}{25}sin(2x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5. Resolver a ED

$$y'' + 9y \;=\; sin(3x). \tag{3}$$

A solução geral da ED homogénea $y'' + 9y = 0$ é $y = C_1cos(3x) + C_2sin(3x)$. O termo independente da

ED completa é $sin(3x)$. Neste caso **não** podemos procurar uma solução particular da forma $Rcos(3x) + Ssin(3x)$ porque a solução geral da ED homogénea gera funções deste tipo. Em vez disso, procuramos uma solução particular da forma $y = x\,(Rcos(3x) + Ssin(3x))$, que não é gerada pela solução geral da ED homogénea. Substituimos esta função na ED completa para determinar os coeficientes R, S.

$$\begin{aligned}
& (x\,(Rcos(3x) + Ssin(x)))'' + 9\,(Rcos(3x) + Ssin(3x)) = sin(3x) \\
\Leftrightarrow\ & (-9xRcos(3x) - 9xSsin(3x) - 6Rsin(3x) + 6Scos(3x)) + 9\,(Rxcos(3x) + Sxsin(3x)) = sin(3x) \\
\Leftrightarrow\ & -6Rsin(3x) + 6Scos(3x) = sin(3x) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -6R = 1 \\ 6S = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R = -\frac{1}{6} \\ S = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

A solução particular procurada é $y_p = -\frac{xcos(3x)}{6}$ (verificar!). A solução geral da ED é

$$y = y_h + y_p = C_1cos(3x) + C_2sin(3x) - \frac{xcos(3x)}{6}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 6. Determinar uma solução particular da ED

$$y'' + 9y \ = \ e^{-2x}cos(3x). \tag{4}$$

A solução geral da ED homogénea $y''+9y = 0$ é $y = C_1cos(3x)+C_2sin(3x)$. O termo independente da ED completa é $e^{-2x}cos(3x)$. Vamos determinar uma solução particular da forma $y = e^{-2x}\,(Rcos(3x) + Ssin(3x))$, que não é gerada pela solução geral da ED homogénea. Substituimos esta função na ED completa para determinar os coeficientes R, S.

$$\begin{aligned}
& \left(e^{-2x}\,(Rcos(3x) + Ssin(3x))\right)'' + 9e^{-2x}\,(Rcos(3x) + Ssin(3x)) = e^{-2x}cos(3x) \\
\Leftrightarrow\ & \left(e^{-2x}\,(-5Rcos(3x) + 12Rsin(3x) - 5Ssin(3x) - 12Scos(3x))\right) + 9e^{-2x}\,(Rcos(3x) + Ssin(3x)) = e^{-2x}cos(3x) \\
\Leftrightarrow\ & cos(3x)\,(-4R - 12R)) + sin(3x)\,(12R + 4S) = cos(3x) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 4R - 12S = 1 \\ 12R + 4S = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R = \frac{1}{40} \\ S = -\frac{3}{40} \end{cases}
\end{aligned}$$

A solução particular procurada é $y_p = e^{-2x}\left(\frac{cos(3x)}{40} - \frac{3sin(3x)}{40}\right)$ (verificar!).

Caso (iv):

$f(x)$ é um polinómio na variável x.

Exemplo 7. Determinar uma solução particular da ED

$$y'' + 2y' + y \;=\; 3x^2 + 2x + 1. \tag{5}$$

A solução geral da ED homogénea $y'' + 9y = 0$ é $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. O termo independente da ED completa é $3x^2+2x+1$. Não é possível gerar **nenhuma parcela** desta expressão a partir da solução geral da ED homogénea. Vamos determinar uma solução particular da forma $y = Ax^2+Bx+C$. Substituimos esta função na ED completa para determinar os coeficientes $A,\ B,\ C$.

$$\begin{aligned}
&\left(Ax^2+Bx+C\right)'' + 2\left(Ax^2+Bx+C\right)' + \left(Ax^2+Bx+C\right) = 3x^2+2x+1\\
\Leftrightarrow\ & (2A) + 2(2Ax+B) + \left(Ax^2+Bx+C\right) = 3x^2+2x+1\\
\Leftrightarrow\ & Ax^2 + (4A+B)\,x + (2A+2B+C) = 3x^2+2x+1\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} A = 3\\ 4A+B = 2\\ 2A+2B+C = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3\\ B = -10\\ C = 15\end{cases}
\end{aligned}$$

A solução particular procurada é $y_p = 3x^2 - 10x + 15$ (verificar!).

Exemplo 8. Determinar uma solução particular da ED

$$y'' + 2y' \;=\; 3x^2 + 2x + 1. \tag{6}$$

A solução geral da ED homogénea $y'' + 2y' = 0$ é $y = C_1 + C_2 e^{-2x}$. O termo independente da ED completa é $3x^2 + 2x + 1$. O termo 1 desta expressão é gerado pela solução geral da ED homogénea (fazendo $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$). Por isso, a solução particular não pode ter a forma $Ax^2 + Bx + C$. Vamos antes determinar uma solução particular da forma $y = x(Ax^2+Bx+C)$, que não possui **nenhum termo** gerado pela solução geral da ED homogénea. Substituimos esta função na ED completa para determinar os coeficientes $A,\ B,\ C$.

$$\begin{aligned}
&\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)'' + 2\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)' = 3x^2+2x+1\\
&(6Ax+2B) + 2\left(3Ax^2+2Bx+C\right) = 3x^2+2x+1\\
\Leftrightarrow\ & 6Ax^2 + (6A+4B)\,x + (2B+2C) = 3x^2+2x+1\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 6A = 3\\ 6A+4B = 2\\ 2B+2C = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}\\ B = -\frac{1}{4}\\ C = \frac{3}{4}\end{cases}
\end{aligned}$$

A solução particular procurada é $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ (verificar!).

2.15 Aplicações

Sistema Massa-Mola Forçado, não Amortecido

A figura 31 representa um sistema massa-mola não amortecido, atuado pela força externa $f(t)$. A constante da mola é k (Newton/metro) e a massa é m (kg). Quando $f(t) > 0$ a força é exercida na direcção e sentido do eixo dos x. Quando $f(t) < 0$ a força é exercida na direcção do eixo dos x, mas com o sentido oposto ao do eixo. Supõe-se que a massa da mola é nula e despreza-se atrito da massa com a superfície em que ela desliza. Supõe-se também que o comportamento da mola é descrito pela *Lei de Hooke*, $F_{mola} = -kx$.

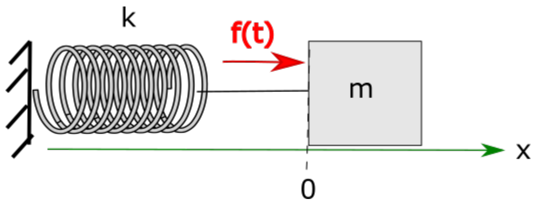

Figura 31: Sistema massa-mola forçado, não amortecido.

Pretendemos determinar a **lei do movimento da massa**, $x(t)$, supondo que $t = 0$ corresponde ao momento em que começamos a observar o sistema. Usamos a 2ª Lei de Newton para obter a **equação do movimento** da massa ($\ddot{x}$ representa a aceleração da massa; F representa a soma das forças exercidas sobre ela).

$$\begin{aligned} F &= ma \\ \Leftrightarrow \quad -kx + f(t) &= m\ddot{x} \\ \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + kx &= f(t) \end{aligned}$$

A lei do movimento da massa, $x(t)$, é uma solução desta ED linear não homogénea de 2ª ordem.

Exercício 51. Suponhamos que $k = 4\ N/m$, $m = 1\ kg$, $f(t) = 1\ N$. Seja também $x(0) = 1\ m$ e $\dot{x}(0) = 0\ m/s$, isto é, no instante inicial a massa está na posição $x = 1$ e tem velocidade nula. O problema a resolver para determinar $x(t)$ é o *problema de valor inicial de 2ª ordem*

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x = 1 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Resolução.

1. Resolver a equação diferencial.

   - Resolver a ED homogénea $\ddot{x} + 4x \;=\; 0$

     A solução geral da ED homogénea é (verificar!)

     $$x(t) \;=\; C_1 cos(2t) + C_2 sin(2t),\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   - Determinar uma solução particular da ED completa.

     O termo independente é $f(t) = 1$ e **não é** gerado pela solução geral da ED homogénea. Por ser um polinómio de grau zero, procuramos uma solução particular da forma $x_p = A$. Substituimos esta função na ED completa para determinar o coeficiente A.

     $$\begin{aligned} &(A)'' + 4\,(A) = 1 \\ \Leftrightarrow\;& 4A = 1 \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

     A solução particular procurada é $x_p = \frac{1}{4}$ (verificar!).

   - Escrever a solução geral da ED completa.

     A solução geral da ED é

     $$x = x_h + x_p = C_1 cos(2t) + C_2 sin(2t) + \frac{1}{4},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Determinar os valores dos parâmetros $C_1,\; C_2$, usando as condições iniciais do problema.

   Usar $x(0) = 1$

   $$\begin{aligned} & x(0) = 1 \\ \Leftrightarrow\;& C_1 cos(0) + C_2 sin(0) + \frac{1}{4} = 1 \\ \Leftrightarrow\;& C_1 + \frac{1}{4} = 1 \\ \Leftrightarrow\;& C_1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

   Depois deste cálculo a expressão de $x(t)$ fica

   $$x(t) = \frac{3}{4} cos(2t) + C_2 sin(2t) + \frac{1}{4}.$$

   A derivada $\dot{x}(t)$, necessária para usar a segunda condição inicial, é

   $$\dot{x}(t) = -\frac{3}{2} sin(2t) + 2C_2 cos(2t).$$

Calculamos agora C_2.

$$\text{Usar } \dot{x}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} & \dot{x}(0) = 0 \\ \Leftrightarrow \; & -\frac{3}{2}sin(0) + 2C_2cos(0) = 0 \\ \Leftrightarrow \; & 2C_2 = 0 \\ \Leftrightarrow \; & C_2 = 0 \end{aligned}$$

3. Escrever a solução do pvi.

$$x(t) = \frac{3}{4}cos(2t) + \frac{1}{4}.$$

O gráfico desta função está representado na figura 32. Esta função é periódica com período $T = \pi$. ■

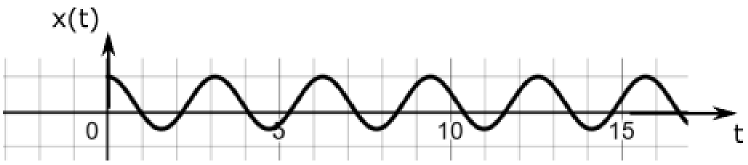

Figura 32:

Exercício 52. Suponhamos que $k = 4\ N/m$, $m = 1\ kg$, $f(t) = sin(3t)\ N$. Seja também $x(0) = 1\ m$ e $\dot{x}(0) = 0\ m/s$, isto é, a massa é largada da posição $x = 1$ e tem velocidade inicial nula. O problema a resolver para determinar $x(t)$ é o *problema de valor inicial de 2ª ordem*

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x &= sin(3t) \\ x(0) &= 1 \\ \dot{x}(0) &= 0. \end{cases}$$

Resolução.

1. Resolver a equação diferencial.

   - Resolver a ED homogénea $\ddot{x} + 4x = 0$

     A solução geral da ED homogénea é

     $$x(t) = C_1cos(2t) + C_2sin(2t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   - Determinar uma solução particular da ED completa.

     O termo independente é $f(t) = sin(3t)$. Procuramos uma solução particular da forma $x_p = Rcos(3t) + Ssin(3t)$, que **não é** gerada pela solução geral da ED homogénea. Substituimos a função na ED completa para determinar os coeficientes $R,\ S$.

$$\begin{aligned}
&(Rcos(3t) + Ssin(3t))'' + 4\,(Rcos(3t) + Ssin(3t)) = sin(3t)\\
\Leftrightarrow\ &(-9R\cos(3t) - 9S\sin(3t)) + 4\,(Rcos(3t) + Ssin(3t)) = sin(3t)\\
\Leftrightarrow\ &-5R\cos(3t) - 5S\sin(3t)R = sin(3t)\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}-5R = 0\\ -5S = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}R = 0\\ S = -\frac{1}{5}\end{cases}
\end{aligned}$$

A solução particular procurada é $x_p = -\frac{sin(3t)}{5}$ (verificar!).

- Escrever a solução geral da ED completa.

  A solução geral da ED é

$$y = y_h + y_p = C_1cos(2t) + C_2sin(2t) - \frac{sin(3t)}{5},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Determinar os valores dos parâmetros $C_1,\ C_2$, usando as condições iniciais do problema.

   Usar $x(0) = 1$

$$\begin{aligned}
&x(0) = 1\\
\Leftrightarrow\ &C_1cos(0) + C_2sin(0) - \frac{sin(0)}{5} = 1\\
\Leftrightarrow\ &C_1 = 1
\end{aligned}$$

   Depois deste cálculo a solução geral fica

$$x(t) = cos(2t) + C_2sin(2t) - \frac{sin(3t)}{5}.$$

   A derivada $\dot{x}(t)$, necessária para usar a segunda condição inicial, é

$$\dot{x}(t) = -2sin(2t) + 2C_2cos(2t) - \frac{3cos(3t)}{5}.$$

Calculamos agora C_2.

Usar $\dot{x}(0) = 0$

$$\begin{aligned} & \dot{x}(0) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -2sin(0) + 2C_2cos(0) - \frac{3cos(0)}{5} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2C_2 - \frac{3}{5} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & C_2 = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

3. Escrever a solução do pvi.

$$x(t) = cos(2t) + \frac{3}{10}sin(2t) - \frac{sin(3t)}{5}.$$

O gráfico desta função está representado na figura 33. Esta função é periódica com período $T = 2\pi$, porque este é o menor valor possível que é, simultanemente, um **múltiplo inteiro** dos períodos de $cos(2t)$, $sin(2t)$ e $sin(3t)$. Notar que

- $T_1 = 2\pi/3$ é o **período principal** (o menor período) de $sin(3t)$;

- $T_2 = \pi$ é o **período principal** de $cos(2t)$ e de $sin(2t)$;

■

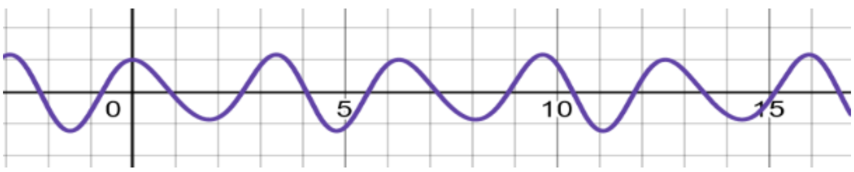

Figura 33:

Exercício 53. Verificar que a solução do *problema de valor inicial de 2ª ordem*

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2x &= sin(2t) \\ x(0) &= 1 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases}$$

é

$$x(t) \ = \ \cos(2t) + \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{t\cos(2t)}{4}.$$

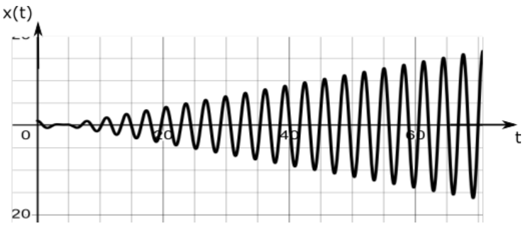

Figura 34:

O gráfico desta função está representado na figura 34. A função cresce sem limite com o tempo, por causa do termo $-tcos(2t)/4$. Isto deve-se ao facto de a frequência do termo forçador $sin(2t)$ na ED ser igual à frequência natural do sistema, ambas valendo $2rad/s$. Quando este fenómeno acontece diz-se que o sistema massa-mola está em **ressonância** com a força externa.

Exercício 54. Verificar que a solução do *problema de valor inicial de 2ª ordem*

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2x &= sin(3t) \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 1 \end{cases}$$

é

$$x(t) \;=\; \frac{2}{7}cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}sin(\sqrt{2}t) - \frac{2}{7}cos(3t).$$

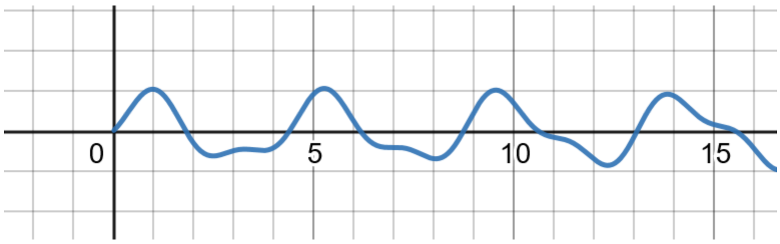

Figura 35: Resposta do sistema massa-mola forçado, não amortecido.

O gráfico desta função está representado na figura 35. Esta função não é periódica (porquê?), o que significa que em cada vai-vem a massa tem um comportamento diferente do que teve no vai-vem anterior.

2.15.1 Anexo

Não existe um método geral de resolução de EDs lineares de 2ª Ordem (nem de ordens superiores)

$$y'' + b(x)y' + c(x)y \ = \ f(x). \tag{7}$$

Temos vindo a estudar processos de resolução de casos específicos destas EDs.

- Resolvemos EDs do tipo (7) em que $f(x) \equiv 0$, e $b(x)$ e $c(x)$ são constantes.
- Resolvemos EDs do tipo (7) em que $b(x)$ e $c(x)$ são constantes e $f(x)$ é uma função exponencial, ou uma função sinusoidal, ou um polinómio, ou uma combinação linear de termos destes tipos, ou de produtos de termos destes tipos.

Na bibliografia indicada podem encontrar-se os enunciados, as demonstrações e exemplos de dois métodos de resolução de EDs do tipo (7), mas que requerem o conhecimento prévio de algumas soluções.

- *Método da Variação de Parâmetros*: permite resolver EDs do tipo (7), com coeficientes não constantes, desde que sejam conhecidas previamente duas soluções particulares, linearmente independentes, da ED homogénea associada.
- *Método da Redução de Ordem*: permite resolver EDs lineares homogéneas de 2ª ordem, com coeficientes não constantes, desde que seja conhecida previamente **uma** solução particular da ED homogénea. O método permite determinar outra solução da ED homogénea, linearmente independente da primeira. Uma vez tendo estas duas soluções, podemos escrever a solução geral da ED homegénea e usar a Variação de Parâmetros para determinar uma solução particular da ED completa.

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol II, N. Piskounov.
2. *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*, Stanley J. Farlow.
3. *Elementary Differential Equations*, William F. Trench (free download - link).

Créditos

A mola usada nas figuras deste texto foi retirada do endereço www.pngitem.com.