

1.

Sessão de trabalho com o GPT. O objetivo é que, no final do semestre, os alunos tenham treinado o uso da IA como uma ajuda na aprendizagem. Neste sentido, vamos procurar que diminuam os casos de Não consegui fazer, ou Não compreendi a pergunta, se têm 'alguém' com quem treinar. Podemos pedir a um ou outro aluno um breve comentário à sua interação com a IA, só para avaliar o impacto do processo.

1. Sessão de trabalho com o ChatGPT: revisão sobre Derivadas Parciais

Escreve os seguintes prompts no ChatGPT e analisa as respostas. No TPC debes colocar apenas o que é pedido a **bold**.

- (a) *Explica o que é a derivada parcial de uma função de três formas: 1) Como se eu fosse um estudante de 14 anos; 2) Como se eu fosse um estudante do ensino superior; 3) Como se eu fosse o vencedor de um Prémio Nobel e tivesse QI 200.*
- (b) *Resolve detalhadamente dois exemplos de cálculo das derivadas parciais de primeira e de segunda ordens de uma função.*
- (c) *Dá-me duas funções para eu treinar os cálculos de derivadas parciais de primeira e segunda ordens. **Apresenta os cálculos de uma delas no teu tpc.***
- (d) *Resolve um exemplo com alguns erros, mas não digas onde estão para eu descobrir. **Em não mais de uma linha, apresenta um qualquer dos erros detetados.***
- (e) *O que significa $f'_x(2,1) = -2$? Apresenta uma aplicação muito simples deste resultado, na engenharia ou na análise de funções. **Escreve o significado, em não mais de duas linhas.***

2.

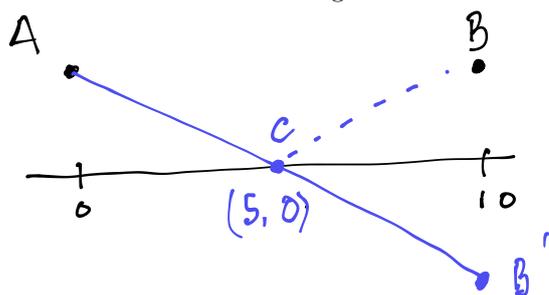
Exercícios

Exerc 18

1. Da fórmula (1) deduzir a fórmula (2) (apontamentos na Semana 3, pg 21).

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 + 9} &= \frac{(10 - x)^2}{(10 - x)^2 + 25} \\ \Leftrightarrow x^2[(10 - x)^2 + 25] &= (10 - x)^2[x^2 + 9] \\ \Leftrightarrow 25x^2 &= 9(10 - x)^2 \\ \Leftrightarrow x = -15 \vee x &= \frac{15}{4} = 3.75. \end{aligned}$$

2. Resolver geometricamente o problema se os pontos forem $A(0, 3)$, ~~$A(0, 3)$~~ $B(10, 3)$



Dados os pontos A e B , para obter o ponto C , sobre o eixo dos x , que minimize $AC + BC$:

- marcar o ponto $B'(10, -3)$, simétrico de B em relação ao eixo
- Traçar o segmento $\overline{AB'}$. O ponto C fica determinado no eixo.

Exerc 19 (a)

Efetuar as divisões indicadas. Para cada caso, representar a divisão na forma

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \cdot \text{Cociente} + \text{Resto}.$$

$$(a) (4x^2 + 4x + 5) \div (2x - 1)$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 4x + 5 \quad | \quad 2x - 1 \\ - 4x^2 + 2x \quad \quad \quad 2x + 3 \\ \hline 6x + 5 \\ - 6x + 3 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\frac{4x^2 + 4x + 5}{2x - 1} = 2x + 3 + \frac{8}{2x - 1}$$

Exerc 20 (b)

Para cada caso, verificar que cada valor r indicado é uma raiz do polinómio $p(x)$, isto é, que satisfaz $p(r) = 0$. Mostrar que a divisão $p(x) \div (x - r)$ tem resto zero. No caso da alínea (b), fatorizar o polinómio no produto de uma consante por polinómios do 1º grau.

$$(b) p(x) = 2x^2 + 2x - 4, \quad r = -2, \quad r = 1$$

1. Verificação das raízes

Para $r = -2$:

$$p(-2) = 2(-2)^2 + 2(-2) - 4 = 2(4) - 4 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$

Para $r = 1$:

$$p(1) = 2(1)^2 + 2(1) - 4 = 2(1) + 2 - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$$

2. Divisão de $p(x)$ por $(x - r)$

Exemplo: $2x^2 + 2x - 4 \quad \overline{)x-1}$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x - 4 \\ - (2x^2 + 2x) \\ \hline 4x - 4 \\ - (4x - 4) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x + 4 \\ \downarrow \\ \hline \end{array}$$

$2x^2 + 2x - 4 = 2(x+2)(x-1)$

Exerc 21 (b)

Resolver os integrais (estuda a secção de Integração de Funções Racionais).

$$(b) \int \frac{x}{2x^2 + x + 4} dx$$

$$\mathbb{I} = \int \frac{x}{2x^2 + x + 4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{2x^2 + x + 4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x + 1 - 1}{2x^2 + x + 4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\int \frac{4x + 1}{2x^2 + x + 4} dx - \int \frac{1}{2x^2 + x + 4} dx \right]$$

$\underbrace{\int \frac{4x + 1}{2x^2 + x + 4} dx}_{\mathbb{I}_1} \quad - \quad \underbrace{\int \frac{1}{2x^2 + x + 4} dx}_{\mathbb{I}_2}$

$$\mathbb{I}_1 = \int \frac{(2x^2 + x + 4)'}{2x^2 + x + 4} dx = \ln |2x^2 + x + 4| + C$$

$$\underline{I_2}: \quad 2x^2 + x + 4 = \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{31}{8}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\frac{31}{8} + \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{\frac{31}{8} \left(1 + \frac{8}{31} \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right)} dx$$

$$= \frac{8}{31} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{31}} x + \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{31}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{8}{31} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{4x+1}{\sqrt{31}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{8}{31} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{4x+1}{\sqrt{31}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{31}}}{1 + \left(\frac{4x+1}{\sqrt{31}}\right)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{31}} \arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{31}}\right) + C$$

$$\therefore$$

$$\underline{I} = \frac{1}{4} \left(\ln|2x^2 + x + 4| - \frac{2}{\sqrt{31}} \arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{31}}\right) \right) + C$$

Exerc 23 (j)

Calcular as derivadas das funções. Se cada função representar o custo, em euros, de x gramas de um produto, qual o significado da função derivada?

$$(j) f(x) = (\tan(3x) - 2x)^2$$

Aplicamos a regra da cadeia. Seja $g(x) = \tan(3x) - 2x$, então:

$$f(x) = g(x)^2$$

Usamos a derivada da potência:

$$f'(x) = 2g(x) \cdot g'(x)$$

Agora, calculamos $g'(x)$:

$$g'(x) = (\tan(3x) - 2x)' = 3 \sec^2(3x) - 2$$

Substituímos em $f'(x)$:

$$f'(x) = 2(\tan(3x) - 2x) \cdot (3 \sec^2(3x) - 2)$$

$f'(x)$ representa a taxa de variação instantânea do custo com a quantidade, e vem em (euro/grama).

Exerc 24 (b) (d)

Calcular as primitivas das funções. Se cada função representar a velocidade, em (metros/segundo), e x representar o tempo, em segundos, quais as unidades das funções primitivas?

$$(b) f(x) = \ln(|x|)$$

$$(d) f(x) = -3e^{-3x-1}$$

(b)

$$I = \int \ln(|x|) dx$$

Usamos a integração por partes, com $u = \ln|x|$, $u' = 1/x$ e $v' = 1$, $v = x$:

$$\int \ln|x| dx = uv - \int u'v dx = x \ln|x| - \int \frac{1}{x} x + C = x \ln|x| - x + C$$

(d):

$$I = \int -3e^{-3x-1} dx$$

Usamos a substituição $u = -3x - 1$, $du = -3dx \Rightarrow dx = du/(-3)$.

$$I = \int -3e^u \frac{du}{-3} = \int e^u du = e^u + C$$

Voltando a $u = -3x - 1$:

$$I = e^{-3x-1} + C$$

$f(x)$ vem em (m/s) e representa uma velocidade; x vem em segundos e representa um tempo; $F(x)$ vem em metros (m) e representa um deslocamento.

Exerc 25 (d)

Para cada uma das funções no exercício ??, calcular, se possível, $\int_1^3 f(x)dx$. Interpretar o significado físico do resultado.

$$\int_1^3 -3e^{-3x-1} dx = e^{-3x-1} \Big|_1^3 = e^{-10} - e^{-4} \approx -0.02 \text{ metros.}$$

Interpretação: entre os instantes $t=1$ e $t=3$, um móvel com velocidade $-3e^{-3x-1}$ deslocou-se cerca de 0.02 metros no sentido contrário ao do eixo dos xx .

3.

Pergunta ao ChatGPT: *Em matemática, o que significam os termos **majorante** e **minorante**? Dá exemplos. Escreve um exemplo para cada um dos termos, em não mais de uma linha para cada.*

Possível resposta:

Em matemática, um **majorante** de um conjunto S é um número que é maior ou igual a todos os elementos de S , enquanto um **minorante** é um número que é menor ou igual a todos os elementos de S .

Exemplos:

- **Majorante:** Para $S = \{1, 2, 3\}$, o número 4 é um majorante porque é ' \geq ' a qualquer elemento do conjunto;
- **Minorante:** Para $S = \{1, 2, 3\}$, o número 0 é um minorante porque é ' \leq ' a qualquer elemento do conjunto.