

Capítulo 1. Complementos sobre Derivadas e Integrais

As operações aritméticas, $+$, $-$, $\div$, $\times$, e a operação de limite, permitem construir os operadores de derivação e integração, que são o coração do Cálculo.

Integral

Tal como uma multiplicação pode reverter uma divisão, no sentido em que de $x \div 3 = 4$ podemos recuperar x efectuando a multiplicação 3×4 , também, a integração é uma operação que pode reverter uma derivação, no sentido em que de $f'(x) = 2x$ podemos recuperar $f(x)$, a menos de uma constante, calculando o integral indefinido de $2x$. Tal como a operação de derivação é uma máquina sofisticada para efectuar divisões, a operação de integração é uma máquina sofisticada para efectuar multiplicações.

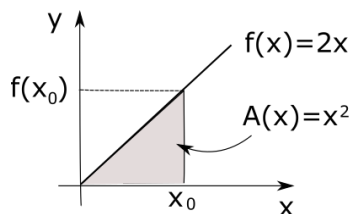
Exemplo

Função área

A figura 1 representa o gráfico da função $f(x) = 2x$. A região triangular sombreada é delimitada pelo gráfico da função e pelo eixo das abcissas no intervalo $[0, x_0]$ de valores de x , e a função $A(x) = x^2$ representa a sua área. Se for $x_0 = 5$, por exemplo, a área da região sombreada correspondente é

$$A(x) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{x_0 \times 2x_0}{2} = x_0^2 \Rightarrow A(5) = 5^2 = 25. \quad (1)$$

Podemos verificar que a derivada da função área $A(x)$ é a função $f(x)$, isto é $A'(x) = f(x) \Leftrightarrow (x^2)' = 2x$.



$$\begin{array}{ccccc} A(x) & \xrightarrow{D} & f(x) & \xrightarrow{D} & f'(x) \\ & \xleftarrow{I} & & \xleftarrow{I} & \end{array}$$

Figura 1: A função área $A(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$.

$A(x)$ é uma *função primitiva* de $f(x)$. O conjunto de todas as funções primitivas de $f(x)$ diz-se *integral indefinido* de $f(x)$ e escreve-se:

$$\int f(x)dx = A(x) + C \Rightarrow \int 2xdx = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Qualquer função primitiva $x^2 + C$ é candidata a função área de $f(x) = 2x$. A escolha do parâmetro C depende do valor de $A(x)$ para algum valor particular de x . Como para $x = 5$, por exemplo, temos $A(5) = 5^2 = 25$, então deve ser $5^2 + C = 25$ o que dá $C = 0$, sendo x^2 a primitiva de $f(x) = 2x$ pretendida. O valor da área da região triangular correspondente ao intervalo $[0, x_0]$ de valores de x é $A(x_0)$ e escreve-se

$$\int_0^{x_0} 2x dx = A(x_0) - A(0) \quad (3)$$

com $A(0) = 0$.

A afirmação feita acima de que $A'(x) = f(x)$ é uma consequência da chamada *parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo*.

Teorema Fundamental do Cálculo - parte 1. *Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $F(x) = \int_a^x f(x) dx$. Então a derivada $F'(x)$ existe em todos os pontos do intervalo (a, b) e $F'(x) = f(x)$.*

□

A parte 2 do *Teorema Fundamental do Cálculo* é a seguinte.

Teorema Fundamental do Cálculo - parte 2. *Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ neste intervalo. Então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (4)$$

□

Esta parte 2 do teorema permite-nos calcular a área da região correspondente ao intervalo $[3, 5]$ de valores de x , na região sombreada da figura 1, que é dada por $A(5) - A(3)$.

$$\int_3^5 2x dx = A(5) - A(3) = 5^2 - 3^2 = 16. \quad (5)$$

Neste cálculo usámos a primitiva x^2 de $2x$, mas poderíamos ter usado qualquer outra primitiva $x^2 + C$, como se mostra a seguir para o caso geral.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a). \quad (6)$$

Como um integral representa um produto envolvendo $f(x)$ e x , as unidades em que se exprime são o produto das unidades de $f(x)$ e das unidades de x .

O valor de um integral definido representa uma área somente quando o gráfico da função integranda não

toma valores negativos. No caso geral temos (figura 2) temos

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Área A} - \text{Área B},$$

, sendo o valor do integral positivo somente quando a região de integração definida pelo parte do gráfico que fica acima do eixo das abcissas tem uma área maior que a da região de integração definida pela parte do gráfico que fica abaixo do eixo das abcissas.

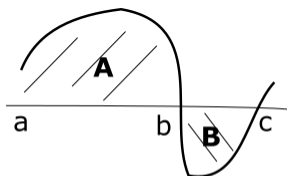


Figura 2:

Algumas Aplicações dos integrais. Exercícios.

Exercício

Área de uma região definida por duas curvas

Determinar a área da região finita delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x$.

Na figura 3 estão representados os gráficos das duas funções. A região que queremos considerar corresponde ao intervalo $[a, b]$ de valores de x . A expressão que nos dá a área dessa região é

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Note-se que o gráfico de $g(x)$ está acima do gráfico de $f(x)$ neste intervalo. A justificação para este integral fica clara se o escrevermos da forma

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \int_a^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^d (g(x) - f(x)) dx + \int_d^b (g(x) - f(x)) dx. \quad (7)$$

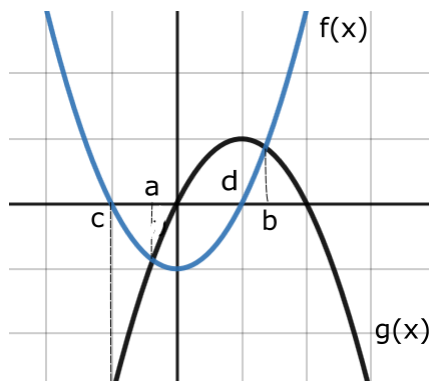


Figura 3: Área da região delimitada por duas curvas no intervalo $[a, b]$.

Vejam os significados de cada um dos três integrais no segundo membro de (7).

1. No intervalo $[a, 0]$ as regiões delimitadas pelos gráficos e pelo eixo das abscissas estão ambas abaixo deste eixo, o que significa que tanto $\int_a^0 f(x)dx$ como $\int_a^0 g(x)dx$ são negativos. O integral $\int_a^0 (g(x) - f(x)) dx$ corresponde a uma diferença de áreas.
2. No intervalo $[0, d]$ as regiões delimitadas pelos gráficos e pelo eixo das abscissas estão acima do eixo das abscissas, no caso de $g(x)$, e abaixo deste eixo, no caso de $f(x)$. Daqui decorre $\int_0^d f(x)dx < 0$ e $\int_0^d g(x)dx > 0$. O integral $\int_0^d (g(x) - f(x)) dx$ corresponde a uma soma de áreas.
3. No intervalo $[d, b]$ as regiões delimitadas pelos gráficos e pelo eixo das abscissas estão ambas acima deste eixo, o que significa que tanto $\int_d^b f(x)dx$ como $\int_d^b g(x)dx$ são positivos. O integral $\int_d^b (g(x) - f(x)) dx$ corresponde a uma diferença de áreas.

Para calcular o integral em (7) é preciso determinar os valores de a e b . Como são os dois únicos valores de x para os quais se tem $f(x) = g(x)$, temos que resolver esta equação.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 1 = -x^2 + 2x \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) \vee \left(x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

O cálculo da área é imediato.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (g(x) - f(x)) dx &= \int_{(1-\sqrt{3})/2}^{(1+\sqrt{3})/2} (-2x^2 + 2x + 1) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{(1-\sqrt{3})/2}^{(1+\sqrt{3})/2} \\
 &= -\frac{2}{3} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^3 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) - \\
 &\quad - \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^3 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\
 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

A área da região delimitada pelas duas curvas é $\sqrt{3}$.

Exercício

Determinar a área da região finita delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x$ no intervalo $[c, b]$.

Exercício

Comprimento de um arco de curva

Usar um integral para obter uma fórmula para o comprimento do *arco de curva* (= bocado de curva) correspondente ao gráfico de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ de valores de x .

Na esquerda da figura 4 está representada uma curva a traço grosso, de comprimento L_1 . Podemos obter um valor aproximado para L_1 somando as medidas de segmentos de recta apoiados na curva. Seja L_3 a soma das medidas dos segmentos de recta de cor vermelha. É imediato verificar que $L_3 < L_1$ (porquê?). Uma aproximação melhor que L_3 pode ser conseguida substituindo cada segmento de recta a vermelho por dois segmentos tracejados, conforme se vê na imagem esquerda da figura. Se L_2 é o comprimento da linha quebrada a tracejado, podemos escrever $L_3 < L_2 < L_1$. Podemos melhorar ainda mais a aproximação, substituindo cada segmento de recta a tracejado por dois segmentos de recta apoiados na curva a traço grosso, somando depois os comprimentos dos segmentos que formam a linha quebrada resultante. Repetindo sucessivamente o processo, vamos obtendo linhas quebradas com cada vez mais segmentos, cujos comprimentos são aproximações cada vez melhores para o comprimento L_1 .

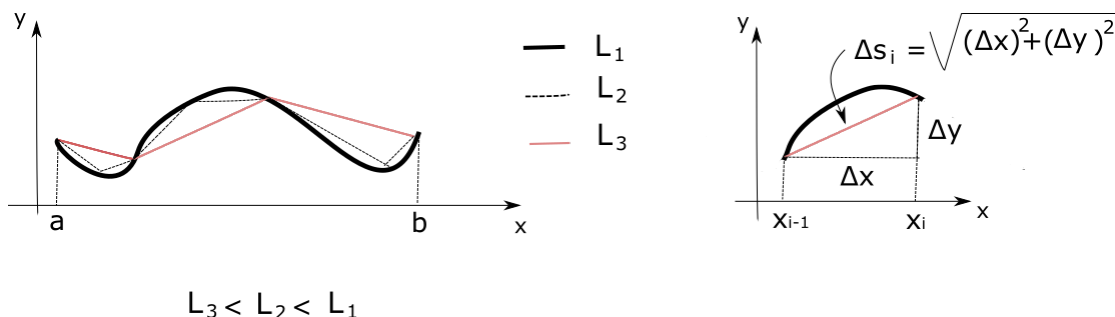


Figura 4: Comprimento de um arco de curva.

Na imagem da direita no figura 4 está representado um arco da curva e um segmento de recta aproximante (a vermelho). O comprimento Δs_i do segmento de recta pode ser calculado usando o teorema de Pitágoras e as diferenças de ordenadas, Δy_i , e de abcissas, Δx , dos pontos inicial e final do arco. A figura sugere a forma de obter uma linha quebrada formada pela justaposição de segmentos de recta: dividimos o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais de medida Δx , correspondendo a cada uma um pedaço da curva e o respectivo segmento de recta aproximante. O comprimento do i -ésimo segmento é $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$. A soma S_n dos comprimentos dos n segmentos da linha quebrada é

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ a taxa de variação $\Delta y_i / \Delta x$ tende para a derivada da função y' no ponto x_i . Se o limite existe, então pode exprimir-se como um integral definido, bastando que a função $\sqrt{1 + (y')^2}$ seja contínua no intervalo $[a, b]$, o que acontece se $y' = f'(x)$ for contínua neste intervalo. Obtemos uma fórmula para o comprimento de uma curva suave $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$ de valores de x .

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Exercício

Volume de um sólido de revolução

Usar um integral para determinar a fórmula do volume de um sólido gerado pela revolução da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo das abcissas.

Na revolução de uma curva em torno de um eixo, cada ponto da curva descreve uma trajectória circular em torno do eixo e perpendicular a este. O sólido cuja superfície é formada pela reunião de todas as

trajectórias circulares dos pontos da curva, diz-se *sólido de revolução*.

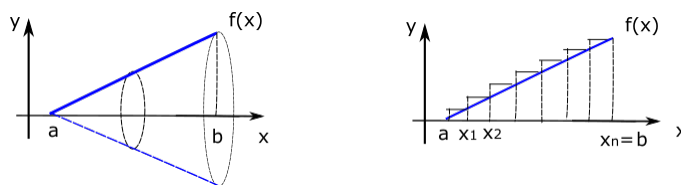


Figura 5: Sólido de revolução.

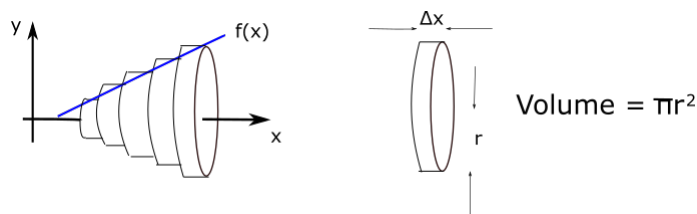


Figura 6: Volume de um sólido de revolução.

Na imagem esquerda da figura 5 está esboçado o cone gerado pela revolução do segmento de recta a traço grosso em torno do eixo das abcissas. Podemos obter uma aproximação para o volume do cone a partir da revolução em torno do eixo das abcissas da função em escada representada na imagem da direita na figura 5. A largura de cada ‘degrau’ é $\Delta x = (b - a)/n$. O sólido gerado é a sequência de discos na imagem da esquerda da figura 6. O volume V_n deste sólido obtém-se somando os volumes dos discos envolvidos.

$$V_n = \sum_{k=1}^n \pi f^2(x_k) \Delta X, \quad (8)$$

sendo $\pi f^2(x_k)$ a área da base do k-ésimo disco e Δx a sua largura. Quanto maior for o número de discos usado, melhor a aproximação ao valor do volume do sólido. O valor V deste volume obtém-se calculando o limite do somatório quando $n \rightarrow \infty$.

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \pi f^2(x_k) \Delta X = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Esta é a expressão geral para o volume do sólido gerado pela revolução do arco de curva definido por $f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo das abcissas. Como exemplo, se $f(x) = x^2$ e $[a, b] = [1, 4]$, o volume V do sólido de revolução é calculado da forma que se segue.

$$V = \int_1^4 \pi x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^4 = 1023\pi/5$$

Lição 4 - Integração de funções racionais

Uma *função racional* na variável x é da forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad (9)$$

sendo $p(x)$ e $q(x)$ polinómios. Se $\text{grau}(p) < \text{grau}(q)$ a função racional diz-se *própria*, dizendo-se *imprópria* no caso contrário. As técnicas de integração que vamos estudar aplicam-se a funções racionais próprias. No caso da integração de uma função racional imprópria, efectua-se previamente a divisão $p(x) \div q(x)$ (usando um algoritmo adaptado do algoritmo usual da divisão aritmética), que permite escrever $p(x)$ da forma $p(x) = q(x)Q(x) + R(x)$, com $\text{grau}(R) < \text{grau}(q)$. O integral de (9) pode então ser escrito da forma

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{q(x)} dx \quad (10)$$

sendo $R(x)/q(x)$ uma função racional própria.

A propósito da discussão da integração de funções racionais, vamos rever alguns aspectos sobre números complexos, como sejam a sua representação e o cálculo de raízes e potências.¹ Vamos também discutir alguns aspectos da factorização de polinómios.

Números complexos

O conjunto dos números complexos representa-se por $\mathbb{C}$ e é constituído por todos os números da forma $z = x + iy$, sendo $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. x designa-se por *parte real* do número z e abrevia-se neste texto por $\text{Re}(z)$; y designa-se por *parte imaginária* do número z e abrevia-se neste texto por $\text{Im}(z)$. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ está contido no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, porque qualquer número real x pode ser escrito da forma $x + i0$. Se $\text{Im}(z) = 0$ o número z diz-se real; se $\text{Re}(z) = 0$, o número z diz-se *imaginário puro*.

¹O uso dos números complexos na física e na engenharia tem como finalidade simplificar a formalização matemática, no que diz respeito aos procedimentos de cálculo e à simbologia das fórmulas.

Exemplos

1. $z = -1/2 - i3$	$Re(z) = -1/2$	$Im(z) = -3$
2. $z = i\sqrt[3]{5} + \pi$	$Re(z) = \pi$	$Im(z) = \sqrt[3]{5}$
3. $z = -27$	$Re(z) = -27$	$Im(z) = 0$
4. $z = 11i$	$Re(z) = 0$	$Im(z) = 11$

Unidade imaginária

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = i.i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$$

$$i^3 = i^2.i = -i$$

$$i^4 = i^2i^2 = -1(-1) = 1$$

...

Representação de números complexos

Os números complexos aparecem representados na literatura de duas formas. A forma *cartesiana*, $z = x + iy$, é a mais adequada para operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (figura 7). A forma *polar* ou *trigonométrica*, $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ ou $z = |z|e^{i\theta}$, com $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (*módulo* de z), é mais adequada para o cálculo de potências, raízes e logaritmos (figura 7).² ³ O ângulo θ designa-se por *argumento* de z e escreve-se $\arg(z)$. Este argumento pode tomar uma infinidade de valores que diferem entre si por múltiplos de 2π . O valor do argumento pertencente ao intervalo $]-\pi, \pi]$ chama-se *argumento principal* de z .

²Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

³Em alguns textos mais antigos, a representação de um número complexo z na forma polar tem a simbologia $z = |z|\text{cis}(\theta)$, sendo que ‘cis’ remete para ‘co-seno i seno’, com $\text{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

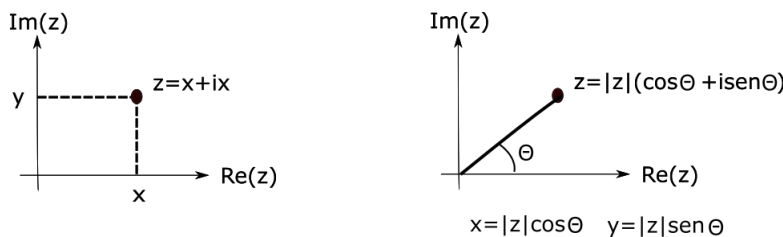


Figura 7: Plano complexo

Exemplos

Exemplo 1.

$$z = 3e^{i\pi/3} = 3e^{i(\pi/3+2k\pi)}.$$

As expressões $3e^{i\pi/3}$, $3e^{i(\pi/3-4\pi)}$ e $3e^{i(\pi/3+2\pi)}$, por exemplo, representam o mesmo número complexo.

Exemplo 2. A forma trigonométrica do número $z = -2 + i6$ é $z = \sqrt{40}e^{i\Theta}$, com $\Theta = \arctan(-3) + \pi$. Notar que a função $\arctan(x)$ devolve ângulos no primeiro quadrante (quando é positiva) ou no quarto quadrante (quando é negativa), estando o afixo⁴ de $z = -2 + i6$ no segundo quadrante.

Exemplo 3. A forma cartesiana do número $z = 3e^{-i\pi/3}$ é $z = x + iy = 3/2 - i3\sqrt{3}/2$, com $x = 3\cos(-\pi/3)$ e $y = 3\sin(-\pi/3)$.

Exercício. Seja $z = e^{i2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mostrar que $z = 1$.

Exercício

Raízes de um número complexo

Determinar as raízes sextas do número 64.

Pretendemos encontrar todas as soluções z da equação $z^6 = 64$, ou seja, determinar as raízes do polinómio $z^6 - 64 = 0$. Sabemos, pelo *Teorema Fundamental da Álgebra* (enunciado adiante neste texto), que qualquer polinómio de grau 6 tem seis raízes complexas, podendo haver raízes repetidas. Seja $z = |z|e^{i\Theta}$. Por ser

⁴Afixo de um número complexo, é o ponto que representa o número no plano complexo.

$64 = 64e^{i2k\pi}$, sendo k um inteiro qualquer, podemos escrever

$$\begin{aligned} z^6 &= 64 \Leftrightarrow z = 64^{1/6} \\ \Leftrightarrow |z|e^{i\Theta} &= 64^{1/6}e^{i2k\pi/6} \Leftrightarrow |z|e^{i\Theta} = 2e^{ik\pi/3}. \end{aligned}$$

Da última equação resulta $|z| = 2$ e $\Theta = k\pi/3$. Os argumentos das seis raízes complexas de 64 obtêm-se substituindo k sucessivamente por 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$k = 0$	$\Theta = (0 \times \pi)/3 = 0$	$z_0 = 2e^{i0} = 2$
$k = 1$	$\Theta = (1 \times \pi)/3 = \pi/3$	$z_1 = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$
$k = 2$	$\Theta = (2 \times \pi)/3 = 2\pi/3$	$z_2 = 2e^{-i2\pi/3} = -1 + i\sqrt{3}$
$k = 3$	$\Theta = (3 \times \pi)/3 = \pi$	$z_3 = 2e^{i\pi} = -2$
$k = 4$	$\Theta = (4 \times \pi)/3 = 4\pi/3$	$z_4 = 2e^{i\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}$
$k = 5$	$\Theta = (5 \times \pi)/3 = 5\pi/3$	$z_5 = 2e^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}$.

É imediato verificar o seguinte:

- z_0 e z_3 são as duas raízes sextas reais de 64;
- z_1, z_5 e z_2, z_4 são dois pares de raízes sextas complexas conjugadas de 64.

Como enunciaremos adiante, se um polinómio de coeficientes reais admite uma raiz complexa z , então admite também a sua conjugada $\bar{z}$.

Polinómios

Um *polinómio* na variável x é uma expressão na forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

sendo n um inteiro não negativo que representa o *grau* do polinómio, e sendo os termos a_i , $0 \leq i \leq n$, constantes reais ou complexas ditas *coeficientes do polinómio*. Uma função cuja fórmula é um polinómio designa-se por *função racional inteira*.

Exemplos

$\frac{3}{2}x^3 - x^2 + 2$	polinómio de grau 3 de coeficientes reais
4	polinómio de grau 0; é igual a $4x^0$
$x^2 - x^{-1} + 2$	não é um polinómio (o expoente de x^{-1} não é um inteiro não negativo)
$2ix^2 - 3x + 2 - 4i$	polinómio de grau 2 de coeficientes complexos

Designa-se *raiz* ou *zero* de um polinómio $p(x)$, todo o número r , real ou complexo, tal que $p(r) = 0$.

Exemplos

1. $x = 2$ é uma raiz do polinómio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$, porque $p(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 4 = 0$.
2. $x = i$ é uma raiz do polinómio $p(x) = x^2 + 1$, porque $p(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.
3. $x = -1$ não é uma raiz do polinómio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$, porque $p(-1) = 2 \times (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 4 = -9 \neq 0$.

Divisão de polinómios

Na figura 8 aplica-se um algoritmo semelhante ao usado na divisão aritmética, cujo objectivo é escrever uma fracção racional $p(x)/q(x)$ da forma

$$p(x) = q(x).Q(x) + R(x),$$

com $\text{grau}(R) < \text{grau}(q)$. Se $R(x) = 0$, diz-se que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$ ou que $q(x)$ *divide* $p(x)$.

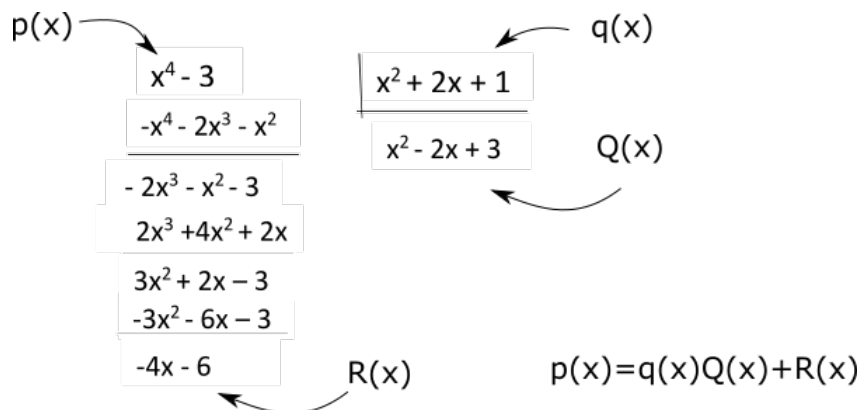


Figura 8: Divisão de polinómios

Exemplos

1. O polinómio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ é divisível pelo polinómio $x - 1$, uma vez que $q(x)$ se pode escrever $q(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$. $q(x)$ é também divisível por $x^2 - 5x + 6$ (porquê?).
2. O polinómio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ não é divisível pelo polinómio $x - 5$, uma vez que

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 5)(x^2 - x + 6) + 24.$$

Esta igualdade representa uma divisão da seguinte forma: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ é o dividendo; $x - 5$ é o divisor; $x^2 - 5x + 6$ é o quociente; 24 é o resto da divisão.

Factorização de polinómios

Um polinómio $p(x)$ diz-se *factorizado* no produto dos k polinómios $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$, se pode ser escrito como o produto destes polinómios, i.e

$$p(x) = g_1(x)g_2(x) \cdots g_k(x).$$

Exemplos

1. O polinómio $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$ pode ser escrito na forma $p(x) = 2(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ (verificar!). Os polinómios envolvidos na factorização de $p(x)$ são $g_1(x) = 2$, $g_2(x) = x - 1$, $g_3(x) = x - 2$ e $g_4(x) = x - 3$.

2. O polinómio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ pode ser escrito na forma $q(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$ (verificar!).

Os polinómios envolvidos na factorização de $q(x)$ são $g_1(x) = x - 1$ e $g_2(x) = x^2 - 5x + 6$.

O teorema seguinte é importante na factorização de polinómios.

Teorema (de Bézout).. *O resto da divisão de um polinómio $p(x)$, de grau maior ou igual a 1, pelo binómio $x - a$ é igual a $p(a)$.*

Exemplo

Dado o polinómio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, temos $q(5) = 5^3 - 6 \times 5^2 + 11 \times 5 - 6 = 24$, sendo 24 o resto da divisão de $q(x)$ por $x - 5$.

O teorema seguinte é essencial para a factorização de um polinómio qualquer num produto de termos lineares $(x - r)$.

Teorema Fundamental da Álgebra.. *Todo o polinómio $p(x)$ de grau maior ou igual a 1 tem, pelo menos, uma raiz real ou complexa.*

Podemos fazer o seguinte raciocínio:

- O Teorema Fundamental da Álgebra diz-nos que dado um polinómio qualquer $p(x)$ de grau ≥ 1 , existe uma raiz r de $p(x)$.
- Pelo Teorema de Bézout, se $p(x)$ tem a raiz r , então podemos escrever $p(x) = (x - r)q(x)$.
- Repetindo este procedimento com o polinómio $q(x)$: se $q(x)$ é um polinómio de grau zero (uma constante), então temos $p(x)$ factorizado em factores de grau 1 e de grau 0; se $\text{grau}(q) \geq 1$, então $q(x)$ tem uma raiz s e, usando o teorema de Bézout, podemos escrever $q(x) = (x - s)t(x)$ e também $p(x) = (x - r)(x - s)t(x)$, com $\text{grau}(p) = \text{grau}(t) + 2$.

Este argumento valida o seguinte resultado.

Corolário.. *Todo o polinómio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ de grau ≥ 1 , se pode factorizar num produto do tipo*

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n),$$

sendo $r_1, r_2, \dots, r_n$, as n raízes do polinómio, podendo haver raízes repetidas.

Exercício.

Verificar que o polinómio $q(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3)$ pode ser escrito na forma $3x^3 - 18x^2 + 33x - 18$, e que esta última expressão se anula para $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$.

Uma consequência imediata do corolário anterior é que todo o polinómio da forma $ax^2 + bx + c$, com as raízes r_1, r_2 , se pode escrever na forma $a(x - r_1)(x - r_2)$.

Exemplos

1. O polinómio $q(x) = x^2 - 2x + 1$ tem uma *raiz dupla* $x = 1$, como pode ser verificado usando a fórmula resolvente de Bhaskara:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1.$$

Podemos escrever (verificar!)

$$q(x) = (x - 1)^2.$$

2. O polinómio $q(x) = 2x^2 - 4x + 2$ tem igualmente a *raiz dupla* $x = 1$ (verificar!). Como o coeficiente que multiplica x^2 é 2, temos

$$q(x) = 2(x - 1)^2.$$

3. O polinómio $q(x) = x^2 + x + 1$ não tem raízes reais, como se pode ver usando a fórmula resolvente de Bhaskara,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$q(x)$ pode ser escrito (verificar!)

$$q(x) = \left(x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vale também o seguinte resultado.

Teorema.. *Se o número complexo z é raiz do polinómio de coeficientes reais*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de grau ≥ 1 , então o seu conjugado $\bar{z}$ é também raiz de $p(x)$. Dito de outra forma, as raízes complexas de

polinómios com coeficientes reais aparecem aos pares de números conjugados.

Prova.

Se z é raiz de $p(x)$, então $p(z) = 0$, i.e.

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Conjugando ambos os membros desta igualdade, ela continua válida (porquê?) e temos

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$p(\overline{z}) = 0$$

A última igualdade significa que $\overline{z}$ é também⁵ raiz de $p(x)$.

□

Uma consequência deste teorema e do corolário do Teorema Fundamental da Álgebra (pg. 14) é a seguinte caracterização da factorização de polinómios de coeficientes reais.

Teorema.. *Todo o polinómio de coeficientes reais*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de grau ≥ 1 , se pode factorizar num produto de termos lineares da forma $(x - r)$, sendo r uma raiz real, de termos quadráticos da forma $(x^2 + bx + c)$, com duas raízes complexas conjugadas, e do coeficiente a_n .

De facto, por as raízes complexas surgirem aos pares, a decomposição em termos lineares contém um termo na forma $(x - \overline{z})$ para cada termo $(x - z)$, sendo z uma raiz complexa. Tal permite reduzir a factorização à forma enunciada, uma vez que $(x - z)(x - \overline{z})$ é um polinómio do segundo grau com coeficientes reais (verificar!).

⁵Notar que se $z = |z|e^{i\Theta}$, então $\overline{z} = |z|e^{-i\Theta}$ (porquê?). Daqui decorre $(\overline{z})^n = |z|^n e^{-in\Theta} = \overline{z^n}$.

Polinómios Idênticos

Dois polinómios $p(x)$, $q(x)$ dizem-se *idênticos* se, e somente se, têm os mesmos coeficientes para as mesmas potências de x . O seguinte teorema fornece uma condição suficiente para que dois polinómios sejam idênticos.

Teorema.. *Se os valores numéricos de dois polinómios $p(x)$, $q(x)$, de grau n , coincidem para $n + 1$ valores diferentes $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ da variável x , então estes dois polinómios são idênticos.*

Exercício.

Mostrar que se $(ax + b)$ e $(3x + 4)$ forem iguais para dois valores de x distintos, então $a = 3$ e $b = 4$, i.e., os polinómios são idênticos.

Suponhamos que os polinómios são iguais, por exemplo, para $x = 2$ ($2a + b = 10$) e $x = -1$ ($-a + b = 1$). Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 10 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

obtém-se $a = 3$ e $b = 4$, o que confirma que os polinómios são idênticos.