

Capítulo 2. Equações Diferenciais – Parte 2

- Equações diferenciais lineares de primeira ordem
 - Princípios de Sobreposição para EDs Lineares
 - Problemas de Valor Inicial de 1ª Ordem
 - Teorema de Picard
 - Sobre os domínios de validade das soluções das EDs
 - Aplicações
 - Quantidade de sal num tanque
 - Corrente eléctrica num circuito RL
-

2.4 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Uma equação diferencial linear de primeira ordem é da forma

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1)$$

sendo y a função incógnita, x a variável independente, e $p(x), q(x)$ expressões que não contêm a variável y . Se $q(x) \equiv 0$ a ED diz-se *homogénea*. De contrário, diz-se *não homogénea* ou *completa*.

Exemplos 1. Equações diferenciais lineares de primeira ordem.

1)

$$\begin{aligned} 2y' + 3xy &= e^x \\ \Leftrightarrow y' + \frac{3}{2}xy &= \frac{e^x}{2} \\ p(x) &= \frac{3}{2}x \quad q(x) = \frac{e^x}{2} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} 2y' + 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow y' + y &= 0 \\ p(x) &= 1 \quad q(x) = 0 \end{aligned}$$

3)

$$-e^x y - 2xy' + \operatorname{sen}(x) = 7y$$

$$\Leftrightarrow y' + \frac{e^x + 7}{2x} y = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x}$$

$$p(x) = \frac{e^x + 7}{2x} \quad q(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x}$$

Exemplos 2. EDs de primeira ordem, não lineares. As seguintes EDs de primeira ordem não são lineares. Porquê?

$$1) \quad y' + xy^2 = e^x$$

$$2) \quad (y')^{1/2} + xy = -2$$

$$3) \quad yy' + 2x = 0$$

2.4.1 Resolução de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

A solução geral de uma ED linear de primeira ordem, escreve-se como a soma da solução geral da ED homogénea associada e de uma solução particular qualquer da ED completa. Como exemplo, vamos resolver a ED

$$2y' + xy = 2x. \quad (2)$$

A resolução segue os passos seguintes.

1. Verificar que a ED é linear de primeira ordem.

$$2y' + xy = 2x$$

$$\Leftrightarrow y' + \frac{x}{2}y = x \quad (3)$$

A ED está na forma (1), com $p(x) = x/2$ e $q(x) = x$.

2. Resolver a ED homogénea associada.

$$y' + \frac{x}{2}y = 0.$$

Esta é uma ED de variáveis separáveis, cujo método de resolução já estudámos.

$$\begin{aligned}
 y' + \frac{x}{2}y &= 0 \\
 \Leftrightarrow y' &= -\frac{x}{2}y \\
 \Leftrightarrow_{y \neq 0} \frac{1}{y}dy &= -\frac{x}{2}dx \\
 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy &= \int -\frac{x}{2}dx \\
 \Leftrightarrow \ln|y| &= -\frac{x^2}{4} + C_1 \\
 \Leftrightarrow |y| &= e^{-\frac{x^2}{4} + C_1} \\
 \Leftrightarrow y &= \pm e^{C_1} e^{-\frac{x^2}{4}} \\
 \Leftrightarrow y_h &= C e^{-\frac{x^2}{4}}, C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

A família de funções y_h , com parâmetro C , é a solução geral da ED homogénea associada.

3. Determinar uma solução particular da ED completa (3).

Por inspecção, podemos verificar que $y = 2$ é uma solução particular da ED completa. Mas estamos interessados em descrever um processo sistemático para obter uma solução particular. Para tal usamos o *método de variação do parâmetro*. Este método consiste em substituir C por uma função de x desconhecida, $u(x)$, na solução geral da ED homogénea.

$$y = u(x)e^{-\frac{x^2}{4}}. \tag{5}$$

De seguida substitui-se esta função na ED completa (3), obtendo-se uma ED na variável u . Determinando u , obtemos uma solução particular da equação diferencial na forma (5).

$$\begin{aligned}
 \left(u(x)e^{-x^2/4}\right)' + \frac{x}{2}\left(u(x)e^{-x^2/4}\right) &= x \\
 \Leftrightarrow u'(x)e^{-x^2/4} + u(x)\left(e^{-x^2/4}\right)' + \frac{x}{2}u(x)e^{-x^2/4} &= x \\
 \Leftrightarrow u'(x)e^{-x^2/4} - \frac{x}{2}u(x)e^{-x^2/2} + \frac{x}{2}u(x)e^{-x^2/2} &= x \\
 \Leftrightarrow u'(x)e^{-x^2/4} &= x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow u'(x) &= xe^{x^2/4} \\
 \Leftrightarrow u(x) &= \int xe^{x^2/4} \\
 \Leftrightarrow u(x) &= 2e^{x^2/4} + C, \quad C \in \mathbb{R}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Cada uma destas funções, substituída em (5), produz uma solução particular da ED linear completa (3). Como precisamos apenas de uma, fazemos $C = 0$ em (6). Substituindo $u(x) = 2e^{x^2/4}$ na equação (5), obtemos a solução particular

$$y_p = 2e^{x^2/4}e^{-x^2/4} = 2.$$

A solução geral da ED linear (2) é

$$y = y_p + y_h = 2 + Ce^{-x^2/4}, C \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Observação. Podemos obter a solução geral (7) substituindo na igualdade (5) a expressão para $u(x)$ obtida em (6), sem anular C (verificar!).

Exercício 35. Resolver a ED

$$xy' + 2y = x^5. \quad (8)$$

Resolução.

1. A ED é linear de primeira ordem, porque pode ser reescrita na forma (1).

$$\begin{aligned} xy' + 2y &= x^5 \\ \Leftrightarrow_{x \neq 0} y' + \frac{2}{x}y &= x^4, \end{aligned} \quad (9)$$

com $p(x) = 2/x$ e $q(x) = x^4$.

2. Resolver a ED homogénea associada

$$y' + \frac{2}{x}y = 0.$$

É uma ED de variáveis separáveis.

$$\begin{aligned} y' + \frac{2}{x}y &= 0 \\ \Leftrightarrow y' &= -\frac{2}{x}y \\ \Leftrightarrow_{y \neq 0} \frac{1}{y}dy &= -\frac{2}{x}dx \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{2}{x} dx \\
&\Leftrightarrow \ln |y| = -2 \ln |x| + C_1 \\
&\Leftrightarrow |y| = e^{-2 \ln |x| + C_1} \\
&\Leftrightarrow y = \pm e^{C_1} e^{-2 \ln |x|} \\
&\Leftrightarrow y = \pm e^{C_1} e^{-2 \ln |x|} \\
&\Leftrightarrow y = \pm e^{C_1} |x|^{-2} \\
&\Leftrightarrow y_h = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{11}$$

y_h é a solução geral da ED homogénea.

3. Determinar uma solução particular da ED completa (9), pelo método de variação do parâmetro.

Procuramos uma solução particular da forma

$$y = \frac{u(x)}{x^2}. \tag{12}$$

Substitui-se esta função na ED completa (9), obtendo-se uma ED separável, na variável u .

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u(x)}{x^2} \right)' + \frac{2}{x} \left(\frac{u(x)}{x^2} \right) = x^4 \\
&\Leftrightarrow \frac{u'(x)}{x^2} - \frac{2u(x)}{x^3} + \frac{2}{x} \frac{u(x)}{x^2} = x^4 \\
&\Leftrightarrow \frac{u'(x)}{x^2} = x^4 \\
&\Leftrightarrow u'(x) = x^6 \\
&\Leftrightarrow u(x) = \int x^6 dx \\
&\Leftrightarrow u(x) = \frac{x^7}{7} + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Substituindo esta expressão para $u(x)$ na equação (12), obtemos a solução geral da ED linear (8)

$$y = y_p + y_h = \frac{x^5}{7} + \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Se $C = 0$, obtemos a solução $y = x^5/7$, cujo domínio é $\mathbb{R}$ (verificar esta afirmação, substituindo esta solução na ED completa). Se $C \neq 0$ obtemos soluções cujos domínios são $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Na figura 19 estão representadas as curvas integrais da ED para $C = 1$. Os dois ramos formam o gráfico da solução $y = x^5/7 + 1/x^2$. O ramo da esquerda é o gráfico da solução com domínio $(-\infty, 0)$. O ramo da direita é o gráfico da solução com domínio $(0, +\infty)$.

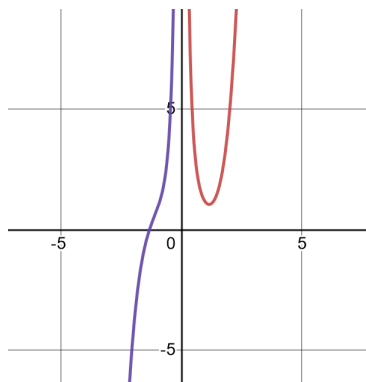


Figura 19: Curvas integrais da ED para $C = 1$.

2.5 Princípios de Sobreposição para Equações Diferenciais Lineares

Princípio de Sobreposição para Equações Diferenciais Lineares Homogêneas.

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções particulares da ED

$$y' + p(x)y = 0 \quad (13)$$

num dado intervalo I , então qualquer combinação linear $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, sendo c_1, c_2 constantes arbitrárias, é também uma solução da ED no intervalo I .

Exemplo 1. A ED linear homogênea

$$y' + xy = 0$$

admite as soluções particulares (verificar!)

$$y_1 = \frac{1}{3}e^{-x^2/2}$$

$$y_2 = -2e^{-x^2/2}$$

Qualquer combinação linear da forma $c_1y_1 + c_2y_2$ é solução da ED. Por exemplo, fazendo $c_1 = 2, c_2 = 3$ obtemos a solução particular

$$2y_1 - 3y_2 = \frac{2}{3}e^{-x^2/2} + 6e^{-x^2/2}.$$

Princípio de Sobreposição para Equações Diferenciais Lineares não Homogêneas.

Se $y_1(x)$ é uma solução particular da ED

$$y' + p(x)y = q_1(x)$$

no intervalo I_1 de valores de x , e se $y_2(x)$ é uma solução particular da ED

$$y' + p(x)y = q_2(x)$$

no intervalo I_2 de valores de x , então qualquer combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$, sendo c_1, c_2 constantes arbitrárias, é solução da ED

$$y' + p(x)y = c_1q_1(x) + c_2q_2(x)$$

no intervalo $I_1 \cap I_2$.

Exemplo 2. A ED linear

$$y' + y = 5$$

admite a solução particular $y_1 = 5$ no intervalo $\mathbb{R}$ (verificar!). A ED linear

$$y' + y = x$$

admite a solução particular $y_2 = x - 1$ no intervalo $\mathbb{R}$ (verificar!). Pelo princípio da sobreposição, a função

$$3y_1 - 2y_2 = 3 \times 5 - 2(x - 1) = -2x + 17$$

é uma solução particular da ED

$$y' + y = 3 \times 5 - 2x$$

em $\mathbb{R}$.

2.6 Problemas de Valor Inicial de 1ª Ordem

Um problema de valor inicial (pvi) de 1ª ordem, é indicado da forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (14)$$

sendo $y' = f(x, y)$ uma ED de 1ª ordem e $y(x_0) = y_0$ a *condição inicial*. Designa-se por *solução do pvi* qualquer solução particular da ED que satisfaça a condição inicial.

Exercício 36. Mostrar que a função $f(x) = 3e^{x^3}$ é solução do pvi

$$\begin{cases} y' = 3x^2y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Resolução. Começamos por mostrar que a função f é solução da ED.

$$f'(x) = (3e^{x^3})' = 3(x^3)'e^{x^3} = 3(3x^2)e^{x^3} = 3x^2(3e^{x^3}) = 3x^2f(x)$$

Mostramos também que f verifica a condição inicial.

$$f(0) = 3e^{0^3} = 3.$$

Fica assim demonstrado que $f(x)$ é uma solução do pvi.

■

Dado um pvi, interessa-nos saber o seguinte:

- Existe uma solução para ele?
- Se existe uma solução, ela é única?

Como os problemas de valor inicial são usados para descrever o comportamento de sistemas físicos, a importância destas questões fica justificada. O *teorema de Picard*¹ permite-nos obter, sob certas condições, respostas para estas questões sem ter que resolver previamente o pvi.

Teorema (de Picard). *Dado o pvi*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

se $f(x, y)$ e $\partial f(x, y)/\partial y$ são contínuas em alguma vizinhança o ponto (x_0, y_0) , então existe uma única solução $y(x)$ do pvi, válida num certo intervalo de valores de x centrado no ponto $x = x_0$.

¹Charles Émile Picard, (1856 - 1941), França

Exemplos 3. Exemplo 1.

O pvi

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

tem a solução $y = 2e^x$, no intervalo $(-\infty, \infty)$. A solução é única, uma vez que são verificadas as condições do teorema, dado que

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

sendo f e $\partial f / \partial y$ contínuas em qualquer vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = (0, 2)$.

Exemplo 2.

O pvi

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

admite as duas soluções $y = 0$ e $y = (x - 2)^3$ (verificar!). Note-se que não são verificadas as condições do teorema de Picard. De facto, temos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3y^{2/3} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \left(3y^{2/3}\right)' = 2y^{-1/3}. \end{aligned}$$

Bem que $f(x, y)$ é contínua em qualquer vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = (2, 0)$, mas $\partial f / \partial y$ não o é, não estando sequer definida neste ponto.

O corolário do teorema de Picard que se segue, enuncia uma condição suficiente para que a a solução de um pvi de 1ª ordem, envolvendo uma ED linear, seja única.

Corolário. *Dada a ED linear*

$$y' + p(x)y = q(x),$$

se $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas no ponto $x = x_0$, então a solução do pvi

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

existe e é única.

2.7 Sobre os domínios de validade das soluções das equações diferenciais

Uma *solução* de uma ED é uma função $y = y(x)$ que, quando substituída na ED, verifica a igualdade respectiva. A reunião dos intervalos de valores de x para os quais uma função resolve uma equação diferencial diz-se *domínio de validade* da solução. Nem sempre o domínio de validade coincide com o domínio natural da função. Consideremos, por exemplo, a ED

$$y^2 y' = 1.$$

Pode verificar-se que $y = \sqrt[3]{3x} = (3x)^{1/3}$ é uma solução particular da ED substituindo y e

$$y' = \frac{1}{(3x)^{2/3}}$$

na ED e verificando que se obtém uma identidade.

$$\begin{aligned} y^2 y' &= 1 \\ \Leftrightarrow \left((3x)^{1/3}\right)^2 \frac{1}{(3x)^{2/3}} &= 1 \\ \Leftrightarrow (3x)^{2/3} \frac{1}{(3x)^{2/3}} &= 1 \\ \Leftrightarrow_{x \neq 0} 1 &= 1. \end{aligned}$$

Note-se que o primeiro membro da terceira equação não está definido para $x = 0$, uma vez que para este valor, se reduz à expressão $0/0$, sem significado numérico. Como consequência, apesar de a solução $y = (3x)^{1/3}$ ter o domínio $(-\infty, +\infty)$, o seu domínio *enquanto solução* da ED não pode incluir o ponto $x = 0$. Podemos então dizer que o domínio de validade da solução $y = (3x)^{1/3}$ é $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, diferente do seu domínio natural, $\mathbb{R}$.

Vamos ver outro exemplo. Consideremos o pvi de primeira ordem

$$\begin{cases} y' = \frac{-xy}{\ln(y)} \\ y(0) = e^2 \end{cases}$$

A função

$$y = e^{\sqrt{4-x^2}} \quad (15)$$

é uma solução do pvi. O domínio natural desta função é $-2 \leq x \leq 2$ (porquê?). Mas tanto para $x = -2$ como para $x = 2$, obtemos $y = 1$. Ora substituindo y por 1 na ED, obtemos uma divisão por zero no segundo membro, por ser $\ln(1) = 0$. A função (15) não resolve a ED para $x = \pm 2$. Sendo assim, o domínio de validade da função $y = e^{\sqrt{4-x^2}}$ é $-2 < x < 2$, diferente do seu domínio natural.

2.8 Aplicações

Quantidade de sal num tanque

Um tanque contém, inicialmente, 800 litros de água doce. No instante $t = 0$ são ligadas duas torneiras. Uma delas despeja água salgada no tanque, com salinidade $S_{in} = 75$ gramas de sal por litro de água, e o caudal de $C_{in} = 5$ litros por hora. A outra torneira retira água do tanque, com o caudal de $C_{out} = 3$ litros por hora, sendo a salinidade $S_{out}(t) = q(t)/V(t)$ uma função do tempo, em que $q(t)$ representa a quantidade de sal no tanque, no instante t , e $V(t)$ representa o volume de água no tanque nesse mesmo instante. Quer-se obter (a) uma expressão para a quantidade de sal no tanque, $q(t)$ (gramas), em função do tempo t (horas); (b) o tempo t necessário para que a salinidade da água no tanque atinja o valor de 34 gramas de sal por litro de solução.

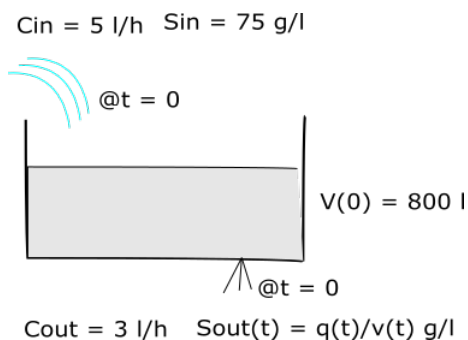


Figura 20:



Figura 21:

Queremos obter uma expressão para $q(t)$. Sabemos que no instante $t = 0$ se tem $q(0) = 0$, porque, de início, o tanque contém apenas água doce. O pensamento inicial pode ser

$$q(t) = (\text{sal que entra no tanque até ao instante } t) - (\text{sal que sai do tanque até ao instante } t) \quad (16)$$

Não há problema para calcular o sal que entra no tanque até ao instante t , por essa entrada se dar a uma

taxa fixa. Designando por $In(t)$ esta quantidade de sal, podemos escrever

$$In(t) = C_{in} \times S_{in} \times t = 5 \frac{\text{litros}}{\text{hora}} \times 75 \frac{\text{gramas}}{\text{litro}} \times t \text{ horas} = 5 \times 75 \times t \text{ gramas} = 375t \text{ gramas.} \quad (17)$$

Já o cálculo da quantidade de sal que sai do tanque até ao instante t apresenta problemas, por essa saída não se dar a uma taxa fixa, dado que a salinidade da água do tanque vai aumentando com o tempo. Designando por $Out(t)$ a quantidade de sal que saiu do tanque até ao instante t , podíamos ser tentados a escrever

$$Out(t) = C_{out} \times S_{out}(t) \times t, \quad (18)$$

sendo a concentração de sal no tanque $S_{out}(t)$, no instante t , dada por $q(t)/V(t)$. A expressão (18) estaria correcta se, ao longo do intervalo de tempo $[0, t]$, a concentração de sal no tanque $S_{out}(t) = q(t)/V(t)$ fosse constante. Mas a concentração vai aumentando com o tempo, pelo que a expressão (18) nos dá uma quantidade de sal superior àquela que efectivamente saiu do tanque, desde o início do processo até ao instante t .

Como resolver este problema? Uma possibilidade de o atacar é avaliar a quantidade de sal que entra no tanque num intervalo de tempo Δt muito pequeno, por exemplo o intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$ (figura 21). Se o intervalo de tempo considerado é pequeno, a concentração de sal no tanque, $q(t)/V(t)$, ‘não tem tempo’ para variar muito, podendo ser considerada aproximadamente constante nesse pequeno intervalo temporal. Para fazer valer esta abordagem, vamos simplificar o problema.

1. Assumimos que, em cada instante, o sal está distribuído de forma homogénea no líquido, embora saibamos que é razoável esperar uma maior concentração de sal junto da torneira que enche o tanque, do que junto da que o despeja. Esta simplificação introduz um erro grande no início do processo, tornando-se mais razoável à medida que o tempo passa, uma vez que a concentração de sal no tanque tende para 75 gramas por litro, com o aumento do tempo decorrido (porquê?).
2. Assumimos que a quantidade de sal no tanque, $q(t)$, varia suavemente com o tempo. Esta variação suave, traduz-se matematicamente num gráfico para $q(t)$ que admite tangente em todos os pontos, ou seja, $q'(t)$ existe em todos os instantes.

Podemos escrever uma versão de (16) para a quantidade Δq de sal acrescentada ao tanque no intervalo $[t, t + \Delta t]$.

$$\Delta q \approx 375\Delta t - 3 \times \frac{q(t)}{V(t)} \times \Delta t \quad (19)$$

Vamos fazer a leitura do segundo membro desta fórmula. A expressão $375\Delta t$ dá-nos a quantidade exacta de sal que entrou no tanque no intervalo $[t, \Delta t]$. A expressão $3 \times \frac{q(t)}{V(t)} \times \Delta t$ é apenas uma aproximação

da quantidade de sal que saiu do tanque neste mesmo intervalo. Isto porque $q(t)/V(t)$ representa o valor deste cociente no extremo esquerdo t do intervalo (figura 21), sabendo-se que este valor muda à medida que o tempo evolui de t para $t + \Delta t$. Uma coisa é certa: quanto menor for Δt , menos tempo é dado para que o cociente varie. Dividamos ambos os membros de (19) por Δt .

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} \approx 375 - 3 \times \frac{q(t)}{V(t)}$$

O segundo membro desta expressão não varia com Δt , uma vez que 375 é constante e $q(t)/V(t)$ é um valor concreto calculado no extremo esquerdo do intervalo $[t, t + \Delta t]$. A aproximação é tanto melhor quanto menor for Δt . Ora fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, a aproximação transforma-se numa igualdade.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = 375 - 3 \times \frac{q(t)}{V(t)} \quad (20)$$

Porquê? Porque o operador *limite* não deixa que o intervalo temporal Δt seja maior que zero, não deixa espaço temporal para que $q(t)/V(t)$ varie. Note-se que o limite não afecta o segundo membro, porque este não contém a expressão Δt . O primeiro membro não é mais que $q'(t)$. E $q'(t)$ pode ser calculada para qualquer valor de t , porque estamos a assumir que q varia suavemente com o tempo. Omitindo, por simplicidade, o parâmetro t , podemos escrever (20) da forma

$$\begin{aligned} q' &= 375 - \frac{3}{V}q \\ \Leftrightarrow q' + \frac{3}{V}q &= 375 \end{aligned}$$

na qual reconhecemos, de imediato, uma ED linear de primeira ordem com função incógnita q . Sabendo que o volume de água salgada no tanque, no instante t , é $V(t) = 800 + 2t$ (porquê?), obtemos a ED linear

$$q' + \frac{3}{800 + 2t}q = 375. \quad (21)$$

Em resumo: queríamos uma limonada, $q(t)$, mas a formalização matemática do problema deu-nos apenas os limões para a fazer – a equação diferencial (21). Vamos resolver esta equação diferencial.

1. Resolver a ED homogénea associada

$$q' + \frac{3}{800 + 2t}q = 0.$$

É uma ED de variáveis separáveis.

$$\begin{aligned}
 q' + \frac{3}{800+2t}q &= 0 \\
 \Leftrightarrow q' &= -\frac{3}{800+2t}q \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{q}dq &= -\frac{3}{800+2t}dt \\
 \Leftrightarrow \int \frac{1}{q}dq &= \int -\frac{3}{800+2t}dt \\
 \Leftrightarrow \ln|q| &= -\frac{3}{2}\ln|400+t| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\
 \Leftrightarrow |q| &= e^{-(3/2)\ln|400+t|+C_1} \\
 \Leftrightarrow q &= \pm e^{C_1} e^{\ln|400+t|^{-3/2}} \\
 q_h &= C(400+t)^{-3/2} \quad (400+t > 0)
 \end{aligned} \tag{22}$$

q_h é a solução geral da ED homogénea.

2. Determinar uma solução particular da ED completa (21), pelo método de variação do parâmetro.

Procuramos uma solução particular da forma

$$q_p = u(t)(400+t)^{-3/2}. \tag{23}$$

Substitui-se esta função na ED completa (21), obtendo-se uma ED na variável u .

$$\begin{aligned}
 \left(u(t)(400+t)^{-3/2}\right)' + \frac{3}{800+2t} \left(u(t)(400+t)^{-3/2}\right) &= 375 \\
 \Leftrightarrow u'(t)(400+t)^{-3/2} &= 375 \\
 \Leftrightarrow u'(t) &= 375(400+t)^{3/2} \\
 \Leftrightarrow u(t) &= \int 375(400+t)^{3/2} dt \\
 \Leftrightarrow u(t) &= 150(400+t)^{5/2} + C
 \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão de $u(t)$ na equação (23) obtemos a solução geral da ED linear (21)

$$q(t) = y_p + y_h = 150(400+t) + C(400+t)^{-3/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Para resolver a alínea (a) do problema, falta determinar o parâmetro C . Para tal usamos a condição

inicial $q(0) = 0$.

$$\begin{aligned} q(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 60000 + C(400)^{-3/2} &= 0 \\ \Leftrightarrow C &= -4.8 \times 10^8. \end{aligned}$$

Podemos escrever a fórmula de $q(t)$.

$$q(t) = 150(400 + t) - \frac{4.8 \times 10^8}{(400 + t)^{3/2}}$$

Para responder à alínea (b) temos que calcular o tempo t que é necessário decorrer, desde o início do processo, de modo a obter uma salinidade $q(t)/V(t)$ igual a 34 gramas por litro de sal.

$$\begin{aligned} \frac{q(t)}{V(t)} &= 34 \\ \Leftrightarrow \frac{150(400 + t) - \frac{4.8 \times 10^8}{(400 + t)^{3/2}}}{800 + 2t} &= 34 \\ \Leftrightarrow 150(400 + t)(400 + t)^{3/2} - 4.8 \times 10^8 &= 34 \times 2(400 + t)(400 + t)^{3/2} \\ \Leftrightarrow 150(400 + t)(400 + t)^{3/2} - 4.8 \times 10^8 &= 34 \times 2(400 + t)^{5/2} \\ \Leftrightarrow 82(400 + t)^{5/2} &= 4.8 \times 10^8 \\ \Leftrightarrow 400 + t &= \left(\frac{4.8}{82} \times 10^8 \right)^{2/5} \\ \Leftrightarrow t &\approx 109 \text{ horas.} \end{aligned}$$

2.8.1 Corrente Eléctrica num Circuito RL

Na figura 22 está representado um circuito constituído por uma bateria com voltagem $V_s = 10V$ (10 volts), um interruptor que é fechado (ligado) no instante $t = 0$ s, uma resistência $R = 10\Omega$ (10 ohms), e uma bobina com uma indutância $L = 1mH$ (1 miliHenry). Quando se fecha o interruptor é estabelecida uma corrente eléctrica de $i(t)$ ampéres no circuito, sendo t (segundos) o tempo. Pretendemos determinar $i(t)$. O cálculo de $i(t)$ envolve a resolução de uma ED linear de primeira ordem. Neste cálculo fazemos as seguintes simplificações: (1) A fonte de tensão (bateria) é ideal, o que significa que a tensão aos seus terminais é constante, independentemente da corrente eléctrica $i(t)$ debitada; (2) a bobina é ideal, isto é, a sua resistência eléctrica é de zero ohms.

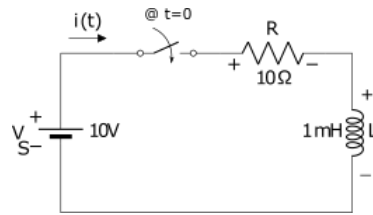


Figura 22:

Façamos os cálculos. No instante $t = 0$ s o interruptor é fechado e o circuito reduz-se a uma malha (circuito fechado) formada pela bateria, pela resistência e pela indutância (e pelos fios condutores que os interligam, que supomos terem resistência, indutância e capacidade nulas).

1. Usamos a *lei das malhas* de Kirchhoff: a soma das tensões aos terminais dos componentes que formam uma malha é nula. Designando por V_R a tensão aos terminais da resistência e por V_L a tensão aos terminais da indutância, temos, para $t \geq 0$ (percorrendo o circuito no sentido dos ponteiros do relógio, e considerando positiva uma tensão “ $- \rightarrow +$ ”, e negativa uma tensão “ $+ \rightarrow -$ ”),

$$V_s - V_R - V_L = 0. \quad (24)$$

2. A relação entre a tensão e a corrente na resistência é $V_R = Ri$, e na indutância é

$$V_L = L \frac{di}{dt}.$$

Usando estas relações na equação (24), obtemos

$$\begin{aligned} V_s - V_R - V_L &= 0 \\ \Leftrightarrow V_s - Ri - L \frac{di}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i &= \frac{V_s}{L} \\ \Leftrightarrow i' + \frac{R}{L}i &= \frac{V_s}{L}. \end{aligned} \quad (25)$$

A equação (25) é uma ED linear de primeira ordem na variável i (notar que o segundo membro é constante). A sua resolução é como se segue.

1. Resolver a ED homogénea associada

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0.$$

É uma ED de variáveis separáveis.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{i} di &= -\frac{R}{L} dt \\
 \Leftrightarrow \int \frac{1}{i} di &= \int -\frac{R}{L} dt \\
 \Leftrightarrow \ln|i| &= -\frac{R}{L} t + C_1 \\
 \Leftrightarrow |i| &= e^{C_1} e^{-(R/L)t} \\
 \Leftrightarrow i &= \pm e^{C_1} e^{-(R/L)t} \\
 i_h &= C e^{-(R/L)t}, C \in \mathbb{R}
 \end{aligned} \tag{26}$$

i_h é a solução geral da ED homogénea.

2. Determinar uma solução particular, i_p , da ED completa (25), pelo método de variação do parâmetro.

Procuramos uma solução particular da forma

$$i_p = u(t)e^{-(R/L)t}. \tag{27}$$

Substitui-se esta função na ED completa (25), obtendo-se uma ED na variável u .

$$\begin{aligned}
 \left(u(t)e^{-(R/L)t}\right)' + \frac{R}{L} \left(u(t)e^{-(R/L)t}\right) &= \frac{V}{L} \\
 \Leftrightarrow u'(t)e^{-(R/L)t} &= \frac{V}{L} \\
 \Leftrightarrow u'(t) &= \frac{V}{L} e^{(R/L)t} \\
 \Leftrightarrow u(t) &= \int \frac{V}{L} e^{(R/L)t} dt \\
 \Leftrightarrow u(t) &= \frac{V}{R} e^{(R/L)t} + C
 \end{aligned}$$

Na última igualdade consideramos nulo o parâmetro C . Substituindo $u(t)$ na equação (27), obtemos uma solução particular.

$$i_p = \frac{V}{R} e^{(R/L)t} e^{-(R/L)t} = \frac{V}{R}.$$

A solução geral da ED linear (25) é

$$i(t) = i_p + i_h = \frac{V}{R} + C e^{-(R/L)t}, C \in \mathbb{R}.$$

Substituindo V, R, L pelos valores no enunciado, obtemos

$$i(t) = 1 + Ce^{-10^4 t}, C \in \mathbb{R}.$$

Para determinar o valor de C usamos a condição inicial $i(0) = 0$ (por que é válida?)

$$i(0) = 0 \Rightarrow 0 = 1 + C \Rightarrow C = -1,$$

resultando para $i(t)$ a fórmula

$$i(t) = 1 - e^{-10^4 t}, C \in \mathbb{R}.$$

O gráfico de $i(t)$ está na figura 23

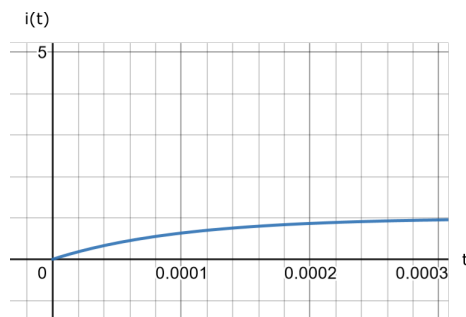


Figura 23:

Observa-se que $i \rightarrow V/R = 1$ quando $t \rightarrow \infty$, isto é, à medida que o tempo passa o circuito tende a comportar-se como se a bobina fosse um fio condutor comum. Mas deve ter-se em atenção que, ao contrário de um fio condutor comum, a bobina armazena energia eléctrica $W = (1/2)Li^2$ joules, proporcional ao quadrado da corrente i . Essa energia é armazenada por meio de um campo magnético que é criado quando uma bobina é percorrida por uma corrente eléctrica. O comportamento da bobina é muito diferente se a bateria for substituída por uma fonte de tensão alternada, como veremos adiante.

2.8.2 Exercícios

Exercício 37. Mostrar que as funções são soluções dos problemas de valor inicial.

$$\begin{aligned} (a) \quad y = 3e^{x^3}, \quad \begin{cases} y' = 3x^2 y \\ y(0) = 3 \end{cases} & \quad (b) \quad y = 1/4x^4 + 2\cos(x) + 1, \quad \begin{cases} y' = x^3 - 2\sin(x) \\ y(1) = 5/4 + 2\cos(1) \end{cases} \\ (c) \quad y = 1/x, \quad x > 0 \quad \begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} & \quad (d) \quad y = 2e^{-x}, \quad \begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 38. Resolver as equações diferenciais lineares.

$$(a) \quad y' + 2y = 0$$

$$(b) \quad y' + y = 2e^x$$

$$(c) \quad y' + 2xy = x$$

$$(d) \quad y' + y = \sin(x)$$

$$(e) \quad xy' + y = 2x, \quad (x > 0)$$

$$(f) \quad (1 + e^x) \frac{dy}{dx} = -e^x y$$

Exercício 39. Resolver os problemas de valor inicial.

$$(a) \quad \begin{cases} y' + 2xy = 2x \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y' = 3x^2/(2y + \cos(y)) \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

Exercício 40. Resolver a equação diferencial $xy' + y = 0$ como equação de variáveis separáveis e linear.

Exercício 41. Uma conta bancária é aberta com um capital inicial de 1000 euros. Sabendo que o banco pratica uma taxa de juros anual contínua de 8%, escrever a expressão para o valor $M(t)$ da conta ao fim de t anos.

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol I, N. Piskounov.
2. *Elementary Differential Equations*, William F. Trench (free download - link).
3. *The Domain of Solutions to Differential Equations*, Larry Riddle (free download - link).