Resolução do TPC da Semana 3 – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/∼mar)

- Resolver os exercícios 1 h, 2 g, 3 f, 4 d, 5 b, 7 b, 8 d g. O trabalho deve ser individual. Depois de feito, é muito proveitoso trabalhar em grupo para verificar resultados e tirar dúvidas.
- O que significam os termos **teorema** e **corolário**?

RESOLUÇÂO

1 h)

$$-1 < sin(\pi/12) < 1 \Rightarrow 1 - sin(\pi/12) > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1 - sin(\pi/12)} > 0.$$

2 g) (resolução por ChatGPT. Achas esclarecedora?)

(g) $[-2,-1[\quad \Rightarrow \quad p \in [-2,-1)$

$\Rightarrow$ p pode começar por -2 (ex: -2.0), ou por -1 (ex: -1.9)

$\Rightarrow$ Não há dígitos garantidos que se mantenham em todo o intervalo

$\Rightarrow$ **Dígitos corretos conhecidos:** 0

$\Rightarrow$ **Exemplo no interior:** $-1{,}5$

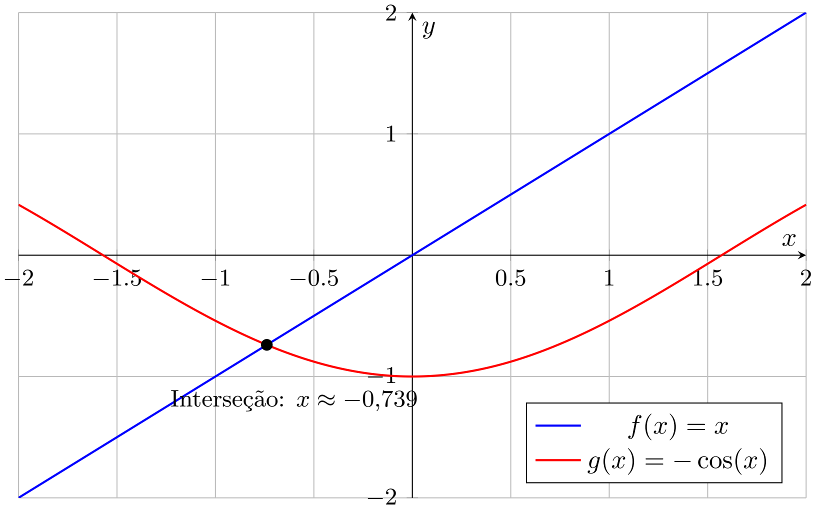
3 f)

$$x + \cos(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -\cos(x)$$

Análise:

- Procuramos interseções: $x = -\cos(x)$.
- Como $-\cos(x) \in [-1,1]$, a solução deve estar em $x \in [-1,1]$.
- Um esboço gráfico mostra que existe uma solução numérica no intervalo $[-1,0]$ de valores de x.
- A equação tem uma raiz real.

Gráfico das funções (gerado por ChatGPT):



4 d) (Solução gerada por ChatGPT. O que não entenderes pede-lhe para te explicar) Dado o intervalo aberto $]-2,-1[$, o ponto médio é:

$$m = \frac{-2+(-1)}{2} = -\frac{3}{2}$$

O erro absoluto máximo ao usar m como aproximação de um número $p \in]-2,-1[$ é:

$$\text{Erro máximo} = \sup |p-m| = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$$

Como o número p não pode ser exatamente -2 nem -1, esse valor é o **supremo** do erro absoluto, mas não é um **máximo** (não é atingido).

$$\boxed{\text{Menor majorante (supremo) do erro absoluto: } \frac{1}{2}}$$

5 b) (Solução gerada por ChatGPT. O que não entenderes pede-lhe para te explicar)

Queremos determinar o número mínimo de iterações do método da bisseção necessário para obter uma aproximação do zero com erro absoluto inferior a $\varepsilon = 0{,}001$, no intervalo $\left[-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

Calculamos o comprimento do intervalo:

$$b-a = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

Número mínimo de iterações:

$$n \geq \log_2\left(\frac{13/6}{0{,}001}\right) = \log_2\left(\frac{13000}{6}\right) = \log_2(2166{,}66\ldots)$$

Como:

$$\log_2(2166{,}66) \approx 11{,}08 \Rightarrow \boxed{n = 12}$$

7 b) (Solução gerada por ChatGPT. O que não entenderes pede-lhe para te explicar)

Resolução da equação $\ln(x) + 2x = 0$ pelo método da bisseção

Seja $f(x) = \ln(x) + 2x$. Vamos aplicar o método da bisseção para encontrar uma aproximação de uma raiz da equação $f(x) = 0$, seguindo os passos indicados.

(a) **Achar um intervalo contendo uma raiz**

A função $f(x) = \ln(x) + 2x$ é contínua no seu domínio $(0, +\infty)$. Vamos testar alguns valores:

$$f(0.1) = \ln(0.1) + 0.2 \approx -2.3026 + 0.2 = -2.1026$$

$$f(0.5) = \ln(0.5) + 1 \approx -0.6931 + 1 = 0.3069$$

Como $f(0.1) < 0$ e $f(0.5) > 0$, e a função é contínua, pelo *Teorema de Bolzano*, existe pelo menos uma raiz no intervalo:

$$\boxed{[0.1,\ 0.5]}$$

(b) **Número mínimo de iterações para erro inferior a** $\varepsilon = 10^{-6}$

O erro máximo do método da bisseção após n iterações é dado por:

$$\frac{b-a}{2^n}$$

Queremos garantir que esse erro seja inferior a 10^{-6}, então:

$$\frac{0.5-0.1}{2^n} < 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0.4}{2^n} < 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad 2^n > \frac{0.4}{10^{-6}} = 4 \times 10^5$$

$$\Rightarrow n > \log_2(4 \times 10^5) = \log_2(4) + \log_2(10^5) = 2 + 5\log_2(10) \approx 2 + 5 \cdot 3.32 = 18.6$$

Arredondando para o inteiro imediatamente superior:

$$\boxed{n = 19}$$

(c) (c) — Primeiras 3 iterações do método da bisseção

Vamos aplicar o método da bisseção à equação:

$$f(x) = \ln(x) + 2x = 0$$

usando o intervalo inicial $[a, b] = [0.1, 0.5]$ e erro absoluto máximo permitido:

$$\varepsilon = 10^{-6}$$

Em cada iteração, vamos:

- Calcular o ponto médio $m = \frac{a+b}{2}$
- Avaliar $f(m)$
- Determinar o novo intervalo onde há mudança de sinal
- Calcular o erro máximo atual: $E = \frac{b-a}{2}$
- Comparar E com ε

Iteração 1:

$$a = 0.1, \quad b = 0.5, \quad m_1 = \frac{0.1 + 0.5}{2} = 0.3$$

$$f(0.3) = \ln(0.3) + 0.6 \approx -1.204 + 0.6 = -0.604$$

$$f(a) = f(0.1) < 0, \quad f(m_1) < 0 \Rightarrow \text{Raiz está em } [0.3, 0.5]$$

$$\text{Erro máximo: } E_1 = \frac{0.5 - 0.1}{2} = 0.2 \gg \varepsilon$$

Ainda não atingimos a precisão desejada; avançamos.

Iteração 2:

$$a = 0.3, \quad b = 0.5, \quad m_2 = \frac{0.3 + 0.5}{2} = 0.4$$

$$f(0.4) = \ln(0.4) + 0.8 \approx -0.9163 + 0.8 = -0.1163$$

$$f(a) = f(0.3) < 0, \quad f(m_2) < 0 \Rightarrow \text{Raiz está em } [0.4, 0.5]$$

$$\text{Erro máximo: } E_2 = \frac{0.5 - 0.3}{2} = 0.1 \gg \varepsilon$$

Erro ainda demasiado grande; avançamos.

Iteração 3:

$$a = 0.4, \quad b = 0.5, \quad m_3 = \frac{0.4 + 0.5}{2} = 0.45$$

$$f(0.45) = \ln(0.45) + 0.9 \approx -0.7985 + 0.9 = 0.1015$$

$$f(a) = f(0.4) < 0, \quad f(m_3) > 0 \Rightarrow \text{Raiz está em } [0.4, 0.45]$$

$$\text{Erro máximo: } E_3 = \frac{0.5 - 0.4}{2} = 0.05 \gg \varepsilon$$

Ainda não atingimos o erro exigido; é necessário continuar.

Conclusão: Após 3 iterações, reduzimos o intervalo de $[0.1,\ 0.5]$ para $[0.4,\ 0.45]$, mas ainda estamos longe de atingir o erro absoluto inferior a 10^{-6}. O processo deverá continuar até que o erro seja inferior a esse valor.

8 (Solução gerada por ChatGPT. O que não entenderes pede-lhe para te explicar)

(d)

Resolver a equação:

$$\sqrt{x^2+9} = 5$$

Passo 1: Eliminar a raiz quadrada

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$(\sqrt{x^2+9})^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 9 = 25$$

Passo 2: Isolar o termo com x

$$x^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

Passo 3: Verificação das soluções

- Para $x = 4$: $\quad \sqrt{4^2+9} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \quad \checkmark$
- Para $x = -4$: $\quad \sqrt{(-4)^2+9} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \quad \checkmark$

Solução final:

$$\boxed{x = \pm 4}$$

(g)

Resolver a equação:

$$cb^x = a$$

Passo 1: Isolar a potência

$$b^x = \frac{a}{c}$$

Passo 2: Aplicar logaritmo dos dois lados

$$\log(b^x) = \log\left(\frac{a}{c}\right) \Rightarrow x \cdot \log b = \log\left(\frac{a}{c}\right)$$

Passo 3: Isolar o x

$$\boxed{x = \frac{\log\left(\frac{a}{c}\right)}{\log b}}$$

Definições

Teorema: proposição que é demonstrada logicamente a partir de axiomas e resultados anteriores.

Corolário: proposição que resulta de forma imediata como consequência de um teorema. Sua prova é direta, com base no resultado do teorema.

Exemplo

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Trigonometria)**.** *Para todo ângulo real x, temos:*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Corolário 1. *Não existe nenhum ângulo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\sin x = 0$ e $\cos x = 0$ simultaneamente.*

Demonstração do corolário:
Suponha, por absurdo, que existisse um ângulo x tal que:

$$\sin x = 0 \quad \text{e} \quad \cos x = 0$$

Então:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0^2 + 0^2 = 0$$

Mas isso contradiz o Teorema Fundamental da Trigonometria, que afirma que:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Logo, nossa suposição é falsa. Portanto, não existe tal ângulo.

■

Conclusão

O corolário foi deduzido diretamente do teorema, mostrando que é impossível que seno e cosseno sejam nulos ao mesmo tempo. Esse é um exemplo clássico de como um corolário se segue de maneira imediata a partir de um teorema já demonstrado.