Notas das Aulas – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/~mar)

- Derivadas
  - Propriedades das Derivadas
  - Problemas de Otimização com Uma Variável
  - Problemas de Otimização com Duas Variáveis
- Integrais
  - Integração de Funções Racionais

2 Derivadas

A noção de *derivada* de uma função é uma extensão para funções não lineraes da noção de *declive* de uma reta.

2.1 Propriedades das Derivadas

a e b representam constantes; f e g representam funções.

Propriedades Operativas da Derivada

Linearidade: $(af + bg)' = af' + bg'$

Regra do Produto: $(fg)' = f'g + fg'$

Regra do Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Regra da Cadeia: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Derivada da Função Inversa: $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, com $f(a) = b$.

Condições de Derivabilidade e Teoremas Fundamentais

Relação entre Continuidade e Derivabilidade:

Se f é derivável em $x = a$, então f é contínua em $x = a$. A inversa é falsa, já que uma função pode ser contínua num ponto do seu domínio e não ser derivável nesse ponto.

Derivada e Descontinuidade de Salto:

Se a derivada f' de uma função está definida num intervalo $[a, b]$, então f' não pode ter *descontinuidades de salto* neste intervalo.

Teorema de Rolle:

Se f é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$ (figura 6).

Teorema do Valor Médio:

Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Isso significa que, em algum ponto $c \in (a, b)$, a derivada é igual ao declive da reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (figura 7).

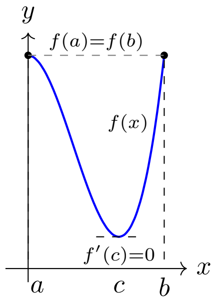

Figura 6: Teorema de Rolle.

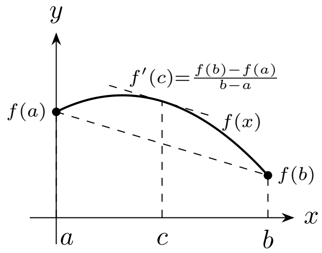

Figura 7: Teorema do Valor Médio.

Diferencial de uma Função num Ponto

Consideremos a aproximação linear de $f(x)$ em torno do ponto $x = a$, dada por (ver figura 8):

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Definindo o incremento em x como

$$\Delta x = x - a,$$

podemos reescrever a aproximação como:

$$\begin{aligned} & f(x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x \\ \Leftrightarrow\ & f(x) - f(a) \approx f'(a)\,\Delta x \\ \Leftrightarrow\ & \Delta f \approx f'(a)\,\Delta x, \end{aligned}$$

com $\Delta f = f(x) - f(a)$.

A variação de f **medida sobre a reta tangente** é então dada por:

$$df = f'(a)\,dx.$$

Nesta notação, df é o **diferencial de f no ponto** a e representa a parte linear da variação de f quando x sofre um incremento $dx = \Delta x$, a partir do ponto a.

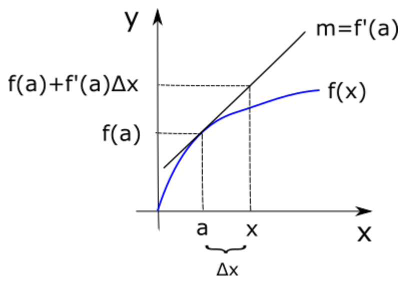

Figura 8: A reta tangente é a aproximante linear da função no ponto de tangência.

2.2 Problemas de Otimização com Uma Variável

Problemas de otimização com uma variável, são problemas de cálculo de valores extremos (máximos ou mínimos) de uma função $f(x)$ num dado subconjunto do seu domínio. Os passos para determinar os extremos de uma função $f(x)$, são os seguintes:

1. Determinar os *pontos críticos* da $f(x)$, que são os valores de x para os quais

$$f'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(x) \text{ não está definida;}$$

2. Classificar os pontos críticos, usando algum dos critérios seguintes:

   - **Teste da segunda derivada:** Calcular $f''(x)$ nos pontos críticos.
     Se
     $$f''(x) > 0, \quad \text{então} \quad f(x) \text{ tem um mínimo local,}$$
     se
     $$f''(x) < 0, \quad \text{então} \quad f(x) \text{ tem um máximo local,}$$
     e se $f''(x) = 0$, o teste é inconclusivo;
   - **Teste da primeira derivada:** Verificar a variação do sinal de $f'(x)$ numa vizinhança do ponto crítico. Uma mudança de negativo para positivo indica um ponto de mínimo local, enquanto uma mudança de positivo para negativo indica um ponto de máximo local.

3. Calcular os valores de $f(x)$ nos pontos críticos de interesse. Compará-los para determinar máximos, ou mínimos, absolutos.

Exercício 9. Distância entre uma reta e um ponto

Calcular a distância entre o ponto $P(-3, 1)$ e a reta $y = 3x + 1$, enunciando e resolvendo a questão como um problema de otimização.

Resolução. Seja $Q(x,\, y)$ um ponto arbitrário sobre a reta (figura 9). Como Q pertence à reta, as suas coordenadas são $(x,\, 3x+1)$. A distância d entre $P(-3,1)$ e $Q(x,\, 3x+1)$ é dada por

$$d(x) = \sqrt{(x-(-3))^2 + \big(3x+1-1\big)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(3x)^2}.$$

O problema resolve-se minimizando $d(x)$, que é a **função objetivo** do problema de otimização. Como o quadrado de uma variável é uma função crescente, minimizar $d(x)$ equivale a minimizar o $d^2(x)$, que designamos por $f(x)$:

$$f(x) = (x+3)^2 + (3x)^2.$$

Simplificando a expressão:

$$f(x) = (x+3)^2 + 9x^2 = x^2 + 6x + 9 + 9x^2 = 10x^2 + 6x + 9.$$

Pontos críticos de $f(x)$:

Cálculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = (10x^2 + 6x + 9)' = 20x + 6.$$

Como o domínio de $f'(x)$ é $\mathbb{R}$, os únicos pontos críticos de $f(x)$ são as soluções da equação $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 20x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}.$$

O único ponto crítico de $f(x)$ é $x = -3/10$.

Classificação do ponto crítico:

Classificamos o ponto crítico usando o teste da primeira derivada. Como $f'(x)$ é negativa à esquerda do ponto $(-3/10)$ e positiva à direita dele, o ponto crítico é um ponto de **mínimo absoluto** da função (porquê?).

Cálculo do ponto de distância mínima:

O ponto Q de distância mínima sobre a reta é, então,

$$(x,y) = \left(-\frac{3}{10},\, 3\left(-\frac{3}{10}\right)+1\right) = \left(-\frac{3}{10},\, -\frac{9}{10}+1\right) = \left(-\frac{3}{10},\, \frac{1}{10}\right).$$

Substituindo $x = -\frac{3}{10}$ em $f(x)$ para encontrar o quadrado da distância mínima:

$$f\left(-\frac{3}{10}\right) = 10\left(-\frac{3}{10}\right)^2 + 6\left(-\frac{3}{10}\right) + 9 = 10\left(\frac{9}{100}\right) - \frac{18}{10} + 9 = 8.1.$$

Logo, a distância mínima é

$$d = \sqrt{8.1} \approx 2.85.$$

■

As retas $y = 3x + 1$ e a reta definida pelos pontos P, Q são perpendiculares. Porquê?

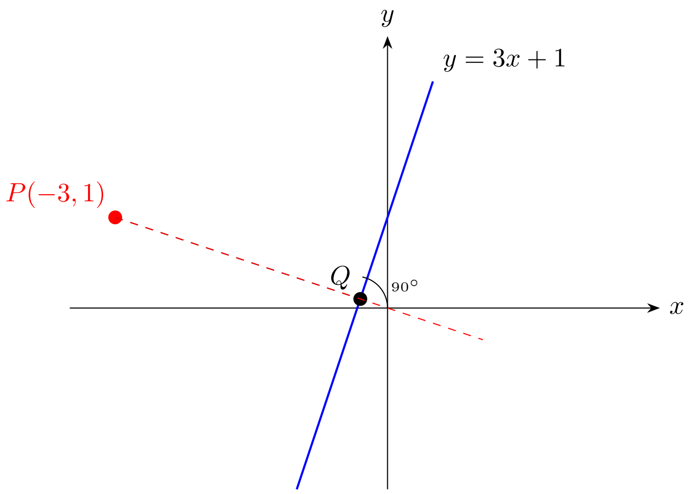

Figura 9: Esquema com reta, pontos e projeção perpendicular.

Exercício 10. Distância entre um ponto e uma curva

Determinar a distância mínima entre a curva

$$y = x^2$$

e o ponto

$$P(3, 2).$$

Resolução. Seja $Q(x, x^2)$ um ponto arbitrário da curva (figura 10). A distância d entre $P(3, 2)$ e $Q(x, x^2)$ é dada por:

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-2)^2}.$$

Para encontrar a distância mínima, podemos minimizar o quadrado da distância:

$$f(x) = (x-3)^2 + (x^2-2)^2.$$

Simplificar $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)^2 + (x^2-2)^2 \\ &= (x^2 - 6x + 9) + (x^4 - 4x^2 + 4) \\ &= x^4 - 4x^2 + x^2 - 6x + 9 + 4 \\ &= x^4 - 3x^2 - 6x + 13. \end{aligned}$$

Pontos críticos de $f(x)$:

Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = (x^4 - 3x^2 - 6x + 13)' = 4x^3 - 6x - 6.$$

Como o domínio de $f'(x)$ é $\mathbb{R}$, os pontos críticos são as soluções da equação:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x - 6 = 0.$$

Utilizando métodos numéricos (por exemplo, o Método de Bisseção), ou uma calculadora, encontramos o valor da raiz real:

$$x \approx 1.565.$$

As outras duas raízes são complexas, com parte imaginária não nula, pelo que não podem corresponder a pontos do domínio de d. Porquê?.

Classificação do ponto crítico:

Este ponto é o ponto de mínimo absoluto da distância, por razões análogas às referidas na resolução do exercício anterior.

Cálculo do ponto de distância mínima:

O correspondente ponto Q na curva é

$$(x, y) = (1.565, (1.565)^2) \approx (1.565, 2.448).$$

Substituindo $x = 1.565$ em $f(x)$, obtemos o quadrado da distância mínima:

$$\begin{aligned} f(1.565) &\approx (1.565 - 3)^2 + \left((1.565)^2 - 2\right)^2 \\ &= (-1.435)^2 + (2.448 - 2)^2 \\ &\approx 2.06 + 0.2006 \\ &= 2.2606. \end{aligned}$$

A distância mínima procurada é $d(1.565) \approx \sqrt{2.2606} \approx 1.5.$ ■

2.2.1 O Problema de Heron

Exercício 11. Considerar uma linha horizontal de comprimento 10, com o ponto A situado 3 unidades acima do seu extremo esquerdo e o ponto B situado 5 unidades acima do seu extremo direito (figura 11). Determinar o ponto C sobre a linha horizontal, tal que a soma dos comprimentos dos segmentos AC e BC seja mínima. Determinar esta soma.

Resolução. Este problema é conhecido por **Problema de Heron** e pode ser tratado como um problema de otimização. Começamos por posicionar a linha horizontal ao longo do eixo x com extremos em $(0, 0)$

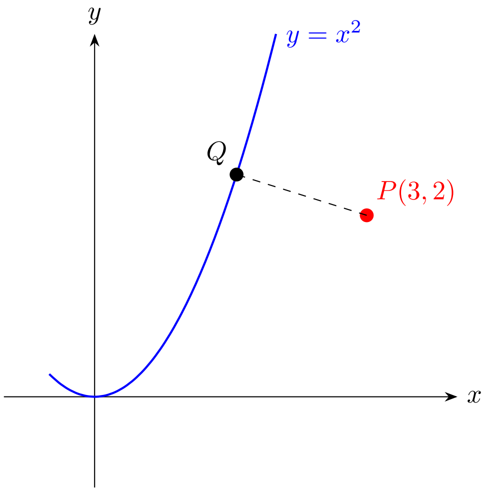

Figura 10: Esquema com a curva $y = x^2$ e os pontos P e Q.

e $(10, 0)$. Assim, temos:

$$A = (0, 3) \quad \text{e} \quad B = (10, 5).$$

Seja $C = (x, 0)$, com $0 \leq x \leq 10$. As medidas AC e BC são:

$$AC = \sqrt{(x-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{x^2 + 9},$$

$$BC = \sqrt{(x-10)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(x-10)^2 + 25}.$$

A função que queremos minimizar é a soma dessas distâncias:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(x-10)^2 + 25}.$$

Neste problema, ao contrário dos anteriores, não temos vantagem algébrica em minimizar o quadrado de $f(x)$.

Para encontrar o valor de x que minimiza $f(x)$, calculamos a derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{x - 10}{\sqrt{(x-10)^2 + 25}}.$$

Os únicos pontos críticos de $f(x)$ são as soluções da equação (porquê?):

$$\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{x - 10}{\sqrt{(x-10)^2 + 25}} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{10 - x}{\sqrt{(10-x)^2 + 25}}.
\end{aligned}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos:

$$\frac{x^2}{x^2+9} = \frac{(10-x)^2}{(10-x)^2+25} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow x = -15 \ \vee \ x = \frac{15}{4} = 3.75. \tag{2}$$

Com base na natureza do problema concluimos, sem recorrer a um teste de qualificação do ponto crítico, que o ponto C de coordenadas

$$\left(\frac{15}{4}, 0\right)$$

minimiza a soma $AC + BC$.

Cálculo da soma $AC + BC$:

$$AC = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 9} = \frac{\sqrt{369}}{4} \approx 4.8,$$

$$BC = \sqrt{\left(10 - \frac{15}{4}\right)^2 + 25} = \frac{\sqrt{1025}}{4} \approx 8.$$

A soma mínima pretendida é $AC + BC \approx 4.8 + 8 = 12.8$. ∎

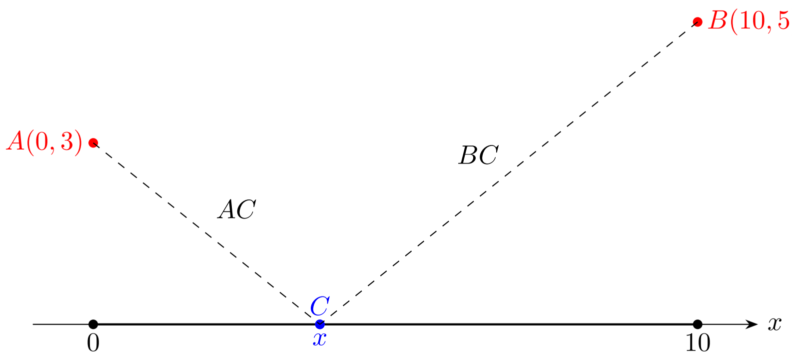

Figura 11: Ilustração dos pontos A, B e C e dos segmentos AC e BC.

Conclusão: A soma $AC + BC$ é mínima quando o ponto C está localizado em $\left(\frac{15}{4}, 0\right)$, isto é, no ponto $x = 3.75$ do eixo das abcissas.

A genial solução geométrica de Heron

Heron de Alexandria (10–70 d.C.) foi um matemático e engenheiro grego que viveu na cidade de Alexandria, no Egito, durante o período do Império Romano. A sua solução geométrica para o problema resolvido acima é de uma simplicidade desconcertante, e está mostrada no esquema da esquerda da figura 12. A construção da solução parte de um esquema inicial contendo o segmento de reta de medida 10 e os pontos A e B. De seguida:

1. reflete-se o ponto B relativamente ao segmento horizontal, obtendo-se o ponto B';

2. traça-se a reta AB';

3. o ponto C de interseção desta reta com o eixo das abcissas é o ponto de minimização procurado.

Justificação: na figura da esquerda, as medidas de CB e CB' são iguais. Se escolhermos qualquer outro ponto, diferente de C, sobre o eixo das abcissas, por exemplo C' na figura da direita, as medidas de $C'B$ e de $C'B'$ são iguais; uma inspeção do triângulo $AC'B'$, indica que

$$AC' + C'B' > AB' = AC + CB.$$

Como $AC' + C'B' = AC' + C'B$ e, temos $AC' + C'B > AC + CB$, pelo que $AC + CB$ representa o caminho mais curto possível ligando os pontos A e B a um ponto C situado no eixo das abcissas.

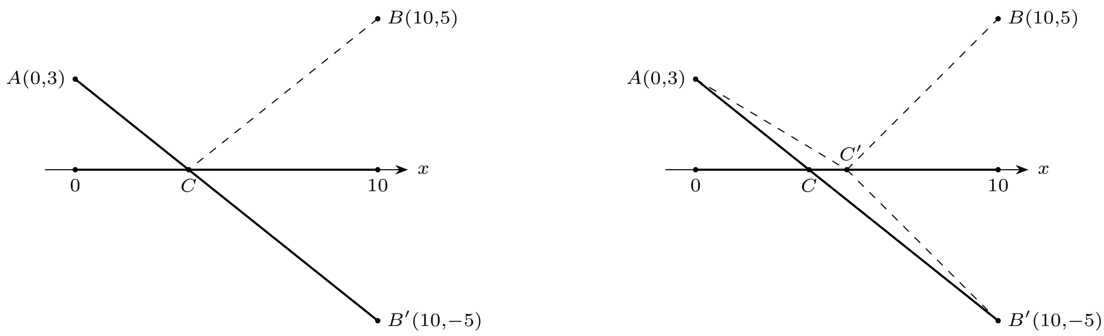

Figura 12:

2.3 Problemas de Otimização com Duas Variáveis

A otimização de uma função de duas variáveis $f(x, y)$ consiste em duas etapas principais:

Cálculo dos pontos críticos de $f(x, y)$

Resolve-se o sistema formado pelas derivadas parciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Estes pontos, juntamente com os pontos onde não esteja definida alguma das derivadas parciais de primeira ordem, são os candidatos a pontos de máximo, mínimo, ou **pontos de sela** da função.

Classificação dos pontos críticos.

Calculam-se as derivadas parciais de segunda ordem $f_{xx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ e $f_{xy}(x, y)$; define-se o discriminante

$$D = f_{xx}(x, y)\, f_{yy}(x, y) - \big(f_{xy}(x, y)\big)^2.$$

A classificação é feita da seguinte forma:

Se $D > 0$ e $f_{xx}(x, y) > 0$,	então o ponto é um mínimo local;
Se $D > 0$ e $f_{xx}(x, y) < 0$,	então o ponto é um máximo local;
Se $D < 0$,	então o ponto é um ponto de sela;
Se $D = 0$,	o teste é inconclusivo.

Exercício 12. Distância mínima entre um ponto e um plano

Calcular a distância mínima entre o ponto

$$P(3, 2, 2)$$

e o plano

$$2x + y - z = 4.$$

Resolução. Vamos construir uma função que representa o quadrado da distância entre o ponto P e um ponto arbitrário Q do plano. As coordenadas (x, y, z) do ponto do plano devem satisfazer a equação

$$2x + y - z = 4.$$

Escolhendo x e y como variáveis livres e escrevendo z em função destas, temos:

$$z = 2x + y - 4.$$

Um ponto genérico $Q(x, y, z)$ do plano pode ser escrito como

$$(x, y, z) = \big(x,\ y,\ 2x + y - 4\big).$$

O quadrado da distância entre $P(3, 2, 2)$ e $Q(x, y, z)$ é dado por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + \Big[(2x + y - 4) - 2\Big]^2 \\ &= (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (2x + y - 6)^2. \end{aligned}$$

A função $f(x, y)$ é a **função objetivo** (função a otimizar) do problema. A sua minimização dá-nos a abcissa x e a ordenada y do ponto Q do plano, que está mais próximo de P.

Simplificar $f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left[x^2 - 6x + 9\right] + \left[y^2 - 4y + 4\right] + \left[4x^2 + 4xy + y^2 - 24x - 12y + 36\right] \\ &= (x^2 + 4x^2) + (y^2 + y^2) + 4xy - (6x + 24x) - (4y + 12y) + (9 + 4 + 36) \\ &= 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 30x - 16y + 49. \end{aligned}$$

Cálcular os Pontos Críticos de $f(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5x^2 + 2y^2 + 4xy - 30x - 16y + 49)'_x = 0 \\ (5x^2 + 2y^2 + 4xy - 30x - 16y + 49)'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 4y - 30 = 0 \\ 4x + 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 4y = 30 \\ 4x + 4y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Como as derivadas parciais são contínuas, o único ponto crítico da função é

$$(x,y) = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Classificação do Ponto Crítico

Já foram obtidas as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 4y - 30, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 4y - 16.$$

Para classificar o ponto crítico precisamos de calcular as derivadas parciais de segunda ordem.

Cálculo de f_{xx}:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (10x + 4y - 30)'_x \\ &= (10x)'_x + (4y)'_x - (30)'_x = 10. \end{aligned}$$

Cálculo de f_{yy}:

$$\begin{aligned} f_{yy}(x,y) &= (4x + 4y - 16)'_x \\ &= (4x)'_y + (4y)'_y - (16)'_y = 4. \end{aligned}$$

Cálculo de f_{xy} (ou f_{yx}):

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= (10x + 4y - 30)'_y \\ &= (10x)'_y + (4y)'_y - (30)'_y = 4. \end{aligned}$$

Por simetria (teorema de Schwarz), também temos

$$f_{yx}(x,y) = 4.$$

O discriminante de segunda ordem é

$$D = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = (10)(4) - (4)^2 = 40 - 16 = 24.$$

Como $D > 0$ e $f_{xx} = 10 > 0$, concluímos que o ponto crítico é um ponto de mínimo local. Como é o único ponto crítico da função, é um ponto de mínimo local e a função é contínua em todos os pontos de R^2 o ponto é um ponto de mínimo absoluto de $f(x,y)$. O ponto Q, do plano, que minimiza f é, portanto:

$$Q\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, z\right) \quad \text{com} \quad z = 2\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{5}{3} - 4 = \frac{14+5-12}{3} = \frac{7}{3}.$$

Assim, $Q = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Cálculo da Distância Mínima

A distância mínima é:

$$d_{\min} = \sqrt{(x_Q-3)^2 + (y_Q-2)^2 + (z_Q-2)^2}.$$

Calculando cada termo do radicando:

$$x_Q - 3 = \frac{7}{3} - 3 = \frac{7-9}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$y_Q - 2 = \frac{5}{3} - 2 = \frac{5-6}{3} = -\frac{1}{3},$$

$$z_Q - 2 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{7-6}{3} = \frac{1}{3}.$$

Obtemos, finalmente, a distância mínima

$$d_{\min} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

■

Conclusão: A distância mínima entre o ponto $P(3,2,2)$ e o plano $2x + y - z = 4$ é $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3 Integrais

Os integrais definidos

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

servem, genericamente, para calcular 'áreas'. O significado do produto $f(x)dx$ depende do significado da função integranda $f(x)$. Por exemplo, se :

- $f(x)$ e x forem comprimentos, então I representa uma área geométrica;
- $f(x)$ for uma velocidade e x representar o tempo, I representa uma distância percorrida;
- $f(x)$ for uma força e x representar uma distância, I representa um trabalho realizado;

Na figura 13 a função $A(x)$ representa a área da região definida pelo gráfico de $f(x) = 4$ e pelo eixo das abcissas, no intervalo $[0, x]$. Por exemplo, a área do retângulo sombreado na figura é

$$A(2) = \int_0^2 4\, dx = 4x\Big|_0^2 = 4(2) - 4(0) = 8.$$

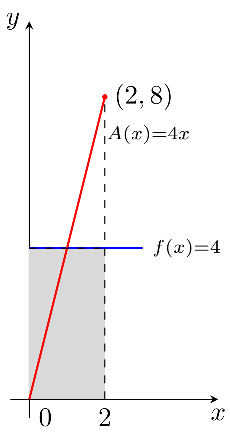

Figura 13:

3.1 Propriedades dos Integrais

a e b representam constantes; f e g representam funções.

Propriedades Operativas dos Integrais

Linearidade: $\int (af + bg)\, dx = a \int f\, dx + b \int g\, dx$

Integral de um Produto: $\int f' g\, dx = fg - \int f g'\, dx$

Regra da Substituição (Mudança de Variáveis):

$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$, com $u = g(x)$

Teoremas Fundamentais da Integração

Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I:

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo - Parte II:

Se f é contínua num intervalo e definimos a função:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

então $F'(x) = f(x)$, ou seja, a derivada da integral acumulada é a própria função integrada.

Teorema do Valor Médio para Integrais:

Se f é contínua em $[a, b]$, então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

Isto significa que se a função for não negativa no intervalo $[a, b]$, a área do retângulo de medidas $f(c)$ e $(b - a)$ é igual ao valor do integral.

Integração de Funções Racionais

Uma **função racional** é uma divisão de polinómios $p(x)/q(x)$.

$$\frac{x^4}{x^2+2x+1}$$ função racional imprópria: $grau(p) \geq grau(q)$

$$\frac{x}{x^2+2x+1}$$ função racional própria: $grau(p) < grau(q)$

A integração de uma função racional $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ consiste em 3 etapas.

1. Dividir $p(x)$ por $q(x)$ se a função racional é imprópria, obtendo-se

$$\frac{p(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)}, \tag{3}$$

   sendo $Q(x)$ um polinómio e $R(x)/q(x)$ uma função racional própria.

2. Decompôr em fracções parciais a função racional própria $R(x)/q(x)$, ou a função $p(x)/q(x)$ se nenhuma divisão foi efectuada.

3. Integrar a expressão resultante de $p(x)/q(x)$ depois da decomposição em frações parciais.

Decomposição de funções racionais em fracções parciais

Uma *função racional própria* pode ser decomposta numa soma de *fracções parciais* mais simples. Esta decomposição é útil para a integração de funções racionais. Dada a função racional $p(x)/q(x)$ na qual $q(x)$ aparece factorizado em expressões dos tipos $(x-r)^k$, ou $(x^2+bx+c)^s$ e a_n, sendo a_n o coeficiente da potência de x mais elevada em $q(x)$, a sua decomposição em fracções parciais faz-se como mostram os exemplos seguintes (ver em detalhe na Sebenta).

Exemplo 1.

(i) $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$

(ii) $\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$

(iii) $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2}$

(iv) $\frac{x^3-2}{(x^2+x+1)x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$

Cada uma das parcelas que aparece nos segundos membros destas expressões designa-se por *fracção parcial* de $p(x)/q(x)$. As constantes A, B, C, etc, designam-se por *coeficientes* da decomposição. Deve atender-se o seguinte:

1. A decomposição de uma função racional própria $p(x)/q(x)$ em fracções parciais, sem o cálculo dos coeficientes, é feita com base na factorização de $q(x)$, ignorando $p(x)$. O numerador $p(x)$ só é considerado no cálculo dos valores dos coeficientes, não sendo considerado na obtenção das decomposições em frações parciais, como as exemplificadas acima.

2. As fracções parciais correspondentes a termos quadráticos ax^2+bx+c com raízes complexas, tem que ter no numerador uma expressão linear da forma $Ax+B$.

Exercício 13. Calcular o integral

$$I = \int \frac{1}{x^2-x-2}dx.$$

Resolução.

– Começamos por fatorizar o denominador,

$$\int \frac{1}{x^2-x-2}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx.$$

– Decompomos a função racional numa soma de fracções parciais.

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \tag{4}$$

– Calculamos depois os coeficientes A, B.

– Começa-se por eliminar as divisões em (4), multiplicando ambos os membros pelo denominador do primeiro membro, $(x+1)(x-2)$. Obtém-se

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$
$$\Leftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x+1).$$

– Expande-se o segundo membro desta igualdade e agrupam-se os coeficientes de iguais potências de x.

$$1 = (A+B)x + (B-2A)$$

Fazendo $1 = 0x + 1$ no primeiro membro e igualando os coeficientes de iguais potências de x nos dois membros, obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + B = 1 \end{cases},$$

cuja solução é $A = -1/3$ e $B = 1/3$.

Podemos verificar que a decomposição é correcta, substituindo os valores de A e B na equação (4) e mostrando que se obtém uma identidade.
Calculamos agora o integral.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx \\ &= \int \left(\frac{-1/3}{x+1} + \frac{1/3}{x-2}\right) dx \\ &= \int \frac{-1/3}{x+1}dx + \int \frac{1/3}{x-2}dx \\ &= -\frac{1}{3}ln(|x+1|) + \frac{1}{3}ln(|x-2|) + C \end{aligned}$$

■

Se $p(x)/q(x)$ é uma função racional imprópria, devemos previamente dividir os polinómios antes de procedermos à decomposição em frações parciais da função.

$$p(x) \div q(x) = \text{Polinómio} + \text{Função Racional Própria}.$$

Exercício 14. Escrever cada uma das funções racionais **impróprias** como a soma de um polinómio e uma função racional **própria**.

$$(a)\frac{x^3+3}{x^2-x-2} \qquad\qquad (b)\frac{x^4-2}{(x^2+x+1)x^2}$$

Resolução. Os resultados estão apresentados na figura 14. ∎

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{x^3+2} & \mathbf{x^2-x-2} \\ \hline x^2+2x & x+1 \\ 3x+4 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} \mathbf{x^4-2} & \mathbf{(x^2+x+1)x^2} \\ \hline x^4+x^3+x^2 & 1 \\ -x^3-x^2-2 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+2}{x^2-x-2} = x+1+\frac{3x+4}{x^2-x-2} \qquad\qquad \frac{x^4-2}{(x^2+x+1)x^2} = 1+\frac{-x^3-x^2-2}{(x^2+x+1)x^2}$$

Figura 14: Divisão Polinomial.

No caso da alínea (a), por exemplo, podemos escrever

$$\int \frac{x^3+3}{x^2-x-2}dx = \int (x+1)dx + \int \frac{3x+4}{x^2-x-2}dx.$$

Que tipos de integrais temos que resolver?

As fracções parciais que podem aparecer numa decomposição são dos quatro tipos seguintes:

tipo I: $\dfrac{A}{x-r}$ tipo II: $\dfrac{A}{(x-r)^k}$

tipo III: $\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ tipo IV: $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$.

sendo $k \geq 2$ um inteiro positivo, A, B, constante reais, e ax^2+bx+c um polinómio com duas raízes complexas conjugadas. Sabendo integrar cada uma destas funções, podemos integrar qualquer função racional. Vamos resolver os casos I, II e III. Na Sebenta está resolvido um exemplo do caso IV.

Integrais do tipo I:

$$\int \frac{A}{x-r}dx$$

A resolução deste tipo de integral é

$$\int \frac{A}{x-r}dx \;=\; A\int \frac{1}{x-r}dx \;=\; A\ln|x-r|+C.$$

Integrais do tipo II:

$$\int \frac{A}{(x-r)^k}dx$$

A resolução deste tipo de integral é

$$\int \frac{A}{(x-r)^k}dx \;=\; A\int (x-r)^{-k}dx \;=\; \frac{(x-r)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

Integrais do tipo III:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx$$

Vamos resolver alguns integrais que nos vão ajudar a tratar este caso.

Exemplo 1.

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x-8}dx$$

Este integral é do tipo

$$\int \frac{u'}{u}dx \;=\; \ln|u| + C,$$

com $u = x^2 + 4x - 8$.

Resolve-se da forma

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x-8}dx \;=\; \ln|x^2+4x+8| + C.$$

Os exemplos seguintes são casos particulares do integral

$$\int \frac{u'}{1+u^2}dx \;=\; arctan(u) + C. \tag{5}$$

Exemplo 2.

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

É um caso particular do integral (5), com $u = x$ e $u' = 1$.

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx \;=\; arctan(x) + C$$

Exemplo 3.

$$\int \frac{2}{1+3x^2}dx.$$

Por ser $1+3x^2 \;=\; 1+(\sqrt{3}x)^2$, obtemos um caso particular do integral (5), com $u=\sqrt{3}x$ e $u'=\sqrt{3}$.

$$\int \frac{2}{1+3x^2}dx \;=\; 2\int \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2}dx \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}x)^2}dx \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}arctan(\sqrt{3}x)+C$$

Exemplo 4.

$$\int \frac{1}{3+x^2}dx$$

Por ser

$$3+x^2 \;=\; 3\left(1+\frac{1}{3}x^2\right) \;=\; 3\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right),$$

obtemos um caso particular do integral (5), com $u=x/\sqrt{3}$ e $u'=1/\sqrt{3}$.

$$\int \frac{1}{3+x^2}dx \;=\; \int \frac{1}{3\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Exemplo 5.

$$\int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx \tag{6}$$

Por ser

$$\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; \frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right) \;=\; \frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right),$$

obtemos um caso particular do integral (5), com $u=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ e $u'=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Podemos escrever

$$\int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx \;=\; \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right)}dx \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}dx$$

$$=\; \frac{2}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C.$$

Exemplo 6.

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Vamos reduzir este integral ao caso anterior. Efectua-se previamente uma transformação sobre a expressão $x^2 + x + 1$, designada por *completamento do quadrado*. Trata-se de determinar as constantes A, B e C tais que

$$x^2 + x + 1 \;=\; (Ax + B)^2 + C.$$

Expandindo o quadrado do binómio no segundo membro,

$$x^2 + x + 1 \;=\; A^2x^2 + 2ABx + B^2 + C,$$

obtemos $A = 1$ e $B = 1/2$ (igualámos os coeficientes de iguais potências de x nos dois membros).[1] Substituindo estes valores de A e B na igualdade, temos

$$x^2 + x + 1 \;=\; x^2 + x + \frac{1}{4} + C,$$

e $1 = 1/4 + c$, ou $C = 3/4$. Finalmente

$$x^2 + x + 1 \;=\; \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

O integral pode ser indicado da forma

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \;=\; \int \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} dx$$

e resolvido como se viu no exemplo 5 acima.

Vamos agora resolver um integral do tipo III.

Exercício 15. Integral do tipo III

Resolver o integral

$$I \;=\; \int \frac{4x - 2}{x^2 + x + 4} dx. \tag{7}$$

Resolução.

1. Escrever o integral (7) como uma soma de integrais, da forma

$$I \;=\; \int \frac{4x - 2}{x^2 + x + 4} dx \;=\; \int \frac{4x}{x^2 + x + 4} dx + \int \frac{-2}{x^2 + x + 4} dx. \tag{8}$$

[1] Recordar que dois polinómios são idênticos se têm os mesmos coeficientes das potências de x com iguais expoentes.

2. Resolver o primeiro integral do último membro de (8).

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{x^2+x+4}dx &= 2\int \frac{2x}{x^2+x+4}dx = 2\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+4}dx \\ &= 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx + \int \frac{-2}{x^2+x+4}dx\end{aligned}$$

Substituindo esta expressão no último membro de (8), temos

$$\begin{aligned}I &= 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx + \int \frac{-2}{x^2+x+4}dx + \int \frac{-2}{x^2+x+4}dx \\ &= 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx + \int \frac{-4}{x^2+x+4}dx. \qquad (9)\end{aligned}$$

Designando por I_1 o primeiro integral de (9), podemos escrever

$$I_1 = 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx = 2\ln\left(|x^2+x+4|\right) + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

3. O segundo integral na expressão (9), designemo-lo I_2, é do tipo indicado no exemplo 6 acima. Começamos por obter o completamento do quadrado do polinómio no denominador da função racional.

$$x^2+x+4 = (Ax+B)^2 + C = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$$

O integral I_2 fica

$$I_2 = \int \frac{-4}{\frac{15}{4}\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right)}dx = -\frac{16}{15}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}dx$$

ou

$$I_2 = -\frac{8}{\sqrt{15}}\int \frac{2/\sqrt{15}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}dx = -\frac{8}{\sqrt{15}} arctan\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Finalmente, o integral de (7) fica

$$I = I_1 + I_2 = 2\ln(|x^2+x+4|) - \frac{8}{\sqrt{15}} arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C.$$

■

3.1.1 Exercícios

Exercício 16. Calcular a distância mínima do ponto $P(3,2)$ à circunferência $x^2+y^2=4$.

Exercício 17. Efetuar o completamento do quadrado.

$$(a)\ 4x^2+4x+5 \qquad (b)\ 2x^2+8x+10 \qquad (c)\ 3x^2-12x+7 \qquad (d)\ 5x^2-10x+15$$

Exercício 18. Sobre o problema de Heron, na página 19.

1. Da fórmula (1) deduzir a fórmula (2).

2. Resolver geometricamente o problema se os pontos forem $A(0,3)$, $B(10,3)$.

Exercício 19. Efetuar as divisões indicadas. Para cada caso, representar a divisão na forma

$$Dividendo \;=\; Divisor \cdot Cociente \;+\; Resto.$$

$$(a)\ (4x^2+4x+5)\div(2x-1) \qquad (b)\ (-3x^5+x^2-4x+5)\div(x^2+2x+2) \qquad (c)\ (x^2-1)\div(x+1)$$

Exercício 20. Para cada caso, verificar que cada valor r indicado é uma raiz do polinómio $p(x)$, isto é, que satisfaz $p(r)=0$. Mostrar que a divisão $p(x)\div(x-r)$ tem resto zero. No caso da alínea (b), fatorizar o polinómio no produto de uma consante por polinómios do 1º grau.

$$(a)\ p(x) = 3x^5+\frac{13}{2}x^4-\frac{5}{2}x^3-\frac{15}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1,\quad r=1,\ r=-1$$
$$(b)\ p(x) = 2x^2+2x-4,\quad r=-2,\ r=1$$

Exercício 21. Resolver os integrais (estuda a secção de Integração de Funções Racionais)).

$$(a)\ \int \frac{4x-2}{x^2+x+4}dx \qquad (b)\ \int \frac{x}{2x^2+x+4}dx \qquad (c)\ \int \frac{2x-1}{(x+1)(x-2)}dx.$$

3.1.2 Revisões

Ao longo do semestre deves resolver todos os exercícios que se seguem.

Exercício 22. A distância, em quilómetros, em função do tempo, em horas, percorrida por um automóvel, é dada por $d(t)=50t+b$. (i) Se $d(5)=164$, determinar o valor de $d(7.5)$ usando a menor quantidade de cálculos possível. (ii) Quais as unidades e os significados físicos das constantes 50 e b?

Exercício 23. Calcular as derivadas das funções. Se cada função representar o custo, em euros, de x gramas de um produto, qual o significado da função derivada?

$(a)\ f(x) = \sqrt[3]{x}$	$(b)\ f(x) = \sqrt[3]{2-x^2}$	$(c)\ f(x) = \ln(\lvert x\rvert)$	$(d)\ f(x) = \ln(\lvert sin(x) - 2x\rvert)$
$(e)\ f(x) = e^x$	$(f)\ f(x) = -3e^{-3x-1}$	$(g)\ f(x) = cos(x)$	$(h)\ f(x) = \sqrt{x} \cdot cos(4x)$
$(i)\ f(x) = tan(x)$	$(j)\ f(x) = (tan(3x) - 2x))^2$	$(k)\ f(x) = x^{2x+1}$	$(l)\ f(x) = arctan(x)$

Exercício 24. Calcular as primitivas das funções. Se cada função representar a velocidade, em (metros/segundo), e x representar o tempo, em segundos, quais as unidades das funções primitivas?

$(a)\ f(x) = \sqrt[3]{x}$	$(b)\ f(x) = \ln(\lvert x\rvert)$	$(c)\ f(x) = e^x$	$(d)\ f(x) = -3e^{-3x-1}$
$(e)\ f(x) = cos(x)$	$(f)\ f(x) = \sqrt{x} \cdot cos(4x)$	$(g)\ f(x) = tan(x)$	$(h)\ f(x) = arctan(x)$

Exercício 25. Para cada uma das funções no exercício 24, calcular, se possível, $\int_1^3 f(x)dx$. Interpretar o significado físico do resultado.

TPC – entregar na Semana 5

1. **Sessão de trabalho com o ChatGPT**: revisão sobre Derivadas Parciais

   Escreve os seguintes prompts no ChatGPT e analisa as respostas. No TPC deves colocar apenas o que é pedido a **bold**.

   (a) *Explica o que é a derivada parcial de uma função de três formas: 1) Como se eu fosse um estudante de 14 anos; 2) Como se eu fosse um estudante do ensino superior; 3) Como se eu fosse o vencedor de um Prémio Nobel e tivesse QI 200.*

   (b) *Resolve detalhadamente dois exemplos de cálculo das derivadas parciais de primeira e de segunda ordens de uma função.*

   (c) *Dá-me duas funções para eu treinar os cálculos de derivadas parciais de primeira e segunda ordens.* **Apresenta os cálculos de uma delas no teu tpc.**

   (d) *Resolve um exemplo com alguns erros, mas não digas onde estão para eu descobrir.* **Em não mais de uma linha, apresenta um qualquer dos erros detetados.**

   (e) *O que significa $f_x'(2,1) = -2$? Apresenta uma aplicação muito simples deste resultado, na engenharia ou na análise de funções.* **Escreve o significado, em não mais de duas linhas.**

2. Resolver os exercícios

   18, **19** (a), **20** (b), **21** (b), **23** (j), **24** (b d), **25** (d).

3. Pergunta ao ChatGPT: *Em matemática, o que significam os termos* **majorante e minorante***? Dá exemplos.* **Escreve um exemplo para cada um dos termos, em não mais de uma linha para cada.**