SEMANA2: Notas das Aulas – 2022/23
Cálculo II – Engenharia Mecânica – ESTG/IPB
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/∼mar)

Capítulo 1. Complementos sobre Derivadas e Integrais

- Aritmética e Análise Dimensional
- Derivada e Diferencial
- Regra de L'Hôpital
- Derivação da Função Implícita
- Otimização de Funções de Uma Variável

As operações aritméticas, $+, -, \div, \times$, e a operação de limite, permitem construir os operadores de derivação e integração, que são o coração do Cálculo.

Aritmética e Análise Dimensional

Os operadores aritméticos, $+, -, x, \div$, também conhecidos por *operadores racionais*, são os elementos de operação mais simples para construir grandezas novas a partir de grandezas conhecidas. Na engenharia, a adição e a subtracção $a \pm b$ requerem que os operandos a, b tenham as mesmas unidades. Não podemos, por exemplo, somar metros com litros.

Mas nem sempre duas grandezas que se exprimem nas mesmas unidades podem ser somadas ou subtraidas. Por exemplo, o *torque* de uma força $\vec{F}$ sobre um corpo em relação a um dado ponto (mede a contribuição da força $\vec{F}$ para a rotação do corpo em torno do ponto) tem como unidade o $N.m$ (Newton.metro). A *energia cinética* fornecida a um corpo por uma força actuante F, ao longo de um dado percurso, também tem como unidade o $N.m$ ([1]). No entanto o torque não é uma forma de energia, pelo que não podemos somar, subtrair, ou igualar torque e energia cinética.

A multiplicação $a \times b$ produz uma grandeza que varia proporcionalmente a a e a b, se estas forem independentes entre si. Por exemplo, força $\times$ distância representa o trabalho produzido pela força actuante sobre um corpo ao longo de um trajecto, e é igual à variação da energia cinética do corpo entre o início e o fim do trajecto. A divisão $a \div b$ é importante para esclarecer a proporção relativa de duas grandezas.

Exemplo ***Divisão***

Na parte direita da figura 1 está efectuada a divisão $6 \div 2$. Supondo que o dividendo 6 representa o número de

[1] Neste caso, mas não no caso do torque, o $N.m$ também se escreve J, de *Joule*.

pacientes e o divisor 2 representa o número de médicos, então o cociente 3 representa o número de pacientes por médico. O cociente 3 também significa o número de vezes que o dividendo 6 contém o divisor 2.

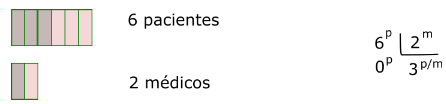


Figura 1: Divisão

Exemplo ***Pi***

A figura 2 contém um círculo cujo diâmetro tem medida d e o perímetro tem medida p. A figura contém também dois segmentos de recta, tendo o de cima medida p e sendo o de baixo formado pela concatenação de três segmentos, cada um deles com medida d. Estes dois segmentos mostram que o perímetro é um pouco superior ao triplo do diâmetro, ou seja $p = 3, \cdots \times d$. A constante de proporcionalidade $3, \cdots$ é a mesma para todos os círculos, independentemente do diâmetro, porque se ampliarmos ou reduzirmos a figura, obtendo círculos de maior diâmetro, ou círculos de menor diâmetro, todos os elementos da figura se ampliam ou reduzem na mesma proporção, incluindo os segmentos de recta. A constante $3, \cdots$ é o número π. Em conclusão: num círculo, a cada unidade do diâmetro d correspondem π unidades do perímetro, o que significa que $p \div d = \pi$. É muito interessante que o famoso número π seja um subproduto da operação aritmética de divisão.

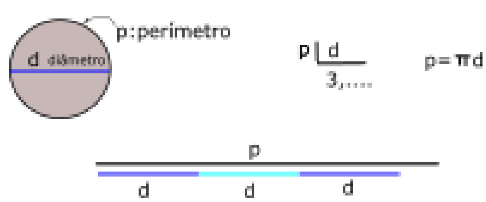


Figura 2: O número π é um subproduto da divisão.

Exemplo ***Taxa de escoamento***

A figura 3 representa um tanque para o qual é escoado um líquido. A quantidade de líquido no tanque (litros) em função do tempo (segundos) é dada por $q(t) = 2t$. No instante $t = 0\,s$ temos $q(0) = 2 \times 0 = 0\,l$, o que significa que de início (quando começa a observação do processo) o tanque está vazio. Ao fim de $t = 2\,s$ o tanque contém $q(2) = 2 \times 2 = 4\,l$ de líquido.

Consideramos agora dois instantes distintos, t_1 e t_2, com $t_2 > t_1$. Vamos determinar o cociente entre a

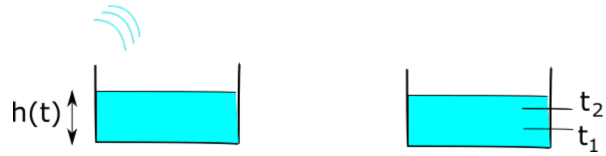


Figura 3:

quantidade de água escoada para o tanque no intervalo de tempo $t_2 - t_1$ e este mesmo intervalo.

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2 - 2t_1}{t_2 - t_1} = \frac{2(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 2\,l/s \tag{1}$$

O valor $2\,l/s$ designa-se por *taxa de escoamento* (da torneira). Designações alternativas são *débito*, *vazão* ou *caudal*. Este valor da taxa de escoamento diz-nos que são despejados no tanque dois litros de água por segundo. É um valor constante no tempo. Podemos confirmar graficamente este valor constante da taxa de variação de q com t, observando que o gráfico de $q(t)$ é uma recta (fig. 4) . O cociente da variação das ordenadas de dois pontos do gráfico pela variação das suas abcissas é o mesmo para quaisquer dois pontos escolhidos. Este cociente é o declive[2] da recta.

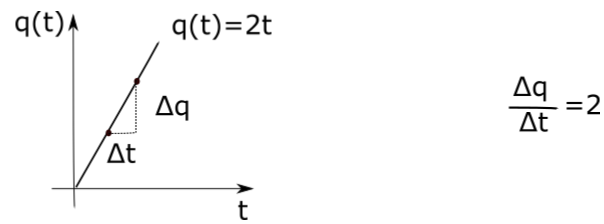


Figura 4: Sobre uma recta, a taxa de variação média é constante.

Análise dimensional da fórmula $q(t) = 2t$

$$q(t) = 2t \longrightarrow litro\ =\ \frac{litro}{segundo} segundo\ \Leftrightarrow\ litro\ =\ litro \tag{2}$$

A fórmula é dimensionalmente correcta.

Exercício. Se a base do tanque tiver de área $A\,m^2$, escrever a expressão da função que representa a altura de água no tanque, $h(t)$, em metros, em função do tempo t, em segundos.

Exemplo ***Velocidade***

A faixa cinzenta na figura 5 representa a trajectória de um veículo cuja distância ao ponto 0 é $d(t) = 2t$ quilómetros, sendo t o tempo (horas). Queremos calcular a velocidade do veículo no instante $t = 2$. A velocidade do veículo em relação à origem 0 é a taxa de variação da distância $d(t)$ à origem com o tempo

[2]Tangente do ângulo formado pela recta e pelo eixo do tempo.

t. Temos pois um cálculo semelhante, na forma, ao efectuado no exercício anterior. Vamos calcular $\Delta d/\Delta t$ usando os instantes t e $t+\Delta t$.

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(t+\Delta t) - d(t)}{t+\Delta t - t} = \frac{2(t+\Delta t) - 2t}{\Delta t} = \frac{2t + 2\Delta t - 2t}{\Delta t} = \frac{2\Delta t}{\Delta t} = 2\,km/h \tag{3}$$

O veículo desloca-se com a velocidade constante (em módulo) de $2\,km/s$ ao longo da sua trajectória. A sua velocidade no instante $t = 2\,h$ é de $2\,km/h$.

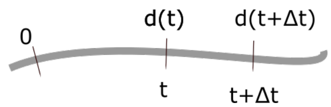


Figura 5:

Análise dimensional da fórmula $d(t) = 2t$

$$d(t) = 2t \longrightarrow km \ = \ \frac{km}{hora} hora \Leftrightarrow km \ = \ km \tag{4}$$

A fórmula é dimensionalmente correcta.

Exercício. Em que instante atinge o objecto a distância à origem $d = 3\,km$? Escrever a expressão da função $p(t)$ que fornece a distância do objecto ao ponto situado a $3\,km$ da origem, no sentido do movimento.

Derivada e Diferencial

A função derivada $f'(x)$ é o *velocímetro* da função $f(x)$, no seguinte sentido: dado um ponto $(a, f(a))$ do gráfico da função $f(x)$, o valor da derivada da função para $x = a$, $f'(a)$, corresponde ao declive da *recta tangente* ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x = a$, indicando a *rapidez* com que $f(x)$ está a variar com x no ponto onde é calculada. O número $f'(a)$ diz-se à *taxa de variação instantânea* de $f(x)$ com x no ponto a.

Como vimos nos exemplos anteriores, a *taxa de variação média* de uma grandeza com outra precisa de dois pontos do gráfico para ser calculada. No entanto, se dispusermos da função derivada de $f(x)$, $f'(x)$, basta-nos um valor de x, seja $x = a$, para calcular a taxa de variação instantânea no ponto dado, $f'(a)$. Vamos de seguida recordar que é o operador *limite* matemático que permite construir esta espécie de radar matemático capaz de nos indicar taxas de variação duma função usando a informação de um só ponto.[3]. A derivação é um operador de divisão sofisticado, capaz de responder a casos do tipo $0/0$ em que a divisão aritmética falha.

---

[3]O radar que a polícia usa também precisa de, pelo menos, dois instantes distintos para determinar a velocidade dos veículos. O radar fornece uma velocidade média. Como os instantes usados são muito próximos, o veículo não tem tempo suficiente para variar significativamente a sua velocidade entre esses instantes.

Exemplo ***Velocidade Instantânea***

No lado esquerdo da figura 6 está o gráfico da função $d(t) = t^2$, para $t \geq 0$, sendo $d(t)$ a distância de um veículo em movimento relativamente a um ponto, em quilómetros, e t o tempo, em horas. Queremos saber qual a velocidade do veículo no instante $t = 2\,h$. É imediato verificar que a velocidade deste veículo não é constante.

$$\begin{aligned} t = 0\,h \quad &\Rightarrow \quad d(0) = 0^2 = 0\,km \\ t = 1\,h \quad &\Rightarrow \quad d(1) = 1^2 = 1\,km \\ t = 2\,h \quad &\Rightarrow \quad d(2) = 2^2 = 4\,km \end{aligned}$$

Na primeira hora, $t = 0$ a $t = 1$, a distância percorrida é de $1\,km$, o que dá uma velocidade média de $1\,km/h$.

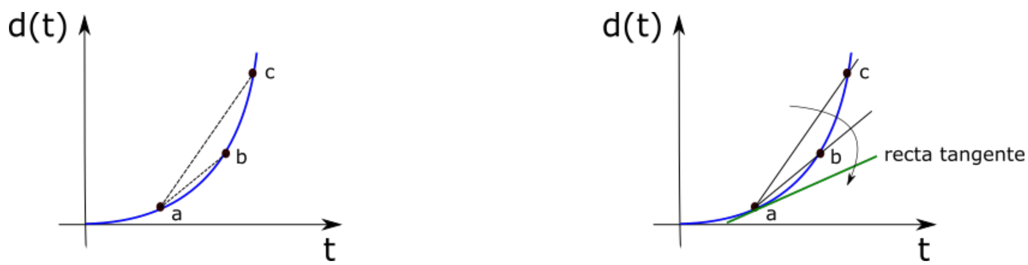


Figura 6: A derivada é o limite de uma sequência de valores médios.

Na segunda hora, $t = 1$ a $t = 2$, a distância percorrida é de $3\,km$, o que dá uma velocidade média de $3\,km/h$. Suponhamos que queremos calcular a velocidade no local do percurso correspondente ao ponto a na figura. Intuitivamente sabemos que usando o ponto a e outro ponto qualquer para calcular a velocidade média, quanto mais próximos os dois pontos estiverem menos espaço tem o veículo para mudar a velocidade. Por outras palavras, se uma função é contínua monótona num certo intervalo[4] de valores de x, então quanto menor for a diferença entre as abcissas de dois pontos do domínio da função, menor é a diferença entre as ordenadas dos pontos. Mas, enfim, alguma distância deve haver entre as abcissas dos pontos, de contrário não seria possível calcular a velocidade média. Mas a velocidade no ponto a pode não ser representada exactamente por uma velocidade média, por muito próximo que esteja o ponto a do segundo ponto usado para esse cálculo. A forma de ultrapassar esta limitação consiste em usar o operador de *limite matemático* da seguinte forma: fixa-se o ponto $a = (t_a, d(t_a))$ e faz-se a abcissa $t_a + \Delta t$ do outro ponto usado para calcular a velocidade média tender para a abcissa de a. Isto corresponde a considerarmos pontos cada vez

[4] Crescente no intervalo, ou decrescente no intervalo.

mais próximos e a obtermos, no limite, pontos *infinitesimalmente* próximos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t_a + \Delta t) - d(t_a)}{t_a + \Delta t - t_a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t_a + \Delta t)^2 - (t_a)^2}{\Delta t} \tag{5}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t_a)^2 + 2t_a\Delta t + (\Delta t)^2 - (t_a)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t_a\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(2t_a + \Delta t) = 2t_a\, km/h \tag{6}$$

$2t_a$ é a derivada da função $d(t) = t^2$ no ponto t_a e escreve-se $d'(t_a) = 2t_a$. É o limite da taxa de variação média de d com t e designa-se por *taxa de variação instantânea* de $d(t)$ no ponto t_a. Representa o declive da recta tangente ao gráfico de $d(t)$ no ponto de abcissa t_a (ver imagem à direita na figura 6). A velocidade do veículo no instante $t = 2\,h$ é de $d'(2) = 2 \times 2 = 4\,km/h$.

Na figura 7 representa-se o gráfico de uma função $f(x)$ e o gráfico da sua recta tangente no ponto de abcissa x_0. Note-se que a equação da recta tem a forma $y = f'(x_0)x + b$, sendo $m = f'(x_0)$ o declive da recta. Se a função $f(x)$, a partir do ponto de abcissa x_0, variasse com a taxa de variação instantânea $f'(x_0)$ que tem neste ponto, então o valor de $f(x)$ para $x = x_0 + \Delta x$ seria o fornecido pelo gráfico da recta, $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, em vez do valor $f(x_0 + \Delta x)$ dado pelo gráfico de $f(x)$.

Designa-se por *diferencial* da função $f(x)$ no ponto de abcissa x_0, relativo à variação Δx da abcissa, a expressão $f'(x_0)\Delta x$, e escreve-se $df = f'(x_0)\Delta x$, ou $df = f'(x_0)dx$, sendo $dx = \Delta x$ o diferencial da variável x. Note-se que dx é independente de x uma vez que, dado um valor $x = x_0$, somos livres de escolher a variação de Δx de x.

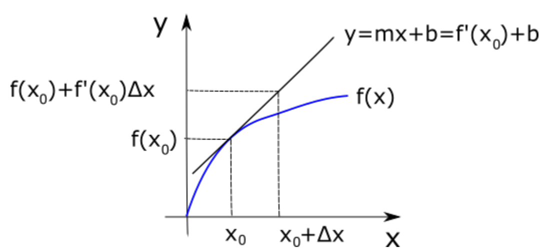


Figura 7: Recta tangente: é uma aproximante linear da função no ponto de tangência.

Em resumo, dada uma função $y = f(x)$ e dois pontos do seu domínio, x_0 e $x_0 + \Delta x$, a variação da função entre estes dois pontos escreve-se $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ou $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. O diferencial da função para $x = x_0$ e para a variação Δx de x escreve-se $df = f'(x_0)dx$ e representa a variação de ordenada correspondente aos valores x_0 e $x_0 + \Delta x$, medida sobre a recta tangente ao gráfico de $f(x)$.

O diferencial pode ser usado para estimar uma variação pequena de uma função, do modo que a seguir se descreve. Sejam x_0 e $x_0+\Delta x$ dois valores do domínio da função $f(x)$, monótona e derivável num intervalo contendo x_0 e $x_0+\Delta x$. Seja $f'(x_0)$ a derivada da função para $x = x_0$, isto é:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \tag{7}$$

Se calcularmos o cociente $\Delta f/\Delta x$ para um intervalo Δx pequeno, não nulo, temos

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Delta x \tag{8}$$

em que $\alpha \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Por consequência podemos escrever

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Delta x \Leftrightarrow \Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)^2 \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)^2. \tag{10}$$

Se Δx é muito pequeno, podemos desprezar $(\Delta x)^2$ e obtemos

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{11}$$

Exemplo ***Aproximação do valor de uma função num ponto***

Vamos usar o diferencial da função $f(x) = \sqrt{x}$ para calcular um valor aproximado de $\sqrt{4.01}$. A função $y = \sqrt{x}$ é crescente em todo o seu domínio. Seja $x_0 = 4$ e $\Delta x = 0.01$. Vamos calcular os termos da expressão

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \Leftrightarrow \sqrt{4+0.01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=4} \times 0.01. \tag{12}$$

Sabemos que $f(4) = \sqrt{4} = 2$ e que $f'(4) = 1/(2\sqrt{4}) = 1/4$. Substituindo estes valores na última aproximação da expressão anterior, obtemos

$$\sqrt{4.01} \approx 2 + 0.01/4 = 2.0025\ . \tag{13}$$

Este valor tem um erro inferior a uma décima de milésima, dado que os primeiros seis dígitos do valor fornecido por uma calculadora são $\sqrt{4.01} \approx 2.00249$.

Algumas Aplicações das Derivadas.

A operação de derivação é usada quando é necessária informação sobre a taxa de variação de uma grandeza com outra.

Regra de L'Hôpital

A *regra de L'Hôpital*[5] permite resolver alguns casos de indeterminações dos tipos $0/0$ e ∞/∞ que ocorrem no cálculo de limites de cocientes.

Teorema (regra de l'Hôpital). *Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, excepto, eventualmente, num ponto $a \in I$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \neq a$ no intervalo I. Valem os seguintes resultados.*

1. *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (podendo ser $L \in \mathbb{R}$, ou $L = \pm\infty$, e $a \in \mathbb{R}$, ou $a = \pm\infty$), então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

2. *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (podendo ser $L \in \mathbb{R}$, ou $L = \pm\infty$, e $a \in \mathbb{R}$, ou $a = \pm\infty$), então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

A intenção desta proposição é trocar o cálculo do limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ pelo cálculo do limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, esperando que o segundo cálculo seja mais simples que o primeiro.

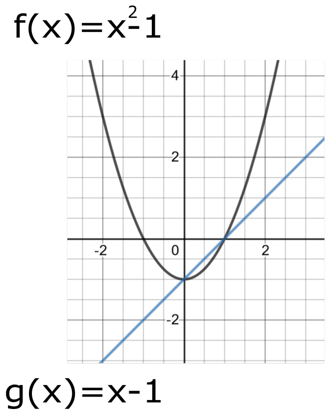
Exemplos

Exemplo 1.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)'}{(x-1)'} \;=\; \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} \;=\; \lim_{x\to 1} 2x \;=\; 2 \tag{14}$$

À esquerda, na figura 8, estão representados os gráficos das duas funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x - 1$. Os gráficos contêm ambos o ponto $(x, y) = (1, 0)$. À direita na figura está representada uma ampliação destes dois gráficos, numa vizinhança do ponto $(1, 0)$. Os gráficos aparecem-nos quase lineares. Ambas as

[5] Guillaume François Antoine - França -(1661 - 1704), marquês de L'Hôpital.



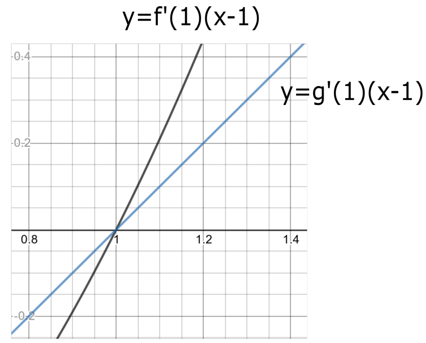


Figura 8: Duas funções e suas rectas tangentes para $x = 1$.

funções têm derivada no ponto $x = 1$, admitindo por isso uma recta tangente no correspondente ponto do gráfico. Quanto menor for a vizinhança considerada, mais 'parecidos' ficam os gráficos das funções com os das respectivas rectas tangentes. Se usarmos as equações das rectas para calcular o limite anterior, obtemos uma justificação intuitiva da regra de L'Hôpital para este tipo de caso. Sabendo que $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$ e $g'(x) = 1 \Rightarrow g'(1) = 1$, podemos escrever (recordar a definição de *diferencial*)

$$f(x) - f(1) \approx f'(1)(x - 1)$$
$$g(x) - g(1) \approx g'(1)(x - 1).$$

Como $f(1) = g(1) = 0$, temos $f(x) \approx f'(1)(x - 1)$ e $g(x) \approx g'(1)(x - 1)$ e podemos escrever

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(1)(x-1)}{g'(1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Note-se que neste exemplo, $\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)}$. Tanto $f(x)$ como $g(x)$ têm derivadas contínuas no ponto $x = 1$. No entanto, a regra de L'Hôpital não exige que as funções tenham derivada no ponto de limite, mas sim que o limite do cociente das derivadas exista. Por exemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{2+\ln(x)}{\ln(x)}$ é igual a 1, valor que se obtém aplicando a regra de L'Hôpital. Nenhuma das funções, no numerador e no denominador, tem derivada no ponto zero.

Outra forma de calcular o limite do exemplo 1 é

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2. \tag{15}$$

Exemplo 2. A regra de L'Hôpital pode ser usada repetidas vezes.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{-e^{x-2}+x-1} = \lim_{x\to 2}\frac{\left((x-2)^2\right)'}{\left(-e^{x-2}+x-1\right)'} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{-e^{x-2}+1} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(2(x-2)\right)'}{\left(-e^{x-2}+1\right)'}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{2}{-e^{x-2}} = \frac{2}{-1} = -2.$$

O primeiro limite na expressão anterior representa um caso do tipo $0/0$. A primeira igualdade corresponde à aplicação da regra de L'Hôpital. O terceiro membro volta a ser um caso de $0/0$. A terceira igualdade corresponde a uma nova aplicação da regra de L'Hôpital, que permite obter o valor do limite.

Exemplo 3 A regra de L'Hôpital afirma que se existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, então este é igual a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, mas não podemos tirar nenhuma conclusão se o primeiro limite não existir. Assim, apesar de existir o limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+sen(x)} = 1 \text{ (porquê?)},$$

se aplicarmos a regra de L'Hôpital (podemos fazê-lo porque se trata de um caso do tipo ∞/∞), obtemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+sen(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(x+sen(x))'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+cos(x)}.$$

O último limite não existe (porquê?). Podes ver um vídeo sobre este tema produzido pelo MIT (código QR em anexo).

Exemplo 4 O limite seguinte, do tipo ∞/∞, representa um caso que regra de L'Hôpital não resolve.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(\sqrt{1+x^2})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2})'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (\cdots).$$

Consegues mostrar que o valor do limite é 1?

Derivação da Função Implícita

Uma função diz-se representada na forma *implícita* se a equação que lhe corresponde não está resolvida em ordem à variável dependente y. A função diz-se representada na forma *explícita* se a equação que lhe corresponde está resolvida em ordem à variável dependente y.

Exemplos

$y = 3x + 2$	forma explícita da equação de uma recta
$y - 3x = 2$	uma forma implícita da equação da mesma recta
$y - 3x - 2 = 0$	outra forma implícita da equação da mesma recta
$y = x^2 - 3x + 2$	forma explícita de uma função quadrática
$2 - y = 3x - x^2$	uma forma implícita da função anterior

O aspecto caracterizador de uma função $y = f(x)$ é haver uma correspondência *unívoca* entre cada valor de x e o correspondente valor de y. Por outras palavras, a cada valor de x corresponde um e um só valor de y. A equação $y^2 = x$ não representa uma função $y = f(x)$, porque a cada valor de x correspondem dois valores, $\pm\sqrt{x}$, da variável y (figura 9). Podemos considerar que a equação implícita $y^2 = x$ representa duas funções,

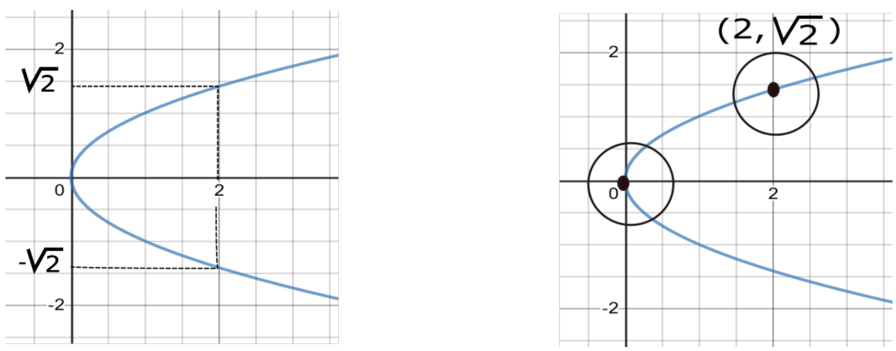


Figura 9: Gráfico da equação $y^2 = x$.

respectivamente, $y = \sqrt{x}$ se considerarmos apenas valores de y não negativos, e $y = -\sqrt{x}$ se considerarmos apenas valores de y não positivos. O *Teorema da Função Implícita*[6] permite, sob certas condições, saber se, numa vizinhança suficientemente pequena de um ponto (x, y) do gráfico duma equação implícita, esta equação define uma função. No gráfico da direita, na figura 9, podemos ver que a equação define uma função numa vizinhança do ponto $(x, y) = (2, \sqrt{2})$, mas não numa vizinhança do ponto $(x, y) = (0, 0)$ (porquê?).

Existem funções definidas por equações implícitas que não podem ser escritas explicitamente. Um exemplo é dado pela equação implícita $y^5 + 4y - 32x = 0$, que se pode mostrar não poder ser resolvida em ordem a y, mas que representa uma função $y = f(x)$ (a cada $x \in \mathbb{R}$ a equaçao faz corresponder um só valor de $y \in \mathbb{R}$), como vamos ver num exemplo em baixo. Ainda que uma função esteja representada na forma implícita, podemos em alguns casos obter uma forma explícita $y' = g(x, y)$ para a sua derivada.

---

[6]Ver Wikipedia.

Exemplos

Exemplo 1. Calcular a derivada da função definida pela equação implícita $y - 3x^2 = 3$.

Derivando ambos os membros em ordem a x, temos

$$(y - 3x^2)' = (3)' \Leftrightarrow y' - 6x = 0 \Leftrightarrow y' = 6x.$$

Exemplo 2. Verificar que a função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $y^5 + 4y + 32x = 0$ é decrescente no seu domínio de definição. Mostrar que o domínio de definição da função é $\mathbb{R}$.

- Verifica-se que $y^5 + 4y \to +\infty$ quando $y \to +\infty$, e que $y^5 + 4y \to -\infty$ quando $y \to -\infty$.
- Por outro lado, $y^5 + 4y$ é uma função contínua na variável y. A expressão $y^5 + 4y$ pode pois assumir qualquer valor real. É também uma expressão estritamente crescente com y (notar que $(y^5 + 4y)' = 5y^4 + 4 \geq 0$).
- Por isso, qualquer que seja o valor da expressão $32x$, existe um só valor de y tal que $y^5 + 4y = -32x$, verificando a equação implícita. Esta argumetação mostra que a equação implícita define uma só função y de x, e que o domínio desta função é $\mathbb{R}$.

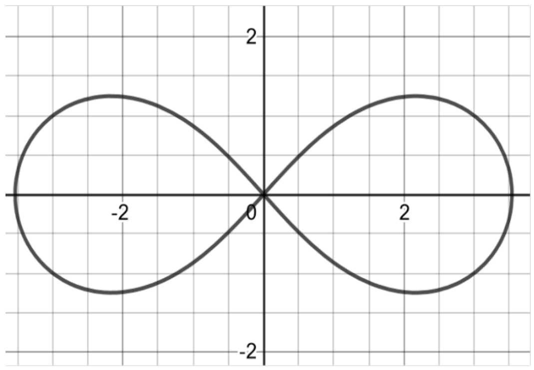
Vamos agora verificar, calculando a derivada y', que esta função é estritamente decrescente no seu domínio.

$$(y^5 + 4y + 32x)' = (0)' \Leftrightarrow 5y^4y' + 4y' + 32 = 0 \Leftrightarrow y'(5y^4 + 4) = -32 \Leftrightarrow y' = \frac{-32}{5y^4 + 4}.$$

O último membro é negativo para qualquer valor de y, pelo que a derivada é negativa no domínio de definição da função. Como exemplo de utilização da fórmula de y', consideremos o ponto $(x, y) = (-5/32, 1)$ do gráfico da equação implícita. A derivada da função implícita no ponto $x = -5/32$ é $y' = -32/(5 \times 1 + 4) = -32/9$.

Exemplo 3. Determinar as equações das rectas tangentes ao gráfico da *lemniscata* representada pela equação implícita $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, no ponto $(x, y) = (0, 0)$.

O gráfico da esquerda, na figura 10, representa a lemniscata considerada neste problema (existem lemniscatas - curvas em forma de oito - representadas por outras equações). Podemos antever que a curva admite duas tangentes na origem. A derivada em ordem a x de ambos os membros da equação implícita,



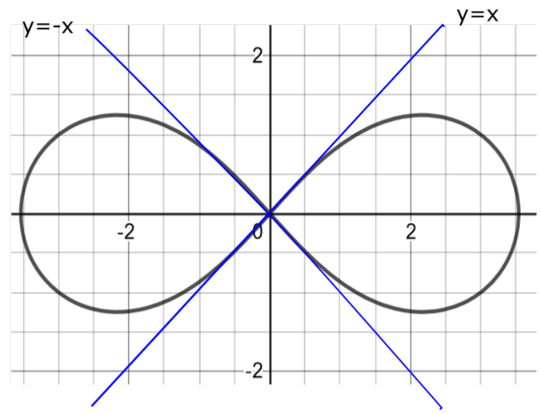


Figura 10: Gráfico de uma lemniscata e das suas rectas tangentes para $x = 0$.

calculada no ponto $(x, y) = (0, 0)$, vai fornecer-nos os valores dos declives das rectas correspondentes.

$$\left(2(x^2+y^2)^2\right)' = \left(25(x^2-y^2)\right)' \;\Leftrightarrow\; 4(y^2+x^2)(y^2+x^2)' = 25(2x-2yy')$$

$$\Leftrightarrow\; 4(y^2+x^2)(2yy'+2x)' = 25(2x-2yy') \;\Leftrightarrow\; y' = \frac{25x-4x(x^2+y^2)}{4(x^2+y^2)y+25y}.$$

Se substituirmos, no segundo membro da fórmula de y', x e y por zero, obtemos a expressão $0/0$, que não é um número. No entanto, sabemos que para valores de x muito próximos de zero a igualdade $y = y'x$ é uma boa aproximação para y, no caso de uma função $y = f(x)$, tal que $f(0) = 0$ e $f'(0)$ existe. A justificação é a seguinte: seja $y = f(x)$; por ser $f(x) - f(0) \approx f'(0)(x-0)$ e $f(0) = 0$, temos $f(x) \approx f'(0)x$, ou, usando y em vez de $f(x)$, $y \approx f'(0)x$ (recorda a noção de *diferencial*). Substituindo y por $y'x$ no denominador do segundo membro da fórmula da derivada, obtemos

$$y' = \frac{25x-4x(x^2+y^2)}{4(x^2+y^2)y'x+25y'x} \;\Leftrightarrow\; (y')^2 = \frac{25-4(x^2+y^2)}{4(x^2+y^2)+25}.$$

Substituindo agora x e y por zero no segundo membro da última igualdade, temos

$$(y')^2 = \frac{25}{25} \;\Leftrightarrow\; (y')^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; y' = \pm 1.$$

Encontramos os declives $m_1 = 1$ e $m_2 = -1$ das duas rectas tangentes, pelo que as equações destas rectas são, respectivamente, $y = x$ e $y = -x$. O gráfico à direita na figura 10, representa a lemniscata e as suas rectas tangentes no ponto $(0, 0)$.

Otimização de Funções de Uma Variável

Optimizar uma função $f(x)$ pode ser *maximizar* a função, ou seja, calcular o valor máximo que a função toma no seu domínio de definição, ou num subconjunto do domínio; também pode ser *minimizar* a função, ou seja, calcular o valor mínimo que a função toma no seu domínio de definição, ou num subconjunto do domínio.

Exemplo ***Minimização de uma função num intervalo de valores de*** x

---

Minimizar a função $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 4$ no intervalo $[-1, 1/2]$.

A solução deste problema pode ser obtida de forma aproximada, inspeccionando uma representação do gráfico da função no intervalo mencionado e identificando os pontos do intervalo $[-1, 1/2]$ para os quais a função toma o valor mínimo, e verificando qual é esse valor mínimo. A resolução que vamos apresentar é analítica (recorre a cálculos e não ao gráfico). Começamos por determinar a derivada da função $f(x)$.

$$f'(x) = \left(x^3/3 + x^2/2 - 2x + 4\right)' \ = \ x^2 + x - 2.$$

De seguida calculamos os *pontos críticos* da função $f(x)$, que são os pontos do domínio onde a derivada é nula, os pontos do domínio onde a derivada não existe, e os pontos de acumulação do domínio, que não lhe pertencem [7] Como $f'(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, os únicos pontos críticos são aqueles em que a derivada é nula.

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \Rightarrow \ (x = 1) \vee (x = -2).$$

Sabemos que, dados dois pontos críticos $x = a$ e $x = b$ consecutivos de uma função $f(x)$, se $f'(x)$ está definida no intervalo (a, b), então $f'(x) = 0$ em todos os pontos do intervalo, ou $f'(x) > 0$ em todos os pontos do intervalo, ou $f'(x) < 0$ em todos os pontos do intervalo. Para resolvermos o problema de otimização em questão, resta-nos determinar o sinal, ou a nulidade, de $f'(x)$ em cada um dos subintervalos definidos no seu domínio pelo par de pontos críticos calculados. Para determinar o sinal de $f'(x)$ nestes subintervalos podem

Table 1:

	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
sinal de $f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
variação de $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

usar-se várias estratégias. Uma delas é calcular o sinal de $f'(x)$ num ponto qualquer de um subintervalo, ficando a conhecer-se o sinal da derivada em todos os pontos do subintervalo. No caso deste exemplo, por $f'(x) = x^2 + x - 2$ ser uma função quadrática com o coeficiente de x^2 positivo e com dois zeros distintos,

[7] Um ponto p diz-se ponto de acumulação de um conjunto C, se todo o intervalo aberto centrado em p contém algum elemento de C diferente de p. Por exemplo, o ponto $x = 0$ é um ponto de acumulação do domínio da função $f(x) = 1/x$, que não lhe pertence. Todos os outro números reais são também pontos de acumulação do domínio.

sabemos que é negativa entre os seus dois zeros [8] e positiva, respectivamente, à esquerda do menor zero e à direita do maior zero. A tabela 1 resume esta informação. Conclui-se o seguinte sobre a variação da função $f(x)$: a função é crescente nos intervalo $(-\infty, -2)$ e $(1, +\infty)$ e é decrescente no intervalo $(-2, 1)$. Para minimizar a função no intervalo $[-1, 1/2]$, basta observar que ela decresce neste intervalo. O ponto do intervalo $[-1, 1/2]$ no qual a função assume o valor mínimo é $x = 1/2$. A resposta ao problema é a indicação desse valor mínimo: $f(1/2) = 19/6$.

Exercício

De todos os triângulos rectângulos cuja medida da hipotenusa é igual a 8, quais os que têm maior área?

Resolução

Na figura 11 estão representados triângulos rectângulos cuja hipotenusa tem medida 8. Podemos suspeitar que não têm áreas iguais. Queremos encontrar aqueles que têm área máxima. A área de um triângulo de base b e altura h é dada por (figura 12)

$$A = \frac{bh}{2}.$$

Encontrar os triângulos rectângulos de área máxima, consiste em determinar os valores de b, h para os quais A é máxima.

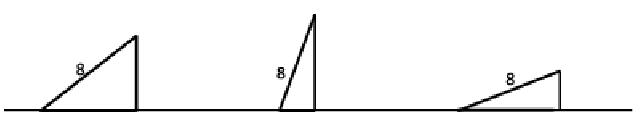


Figura 11:

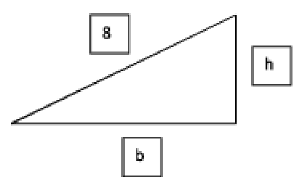


Figura 12:

Para tal podemos escrever A em função apenas de uma das variáveis b, h usando a relação $b^2 + h^2 = 8^2$ (teorema de Pitágoras). Por ser

$$b = \sqrt{8^2 - h^2},$$

temos

$$A = \frac{bh}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{8^2 - h^2}h}{2}.$$

[8]Um *zero* de uma função $f(x)$ é um valor de x que anula a função.

Para calcular os máximos de A derivamos a função em ordem a h.

$$\begin{aligned} A' &= \left(\frac{\sqrt{8^2-h^2}h}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8^2-h^2}h\right)' = \frac{1}{2}\left((\sqrt{8^2-h^2})'h + \sqrt{8^2-h^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2h}{2\sqrt{8^2-h^2}}h + \sqrt{8^2-h^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{h^2}{\sqrt{8^2-h^2}} + \sqrt{8^2-h^2}\right). \end{aligned}$$

Podemos agora determinar os pontos críticos, i.e., os valores de h no domínio de A para os quais $A'(h)$ é nula ou não é definida.

$$\begin{aligned} A' = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(-\frac{h^2}{\sqrt{8^2-h^2}} + \sqrt{8^2-h^2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{h^2}{\sqrt{8^2-h^2}} + \sqrt{8^2-h^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{h^2}{\sqrt{8^2-h^2}} = \sqrt{8^2-h^2} \Leftrightarrow h^2 = 8^2-h^2 \\ &\Leftrightarrow h^2 = 32 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{32} \end{aligned}$$

Como h representa um comprimento, tomamos o ponto crítico $h = \sqrt{32}$. Verificamos também que a derivada $A'(h)$ não existe se $h = \pm 8$ (não interessa considerar $A(h)$ para valores de h menores que 0 ou maiores que 8 (porquê?). Sabemos agora que a variação de $A(h)$ é do mesmo tipo nos pontos do intervalo $]-8, \sqrt{32}[$ e nos pontos do intervalo $]\sqrt{32}, 8[$. Como $0 \in]-8, \sqrt{32}[$ e $A'(0) > 0$, e também $6 \in]\sqrt{32}, 8[$ e $A'(6) < 0$, sabemos que a função cresce no intervalo à esquerda de $h = \sqrt{32}$ e decresce no intervalo à direita de $h = \sqrt{32}$, o que faz deste ponto um ponto de máximo absoluto da função $A(h)$. Podemos concluir que a área dos triângulos rectângulos cuja hipótenusa tem medida 8 é máxima quando a sua altura h é igual a $\sqrt{32}$ e a sua base b é igual a $\sqrt{8^2 - (\sqrt{32})^2} = \sqrt{32}$.

Um problema do tipo do que acabámos de resolver designa-se por *problema de otimização.* Os problemas de otimização costumam ter os seguintes dados: (i) uma função que se quer optimizar (i.e., minimizar ou maximizar), dita *função objectivo* do problema – no problema acima, a função objectivo é a função área A; (ii) um conjunto de relações auxiliares que envolvem as variáveis da função objectivo, ditas *restrições* do problema – o problema acima tem uma só restrição, que é $8^2 = b^2 + h^2$. No problema acima a otimização consistiu em maximizar a função objectivo (calcular valores máximos). No problema seguinte, a otimização consiste em minimizar a função objectivo (calcular valores mínimos).

Exercício

O produto xy de dois números inteiros positivos é igual a 60. Determinar x e y de modo que a sua soma $S = x + y$ seja mínima.

<u>Resolução</u>

Pretendemos minimizar a função $S = x + y$. Esta é a função objectivo do problema. É fácil verificarmos que a soma de dois números inteiros positivos cujo produto é 60 depende dos números escolhidos. Por exemplo,

$$\begin{array}{llll} \text{para} & x = 1, y = 60 & \text{temos} & S = 1 + 60 = 61; \\ \text{para} & x = 2, y = 30 & \text{temos} & S = 2 + 30 = 32; \\ \text{para} & x = 15, y = 4 & \text{temos} & S = 15 + 4 = 19. \end{array}$$

A restrição é a relação $xy = 60$ que envolve as variáveis x e y da função objectivo. Podemos escrever $x = \frac{60}{y}$, ficando a função objectivo na foma $S = y + \frac{60}{y}$ (ver figura 13). Vamos minimizar S. Para tal começamos por determinar S'.

$$S' = \left(y + \frac{60}{y}\right)' = 1 - \frac{60}{y^2}.$$

De seguida determinamos os pontos críticos de S. Verificamos que

$$S' = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{60}{y^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 = 60 \;\Leftrightarrow\; y = \pm\sqrt{60}.$$

Como y é positivo, temos $y = \sqrt{60}$. Verificamos também que S' não é definida se $y = 0$. Com esta informação, podemos afirmar que o sinal de S' é o mesmo em todos os pontos do intervalo $]0, \sqrt{60}[$ e nos pontos do intervalo $]\sqrt{60}, 60[$ da variável y, sendo S' negativa no primeiro intervalo e positiva no segundo. O ponto $y = \sqrt{60}$ é pois um ponto de mínimo local (mínimo absoluto, se considerarmos apenas valores positivos de y – ver figura 13. Em conclusão, podemos afirmar que o par de números positivos x, y , cujo produto é igual a 60 e a soma é mínima, é dado por $y = \sqrt{60}$ e $x = 60/y = 60/\sqrt{60} = \sqrt{60}$.

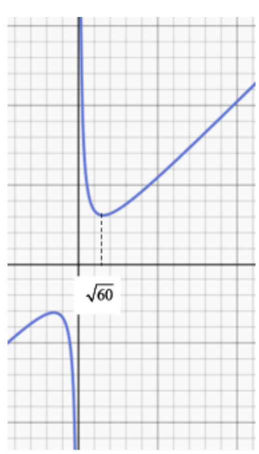


Figura 13: $S = y + \frac{60}{y}$

A natureza dos problemas enunciados nos exercícios anteriores não é alterada se trocarmos as letras b

e h, no primeiro e as letras x e y, no segundo. É esta simetria relativamente às variáveis envolvidas que justifica que seja $b = h$, na solução do primeiro problema e $x = y$, na solução do segundo problema.

Observação 1.

Um ponto $x = c$ em que a derivada de uma função se anula, dito *ponto estacionário da função*, pode ser um ponto de *máximo local*, um ponto de *mínimo local*, ou um ponto que não é de máximo nem de mínimo local. Podemos averiguar qual destes casos se verifica, estudando o sinal da derivada $f'(x)$ à esquerda e à direita de $x = c$. Outra forma de o fazer é usar o sinal da derivada de segunda ordem no ponto, $f''(c)$, quando ela existe e não é nula, conforme o enunciado seguinte.

Teorema.. *Seja f uma função derivável no intervalo (a, b) e c um ponto deste intervalo tal que $f'(c) = 0$. Se f admite derivada de segunda ordem f'' em (a, b), então:*

- *se $f''(c) > 0$, c é ponto de mínimo relativo (ou mínimo local) de f;*
- *se $f''(c) < 0$, c é ponto de máximo relativo (ou máximo local) de f;*
- *se $f''(c) = 0$, nada se pode concluir sobre a natureza extremal de c.*

No exemplo anterior temos $f''(x) = 2x + 1$. Podemos verificar que $x = -2$ é um ponto de máximo local, dado que $f''(-2) = -3 < 0$; o ponto $x = 1$ é um ponto de mínimo local porque $f''(1) = 3 > 0$. Estas conclusões são conferidas pelo gráfico da função na figura 14.

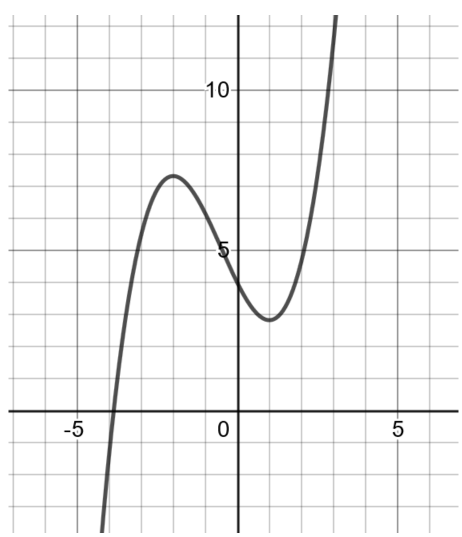


Figura 14: Gráfico da cúbica $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 4$.

Exercício.

1. Dada a função $f(x) = x^4$, verificar que $f''(0) = 0$, sendo $x = 0$ um ponto de mínimo local.

2. Dada a função $f(x) = -x^4$, verificar que $f''(0) = 0$, sendo $x = 0$ um ponto de máximo local.

3. Dada a função $f(x) = x^3$, verificar que $f''(0) = 0$, sendo $x = 0$ um ponto de sela (nem de máximo, nem de mínimo).

Observação 2.

A derivada segunda, $f''(x)$, representa-se alternativamente por $\frac{d^2f}{dx^2}$ (notação de Leibniz). A seguir discutimos o significado desta notação e as unidades que lhe estão associadas, conhecendo as unidades de $f(x)$ e de x.

A derivada de primeira ordem de $f(x)$, num ponto genérico x, define-se como o limite de um cociente de diferenças.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{16}$$

A notação de Leibniz, $\frac{df(x)}{dx}$, remete de forma mais expressiva para o limite de um cociente de diferenças do que $f'(x)$, e informa-nos sobre as unidades em que se exprime uma derivada: (*unidades de* f)/(*unidades de* x). A derivada de segunda ordem, ou derivada de ordem dois, ou ainda derivada segunda, $f''(x)$, é a derivada de $f'(x)$, e define-se da forma

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}. \tag{17}$$

Substituindo nesta expressão as derivadas de primeira ordem pelos limites correspondentes, obtemos

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x+\Delta x+\Delta x_1)-f(x+\Delta x)}{\Delta x_1} - \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x+\Delta x_2)-f(x)}{\Delta x_2}}{\Delta x}. \tag{18}$$

Quando a segunda derivada existe, esta expressão pode ser escrita na forma (um só limite e um só diferencial Δx)

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x+\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

ou ainda

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)) - (f(x + \Delta x) - f(x))}{(\Delta x)^2}. \tag{19}$$

Salienta-se que *nenhuma* destas igualdades representa uma definição da derivada de segunda ordem (ao passo que a igualdade (16) *é a definição* da derivada de primeira ordem), cada uma delas verificando-se só se a derivada de segunda ordem $f''(x)$ existir. Isto quer dizer que o segundo membro de (19) pode ter um dado valor real, mas o primeiro membro $f''(x)$ pode não existir (verificar que, se $f(x) = |x|$, então o segundo membro de (19) tem o valor 0 no ponto $x = 0$, apesar de esta função não ter aí derivada de nenhuma ordem igual ou superior à primeira[9]). Se observarmos o cociente na expressão (19), vemos no numerador uma *diferença de diferenças*, o que justifica a notação d^2f usada em d^2f/dx^2. No denominador está o *quadrado da diferença* Δx, o que justifica a notação dx^2 usada em d^2f/dx^2. Resumindo: d^2f remete para uma diferença de diferenças; dx^2 remete para o quadrado de uma diferença. As unidades em que se exprime a derivada de ordem dois, d^2f/dx^2, são $(unidades\ de f)/(unidades\ de\ x)^2$.

ANEXO ***Código QR do vídeo sobre a regra de L'Hôpital***

---

[9] Para facililar a escrita de certas fórmulas, considera-se, por vezes, que a derivada de ordem zero de uma função $f(x)$ é igual à própria função $f(x)$.