Notas das Aulas – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/∼mar)

Capítulo 2. Equações Diferenciais - Parte 1

2.1 Generalidades sobre equações diferenciais

Uma equação diferencial (ED) é uma equação que relaciona uma ou mais funções incógnitas e as suas derivadas [1]. Por exemplo, a ED

$$y' + 2xy \;=\; 3x \tag{1}$$

tem como incógnita y, que é uma função da variável x. Resolver esta equação diferencial é determinar todas as funções $y(x)$ que a satisfazem. A função constante $y = 3/2$ é uma solução da ED, porque substituida na variável y da equação (1), converte a igualdade numa identidade.

$$\left(\frac{3}{2}\right)' + 2x\left(\frac{3}{2}\right) \;=\; 3x \;\;\Leftrightarrow\;\; 3x \;=\; 3x \tag{2}$$

A função $y = 3/2 + e^{-x^2}$ também resolve a ED (verificar!). Cada uma destas funções diz-se uma *solução particular* da ED. O conjunto de todas as funções que resolvem a ED, designa-se por *solução geral* da ED. A cada uma destas funções está associado um intervalo aberto (a, b) de valores de x, no qual a função resolve a equação. Nas aplicações à engenharia, as funções representam grandezas físicas, as suas derivadas representam as taxas de variação destas grandezas com outras grandezas, e a equação diferencial define uma relação envolvendo termos destes tipos.

O estudo de equações diferenciais consiste na averiguação de métodos de cálculo das suas soluções e na avaliação das propriedades destas soluções. A necessidade do estudo de EDs reside no facto de, para variados sistemas físicos de interesse, as equações que constituem a sua descrição matemática serem equações diferenciais. Para percebermos estes sistemas temos que resolver as equações.

[1] As EDs que vamos estudar contêm apenas uma função incógnita.

2.1.1 Tipos de equações diferenciais

As EDs dividem-se em dois grandes grupos: as *Equações Diferenciais Ordinárias* (EDOs) e as *Equações de Derivadas Parciais* (EDPs). Nas EDOs as funções incógnitas dependem de uma só variável. Nas EDPs as funções incógnitas dependem de mais de uma variável.

Exemplos 1.

$$y'' - xy = e^x \qquad \text{EDO} \qquad \text{Função incógnita: } y(x) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2x \qquad \text{EDP} \qquad \text{Função incógnita: } z(x,y) \tag{4}$$

2.1.2 Ordem de uma equação diferencial. Função incógnita. Variável independente

A *ordem* de uma ED é a ordem de derivação mais elevada que ela contém. Por exemplo, a equação (1) é uma EDO de 1ª ordem; a a equação (3) é uma EDO de 2ª ordem; a a equação (4) é uma EDP de 2ª ordem. A *incógnita* numa ED é a letra sobre a qual as derivações incidem. Na equação (3) a incógnita é y; na a equação (4) a incógnita é z. As *variáveis independentes* são aquelas de que dependem as funções incógnitas. Na a equação (3) a variável independente é x; na a equação (4) as variáveis independentes são x e y.

2.1.3 Integral escrito como uma equação diferencial

Quando resolvemos um integral, por exemplo

$$\int x^2 dx$$

estamos a calcular todas as funções y que satisfazem a equação

$$y = \int x^2 dx.$$

Esta igualdade pode ser escrita da forma

$$y' = x^2, \tag{5}$$

que nada mais é que uma EDO de 1ª ordem. A família de funções $y = \int x^2 dx = x^3/3 + C$, sendo C um parâmetro real, é a *solução geral* da ED $y' = x^2$.

No que se segue, vamos estudar equações diferenciais ordinárias dos três tipos seguintes: equações diferenciais de variáveis separáveis, equações diferenciais lineares de primeira ordem e equações diferenciais lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes.

2.2 Equações diferenciais de variáveis separáveis

EDs de variáveis separáveis são todas as que podem ser escritas na forma

$$y' = f(x)g(y), \tag{6}$$

sendo $f(x)$ uma expressão que não envolve a variável y, e $g(y)$ uma expressão que não envolve a variável x.

Exemplos 2. EDs de variáveis separáveis

$$\begin{array}{lll}
y' = x^2 y & f(x) = x^2 & g(y) = y \\
y' = 2x & f(x) = 2x & g(y) = 1 \\
 & \text{ou } f(x) = x & g(y) = 2 \\
y' = e^y & f(x) = 1 & g(y) = e^y \\
y' = 0 & f(x) = 0 & g(y) = 0 \\
y' = 0 & f(x) = 0 & g(y) = 0
\end{array}$$

A equação

$$y' - xy = x$$

também é separável,

$$y' - xy = x \Leftrightarrow y' = x(1+y), \quad f(x) = x,\ g(y) = 1 + y.$$

A ED

$$y' + xy = x^2$$

não é separável.

2.2.1 Resolução de EDs de Variáveis separáveis

Vamos resolver detalhadamente três casos de EDs de variáveis separáveis.

Exercício 26. Resolver a ED

$$2y' - 3yx = 0. \tag{7}$$

1. Verificar que a ED é separável.

   Vamos mostrar que a ED pode ser reescrita na forma (6).

$$\begin{aligned} 2y' - 3yx &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y' &= 3yx \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{3}{2}yx \end{aligned}$$

2. Substituir y' por dy/dx e transformar a equação resultante de modo que o primeiro membro não tenha a variável x e o segundo membro não tenha a variável y. Os diferenciais dy e dx devem ser factores multiplicativos.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{2}yx \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{3}{2}yx \qquad (8) \\ \underset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{y}dy &= \frac{3}{2}xdx \qquad (9) \end{aligned}$$

   Notar que se excluiu a solução nula, $y = 0$, para evitar uma divisão por zero. Mas esta é uma solução particular da ED (porquê?).

3. Integrar o primeiro membro em ordem a y e o segundo membro em ordem a x.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}dy &= \int \frac{3}{2}xdx \\ \Leftrightarrow \ln|y| &= \frac{3}{4}x^2 + C1,\ C_1 \in \mathbb{R} \qquad (10) \end{aligned}$$

   C_1 é o parâmetro que resulta da integração. A equação (10) representa, implicitamente, a família de soluções da ED, excepto a solução nula $y = 0$. Vamos escrever esta equação na forma explícita.

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \frac{3}{4}x^2 + C1 \\ \Leftrightarrow |y| &= e^{\frac{3}{4}x^2 + C1} \\ \Leftrightarrow y &= \pm e^{C1}e^{\frac{3}{4}x^2} \qquad (11) \\ \Leftrightarrow y &= Ce^{\frac{3}{4}x^2},\ C \in \mathbb{R} \qquad (12) \end{aligned}$$

O parâmetro C na equação (12) substitui a expressão $\pm e^{C1}$ na equação (11), para simplificar a notação. Por exemplo, fazendo $C_1 = 2$ e escolhendo o sinal positivo na equação (11), obtém-se a solução particular da ED

$$y = e^2 e^{\frac{3}{2}x^2}.$$

Esta solução pode ser obtida fazendo $C = e^2$ em (12). Não se alteram as soluções particulares designando $\pm e^{C_1}$ por C.

A equação (12) já contempla a solução $y = 0$, obtida fazendo $C = 0$. Esta solução não é contemplada pela equação (11).

A fórmula (12) representa a *solução geral* da ED. A ED não tem outras soluções, para além destas. É imediato verificar que o *domínio* de cada solução particular, y, e da sua derivada, y', é $\mathbb{R}$. Isto significa que, ao substituir a expressão da solução geral na equação (7),

$$2\left(Ce^{\frac{3}{4}x^2}\right)' - 3\left(Ce^{\frac{3}{4}x^2}\right)x = 0$$

se obtém uma equivalência válida em $\mathbb{R}$.

Seguem-se algumas *soluções particulares* da ED.

$$\text{Para } C = 0, \text{ a solução é } y = 0 \tag{13}$$

$$\text{Para } C = 2, \text{ a solução é } y = 2e^{\frac{3}{4}x^2} \tag{14}$$

$$\text{Para } C = -2, \text{ a solução é } y = -2e^{\frac{3}{4}x^2} \tag{15}$$

O gráfico de cada solução particular designa-se por *curva integral* da ED. Na figura 14, estão representadas algumas destas curvas integrais.

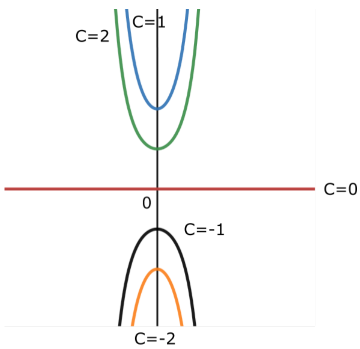

Figura 14: Algumas curvas integrais da ED $2y' - 3yx = 0$.

Exercício 27. Resolver a ED

$$y' = x^2y^3$$

.

Verificamos que a ED é separável:

$$y' = x^2y^3, \quad f(x) = x^2,\ g(y) = y^3.$$

Substituimos y' por dy/dx, separamos variáveis e integramos ambos os membros.

$$
\begin{aligned}
y' &= x^2y^3 && (16)\\
\underset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{y'}{y^3} &= x^2 && (17)\\
\Leftrightarrow \frac{y'}{y^3} &= x^2 \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{y^3} &= x^2dx \\
\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^3} &= \int x^2dx \\
\Leftrightarrow \frac{y^{-2}}{-2} &= \frac{x^3}{3} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R} && (18)
\end{aligned}
$$

A equação (16) representa, na forma implícita, todas as soluções particulares da ED, excepto a solução nula $y = 0$. Os passos de cálculo seguintes servem para obter a forma explícita destas soluções.

$$
\begin{aligned}
\frac{y^{-2}}{-2} &= \frac{x^3}{3} + C_1 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{-2y^2} &= \frac{x^3}{3} + C_1 \\
\underset{C=-2C_1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{y^2} &= -2\frac{x^3}{3} + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow y^2 &= \frac{1}{-\frac{2}{3}x^3 + C} \\
\Leftrightarrow y &= \pm\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + C}},\ C \in \mathbb{R} && (19)
\end{aligned}
$$

A solução $y = 0$ é uma solução particular da ED que não pode ser obtida da equação (19). A solução geral da ED é o conjunto das funções

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + C}},\ C \in \mathbb{R} \qquad (20)$$

e

$$y \;=\; 0. \tag{21}$$

O domínio das soluções (20) depende de C:

$$D_y \;=\; \{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3}x^3 + C > 0\}.$$

O domíno da solução (21) é $\mathbb{R}$. Na figura 15 vemos as curvas integrais $y \;=\; \pm\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3+1}}$, que correspondem a $C = 1$.

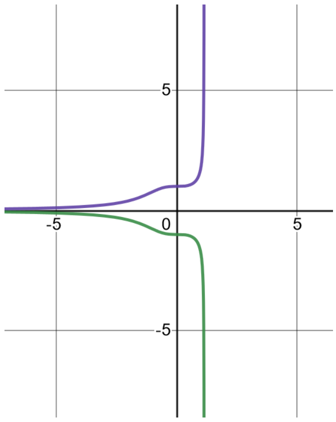

Figura 15: Curvas integrais: $y \;=\; \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3+1}}$ e $y \;=\; -\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3+1}}$.

Exercício 28. Resolver a ED

$$y' = e^{x^2}. \tag{22}$$

1. Verificamos que a ED é separável:

$$y' = e^{x^2}, \quad f(x) = e^{x^2},\; g(y) = 1.$$

2. Substituimos y' por dy/dx, separamos variáveis e integramos ambos os membros:

$$\begin{aligned} y' &= e^{x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= e^{x^2} \\ \Leftrightarrow dy &= e^{x^2}dx \\ \Leftrightarrow \int dy &= \int e^{x^2}dx \\ \Leftrightarrow y = \int e^{x^2}dx \end{aligned}$$

O integral obtido no segundo membro não pode ser representado por uma fórmula fechada que envolva apenas funções elementares. Se escolhermos a solução particular $y = y(x)$ cujo gráfico contém o ponto $(a, y(a))$, podemos escrever

$$y(x) - y(a) = \int_a^x e^{x^2}dx, \tag{23}$$

que representa uma só curva integral. O integral na direita pode ser calculado por aproximação, usando métodos numéricos. Na figura 16 representam-se várias soluções particulares (curvas integrais) da ED, obtidas definindo, para cada uma delas, um ponto $(a, y(a))$ que o seu gráfico deve conter (figura gerada usando ChatGPT).

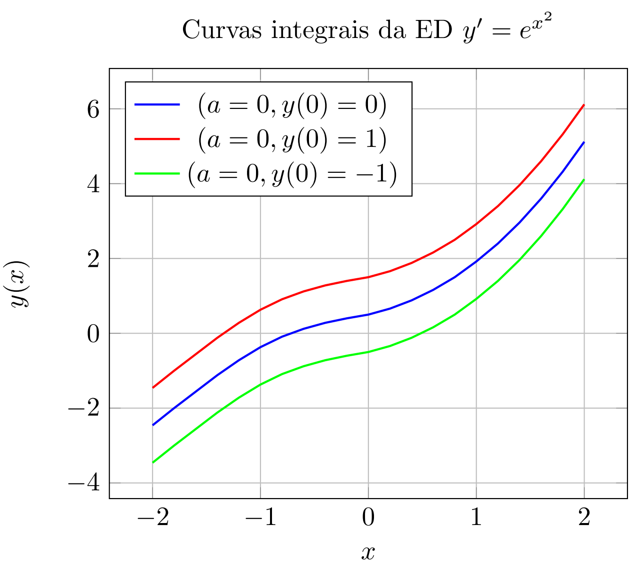

Figura 16: Curvas integrais de $y' = e^{x^2}$ para differentes condições iniciais $(a, y(a))$.

2.3 Aplicações das EDs de Variáveis Separáveis

2.3.1 Posição, dada a Velocidade

Problema: Um veículo desloca-se sobre uma curva à velocidade $v(t) = 3t$ quilómetros por hora, sendo t o tempo em horas. Sobre a curva está marcado o ponto A. Só com esta informação, podemos saber a que distância está o veículo do onto A para $t = 4$?

Resposta: A resposta é Não! Dado que a velocidade $v(t)$ é a variação da posição $x(t)$ em função do tempo

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow 3t = \frac{dx}{dt},$$

e sendo esta uma ED de variáveis separáveis, com incógnita x e variável independente t, a sua resolução

$$dx = 3tdt \Leftrightarrow \int dx = \int 3tdt \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}t^2 + C,$$

necessita o esclarecimento do valor de C para que possamos ter uma função distância, $x = x(t)$. Para esclarecer o valor de C, precisamos de conhecer o valor de $x(t)$ para algum t. Se esse valor for a distância ao ponto A em algum instante, a solução particular $x(t)$ obtida representa a distância do veículo ao ponto A em função do tempo. Por exemplo, se no instante $t = 1$ a distância do veículo ao ponto A for de 3 km, então

$$x(1) = 3 \Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}(1)^2 + C \Leftrightarrow C = \frac{3}{2},$$

e

$$x(t) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}$$

representa a distância do veículo ao ponto A em função do tempo.

2.3.2 Problemas de Crescimento e de Decrescimento Exponencial

Problema: Em 1990 a população mundial foi estimada em 5.3×10^9 pessoas. A uma taxa de crescimento de 2% ao ano, qual a expectativa numérica para a população mundial no ano de 2025?

Resposta: Um modelo simples para uma população $p(t)$, sujeita a uma taxa de crescimento k, é dado pela ED

$$p'(t) = kp(t).$$

A razoabilidade deste modelo é a seguinte: nada mais sendo dito (isto é, sem introduzirmos fatores muito específicos que condicionem a variação duma população), a 'velocidade' de crescimento da população é, em cada instante, proporcional ao número de indivíduos que ela contém. Por exemplo, se uma população de 5000 indivíduos produz 10 novos elementos num dado lapso de tempo, é razoável esperar que uma população de 10000 indivíduos produza 20 novos elementos nesse mesmo lapso temporal. A expressão de proporcionalidade k designa-se por *taxa de variação* da população $p(t)$. No caso deste problema a taxa de variação é constante ao longo do tempo. Se $k > 0$ a população cresce exponencialmente com o tempo (vamos ver que é o caso deste problema). Se $k < 0$ a população decresce exponencialmente com o tempo (caso encontrado em problemas de *decaímento radioativo*).

Para estimarmos a população no ano 2025, dados o seu valor em 1990 e a taxa de crescimento de então, temos que resolver a ED de variáveis separáveis

$$p' = 0.02p,$$

de incógnita p e variável independente t.

$$\begin{aligned}
p' = 0.02p &\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = 0.02p \\
&\Leftrightarrow \frac{dp}{p} = 0.02dt \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dp}{p} = \int 0.02dt \\
&\Leftrightarrow \ln(|p|) = 0.02t + C_1 \\
&\Leftrightarrow |p| = e^{C_1}e^{0.02t} \\
&\Leftrightarrow p = \pm e^{C_1}e^{0.02t} \\
&\Leftrightarrow p(t) = Ce^{0.02t},\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para obtermos uma estimativa da população em 2025, vamos supor que $t = 0$ corresponde ao ano de 1990. Temos então

$$p(0) = 5.3 \times 10^9 \Leftrightarrow Ce^{0.02(0)} = 5.3 \times 10^9 \Leftrightarrow,\ C = 5.3 \times 10^9,$$

e

$$p(t) = 5.3 \times 10^9 e^{0.02t}.$$

Percebemos, por este modelo matemático, por que se desigam estes processos por processos de (neste caso) crescimento **exponencial**. Se $t = 0$ corresponde ao ano de 1990, então $t = 35$ corresponde ao ano de 2025:

$$p(35) = 5.3 \times 10^9 e^{0.02(35)} \approx 10.1 \times 10^9.$$

Em 2025 o número de habitantes do planeta está estimado em 8.2×10^9, pelo que o modelo simples usado nos deu um erro de aproximadamente 25%.

2.3.3 Velocidade de escape em relação à Terra

Se lançarmos um objecto na vertical ele sobe até uma certa altura, pára, e depois começa a cair. Quanto maior for a velocidade do lançamento, maior a altura máxima atingida pelo objecto.

Problema: Qual a velocidade de lançamento que faz com que o objecto se afaste da Terra e não retorne a ela?

Resolução: A resposta é 'sim' e a velocidade de lançamento mínima necessária para que esse fenómeno se verifique denomina-se *velocidade de escape*. É esta velocidade que vamos calcular. O cálculo envolve a resolução de uma ED de variáveis separáveis.

A partir do momento em que o objecto é lançado, fica sujeito apenas à força gravítica do nosso planeta, que lhe provoca uma diminuição da velocidade de afastamento. Se a velocidade inicial v_0 com que o objecto é lançado não for suficientemente elevada, há um momento em que o corpo atinge uma velocidade de ascensão nula, iniciando depois o retorno à superfície da Terra (figura 17). Vamos determinar uma expressão para a velocidade $v(x)$ do objecto em função da sua distância x à Terra. Fica claro que se quisermos que o corpo não retorne à Terra, então $v(x)$ não se pode anular em nenhum ponto do percurso. É esta a condição que nos vai permitir determinar a velocidade de escape. Nos cálculos que se seguem despreza-se a força de arrasto do ar e despreza-se a acção dos restantes corpos do sistema solar sobre o objecto em movimento.

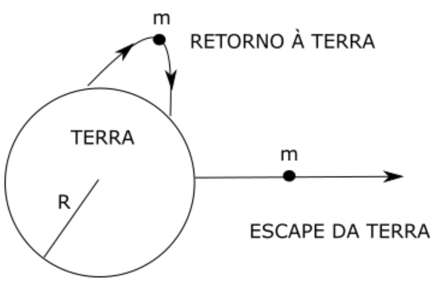

Figura 17:

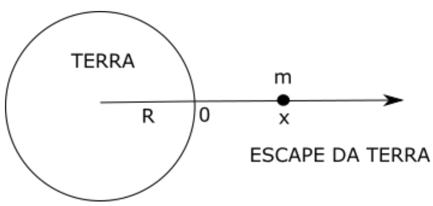

Figura 18:

Na figura 18 está representado um corpo de massa m, que se afasta numa trajectória linear alinhada com o centro da Terra. A posição relativa do corpo é dada pela coordenada x no eixo da figura, que representa a distância do corpo à Terra. O corpo tem velocidade inicial v_0 e está sujeito à força gravítica

$$F(x) \;=\; -G\frac{M_T m}{(R+x)^2}, \tag{24}$$

sendo G a *constante gravitacional*, M_T a massa da Terra, R o raio da Terra e m a massa do corpo. A força F depende apenas da posição x do corpo. O sinal '$-$' que surge no segundo membro, resulta de a força ter o sentido oposto ao do eixo de referência. A segunda lei da dinâmica, $F = ma$, afirma que um corpo de massa m, sujeito a uma força F, tem a aceleração a. Esta lei deixa, a quem a aplica, a tarefa de identificar a natureza da força que actua sobre o corpo de massa m. Pode ser uma força elecromagnética, pode ser uma força gravítica, pode ser a força de arrasto de um fluído, pode ser a força exercida por uma mola, etc. Neste caso é a força gravítica (24). É esta expressão que deve figurar no primeiro membro da fórmula $F = ma$.

$$F = ma \Leftrightarrow -G\frac{M_T m}{(R+x)^2} = ma. \tag{25}$$

Por ser $a = dv/dt$, a última igualdade pode escrever-se (eliminando m nos dois membros)

$$\begin{aligned} a &= -G\frac{M_T}{(R+x)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} &= -G\frac{M_T}{(R+x)^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Como queremos obter uma expressão para a velocidade v, podiamos pensar em integrar ambos os membros em ordem a t. Mas o segundo membro de (26) é uma função de x, e não de t. Vamos escrever ambos os membros em função da variável x, usando a regra da cadeia da derivação de funções de uma variável:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v. \tag{27}$$

Esta relação é válida, porque a posição do objecto no eixo de referência, $x(t)$, depende do tempo t decorrido desde o seu lançamento. A velocidade $v(x)$ pode ser escrita $v(x(t))$, o que dá sentido à igualdade (27). Podemos dar outra forma à fórmula (26).

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -G\frac{M_T}{(R+x)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}v &= -G\frac{M_T}{(R+x)^2} \end{aligned} \tag{28}$$

Reafirmamos que, se a posição x é função do tempo t, então tanto podemos escrever a velocidade v em função de x, como em função de t. Na igualdade (28), consideramos v como função de x. Esta equação representa uma ED de variáveis separáveis. Vamos resolvê-la para obtermos uma expressão para $v(x)$.

1. Começamos por colocar a ED na forma separada.

$$vdv = -G\frac{M_T}{(R+x)^2}dx$$

2. De seguida integramos ambos os membros em ordem às variáveis respectivas.

$$\begin{aligned}
\int v dv &= \int -G\frac{M_T}{(R+x)^2}dx \Leftrightarrow \\
\frac{v^2}{2} &= G\frac{M_T}{R+x} \Leftrightarrow \\
v^2(x) &= 2G\frac{M_T}{R+x} + C \Leftrightarrow \qquad (29)\\
v(x) &= \sqrt{2G\frac{M_T}{R+x} + C},\ C \in \mathbb{R} \qquad (30)
\end{aligned}$$

Vamos interpretar a equação (30) para ver que conslusões podemos tirar sobre a velocidade $v(x)$. Se fizermos $x = 0$, obtemos para $v(0)$,

$$v(0) = \sqrt{2G\frac{M_T}{R} + C}.$$

que é a velocidade de lançamento. Para cada constante C, obtemos uma velocidade de lançamento distinta. Que valor devemos escolher para C? O aspecto a ter em consideração é que, quanto maior for x (quanto mais afastado o corpo estiver da Terra), menor é o termo

$$2G\frac{M_T}{R+x}.$$

O valor deste termo tende para zero quando $x \to \infty$. Isto significa que o termo pode tomar um valor positivo tão próximo de zero quanto 'se queira', mas não se anula. Então, se $C < 0$, existe uma distância x para a qual

$$2G\frac{M_T}{R+x} + C = 0,$$

precisamente o que queremos evitar. Concluimos que $C = 0$ é o valor mínimo que o parâmetro C pode tomar para que se tenha $v^2(x) \neq 0$, ou seja, para que o corpo não páre no seu movimento de afastamento. Como consequência, a velocidade de escape v_e é[2]

$$\begin{aligned}
v_e &= \sqrt{2G\frac{M_T}{R}} \\
v_e &\approx \sqrt{2 \times 6.674 \times 10^{-11}\frac{5,972 \times 10^{24}}{6371 \times 10^3}} \approx 11186\ m/s \approx 40269\ km/h.
\end{aligned}$$

É esta a velocidade vertical mínima com que um corpo deve ser lançado da superfície da Terra, para não retornar ao planeta (desprezando o arrasto do ar). Note-se que v_e não depende da massa m do objecto lançado, mas sim de características intrínsecas do planeta, como M_T e R. Um exercício interessante é o cálculo da velocidade de escape de outro corpo do sistema solar, por exemplo da Lua. Os cálculos são os mesmos, substituindo M_T pela massa da Lua e R pelo raio da Lua.

[2] $G \approx 6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$, $M_T \approx 5,972 \times 10^{24} kg$, $R \approx 6371 \times 10^3 m$.

2.3.4 Exercícios

Exercício 29. Ordem de uma ED, Incógnita, Variável Independente

Indicar a ordem, a função incógnita e a variável independente de cada EDO.

(a) $y' = x$ | b $y'' + y' = 0$ | (c) $ts'' - ts' = 1 - sin(t)$

(d) $tg(x)cos(y) = -ytg(y)$ | (e) $y^{(4)} = sin(x) - y'' + y^3$ | f $\left(\frac{du}{dv}\right)^3 = 2uv$

Resolução.

(b) ED de 2ª ordem; variável independente: à falta de uma segunda variável na equação, escolhemos, por exemplo x; função incógnita: $y = y(x)$.

(f) ED de 1ª ordem; variável independente: v; função incógnita: $u = u(v)$.

■

Exercício 30. Solução Particular

Mostrar que cada função é uma solução particular da ED indicada.

(a) $y' = ay,\ y = e^{ax}$ | (b) $y'' + a^2y = 0,\ y = csen(ax)$

c $2xyy' = x^2 + y^2,\ y = -\sqrt{x^2 + Cx}$ | (d) $y' - 1 = y^2,\ y = tg(x)$

Resolução. Substituimos a expressão da função na ED e obtemos uma identidade.

$$
\begin{aligned}
(c)\ & 2x\left(-\sqrt{x^2+Cx}\right)\left(-\sqrt{x^2+Cx}\right)' = x^2 + \left(-\sqrt{x^2+Cx}\right)^2 \\
\Leftrightarrow & 2x\left(-\sqrt{x^2+Cx}\right)\left(-\frac{2x+C}{2\sqrt{x^2+Cx}}\right) = x^2 + x^2 + Cx \\
\Leftrightarrow & \ 2x((2x+C)/2) = 2x^2 + Cx \\
\Leftrightarrow & \ 2x^2 + Cx = 2x^2 + Cx
\end{aligned}
$$

■

Exercício 31. Solução Particular

Adivinhar soluções particulares para as seguintes equações diferenciais.

$(a)\ \dfrac{dy}{dx} = y \qquad (b)\ \dfrac{dy}{dx} = y^2 \qquad (c)\ \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

$(d)\ \dfrac{dy}{dx} + y = 1 \qquad (e)\ \dfrac{dy}{dx} + y = e^x \qquad (f)\ \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

Exercício 32. Domínio de uma Solução

Mostrar que a equação diferencial $y' + y^2 = 0$ admite as soluções $y = 1/x$, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y = 1/(x+1)$, em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $y = 0$, em $\mathbb{R}$.

Exercício 33. Domínio de uma Solução

Mostrar que a equação diferencial $y'' = 0$ não admite a solução $y = |x-3|$ em $\mathbb{R}$.

Resolução. Por ser

$$y = |x-3| = \begin{cases} x-3, \ x \geq x \\ -x+3, \ x < 3, \end{cases}$$

temos

$$y' = (|x-3|)' = \begin{cases} (x-3)', \ x > 3 \\ (-x+3)', \ x < 3 \end{cases} = \begin{cases} 1, \ x > 3 \\ -1, \ x < 3, \end{cases}$$

e

$$y'' = (|x-3|)'' = \begin{cases} (1)', \ x > 3 \\ (-1)', \ x < 3 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ x > 3 \\ 0, \ x < 3. \end{cases}$$

Como consequência, a função é solução da ED em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mas não em $\mathbb{R}$, pois a sua derivada de segunda ordem não está definida no ponto $x = 0$. ■

Exercício 34. EDs de Variáveis Separáveis

Resolver as equações diferenciais usando separação de variáveis.

$(a)\ y' = y/x \qquad (b)\ y' = x^2y^3 \qquad (c)\ y' = e^{x+y}$

$(d)\ \dfrac{\sqrt{1+x}}{1+y}y' = x \qquad (e)\ y' = yx^2 \qquad$ f $\ y' - \dfrac{y^2-y}{sen(x)} = 0$

Resolução. (f) A ED é de variáveis separáveis:

$$y' - \frac{y^2-y}{\sin(x)} = 0 \Leftrightarrow y' = (y^2-y)\frac{1}{\sin(x)}$$

Substituimos y' por dy/dx e separamos variáveis:

$$y' = (y^2 - y)\frac{1}{\sin(x)} \underset{(y\neq 0),\,(y\neq 1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{y^2-y}dy = \frac{1}{\sin(x)}dx$$

Observemos que tanto $y = 0$ como $y = 1$ são soluções particulares da ED.

Integramos ambos os membros:

$$\int \frac{1}{y^2-y}dy = \int \frac{1}{\sin(x)}dx \tag{31}$$

Calculamos o integral $I_1 = \int \frac{1}{y^2-y}dy$:

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2-y}dy = \int \frac{1}{y(y-1)}dy$$

Decompomos a função racional numa soma de frações parciais:

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

Calculamos os coeficientes A, B:

-multiplicamos ambos os membros por $(y-1)y$:

$$1 = A(y-1) + By$$

-como a igualdade se deve verificar para todos os valores de y, calculamos A e B atribuindo a y valores convenientes:

fazendo $y = 1$:

$$1 = A(1-1) + B(1) \Rightarrow B = 1$$

fazendo $y = 0$:

$$1 = A(0-1) + 0 \Rightarrow A = -1$$

Temos:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{y(y-1)}dy = \int \frac{-1}{y}dy + \int \frac{1}{y-1} \\ &= -\ln(|y|) + \ln(|y-1|) + C = \ln\left(\frac{|y-1|}{|y|}\right) + C. \end{aligned}$$

Calculamos o integral $I_2 = \int \frac{1}{\sin(x)}dx$:

$$I_2 = \int \frac{1}{\sin(x)}dx = ln(|csc(x) - cot(x)|) + C = \ln(|tan(x/2)|) + C$$

Substituimos os integrais I_1 e I_2 na equação (31):

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{|y-1|}{|y|}\right) = \ln(|\tan(x/2)|) + C_1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|y-1|}{|y|} = e^{C_1} e^{\ln(|\tan(x/2)|)}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|y-1|}{|y|} = e^{C_1}|\tan(x/2)|\\
\Leftrightarrow\ &\frac{y-1}{y} = \pm e^{C_1}\tan(x/2)\\
\Leftrightarrow\ &y-1 = yC\tan(x/2)\\
\Leftrightarrow\ &y - yC\tan(x/2) = 1\\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{1}{1-C\tan(x/2)},\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

A solução geral da ED é o conjunto das funções

$$y = \frac{1}{1-C\tan(x/2)},\ C \in \mathbb{R},$$

e

$$y = 0.$$

Notar que, fazendo $C = 0$ na família de soluções, obtemos a solução particular $y = 1$. ∎

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol I, N. Piskounov.

2. *Elementary Differential Equations*, William F. Trench (free download - link).