Notas das Aulas 1 – 2024/05
Cálculo II – EC, TBM – ESTG/IPBragança
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/∼mar)

1 Complementos sobre Funções, Derivadas e Integrais

1.1 Funções

A continuidade de uma função num intervalo real $[a, b]$ garante que o seu gráfico não apresenta aí quebras ou saltos, permitindo uma análise mais previsível do seu comportamento. Isto é particularmente útil na determinação dos zeros da função, pois assegura que, se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais opostos, então, pelo *Teorema do Valor Intermédio*, existe pelo menos um zero de $f(x)$ no intervalo. O *Método da Bisseção* explora esta propriedade, permitindo-nos obter uma aproximação numérica tão precisa quanto queiramos dos zeros **reais** de uma função contínua.

1.1.1 Cálculo dos Zeros de uma Função

O valor $x = a$ diz-se um **zero** da função $f(x)$ se, e somente se, $f(a) = 0$. O conhecimento dos zeros é importante por várias razões, como, por exemplo:

- os zeros de uma função auxiliam no traçado do seu gráfico;
- os zeros da derivada de uma função correspondem a pontos onde a função pode atingir valores extremos locais (máximos ou mínimos), sendo o seu cálculo fundamental na resolução de *problemas de otimização.*

Em alguns casos, os zeros de uma função podem ser determinados por uma manipulação algébrica simples. Como exemplos, apresentamos o cálculo dos zeros das funções $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 4$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2 \qquad f(1/2) = 0$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \qquad g(-2) = g(2) = 0.$$

Calcular os zeros de uma função $f(x)$ equivale a obte as **raízes** da equação $f(x) = 0$. Dizemos que a equação admite uma **solução analítica** quando é possível reduzir a igualdade $f(x) = 0$ à forma $x = [- - -]$, sendo a expressão $[- - -]$ representada por meio de *funções elementares.* (uma função diz-se *elementar* se a sua escrita envolve um número finito de operadores, $+, -, \times, \div, \circ$, e funções como polinómios, exponenciais, logarítmos e funções trigonométricas, diretas e inversas). No entanto, na maioria dos casos, a resolução analítica de equações pode ser complexa ou mesmo impossível, como acontece com os exemplos seguintes.

- A equação *cúbica* $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ é resolúvel por métodos analíticos (existe uma fórmula resolvente), mas a resolução é laboriosa;
- A equação *quíntica* $-x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ não é resolúvel por métodos analíticos. Não existe uma fórmula resolvente para equações polinomiais de grau superior a 4;
- A equação *transcendente* $x + e^x = 0$ não é resolúvel por métodos analíticos, porque não é possível resolvê-la simbolicamente em ordem a x.

Nos dois últimos casos devemos, obrigatoriamente, recorrer a **métodos numéricos** para determinar as soluções. De um modo geral, estes métodos funcionam repetindo sucessivamente um mesmo conjunto de cálculos. Cada uma destas repetições designa-se por **iteração**. O resultado de cada iteração fornece-nos uma aproximação melhorada de uma dada solução da equação. Um dos métodos numéricos mais simples para o cálculo aproximado de raízes de equações é o **Método da Bisseção**.

1.1.2 Método da Bisseção

(*bissetar*: cortar em dois; dividir em duas partes)
O método da bisseção fornece-nos uma aproximação numérica tão precisa quanto se queira de um zero real de uma função $f(x)$, contido num intervalo fechado $[a, b]$ do seu domínio, desde que

- ▶ $f(x)$ seja *contínua* neste intervalo;
- ▶ $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos, o que garante que a função tem, pelo menos, um zero no intervalo

A figura 1 representa o gráfico de uma função com três zeros no intervalo $[a, b]$.

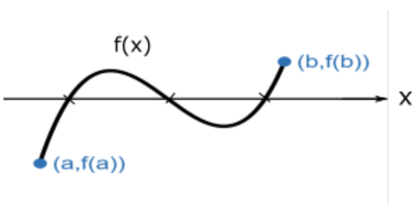

Figura 1: $f(x)$ tem 3 zeros no intervalo $[a, b]$.

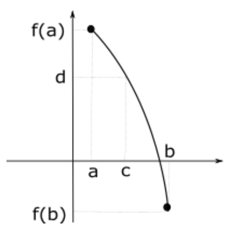

Figura 2: $f(c) = d,\ c \in [a, b],\ d \in [f(a), f(b)]$.

A validade do método é sustentada pelos seguintes teorema e corolário.

Teorema 1. (de Cauchy-Bolzano) Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e d um valor localizado no intervalo definido pelos números $f(a)$ e $f(b)$. Então, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$ (figura 2).
■

O teorema afirma que uma função contínua no intervalo $[a,b]$ assume aí todos os valores do intervalo $[f(a), f(b)]$, se $f(a) \leq f(b)$, ou do do intervalo $[f(b), f(a)]$, se $f(b) \leq f(a)$. Como exemplo de verificação do teorema, a função $f(x) = x^2 - 1$ é contínua no intervalo $[0,4]$ e $f(0) = -1$, $f(4) = 15$. Então, dado um número d pertencente ao intervalo $[f(1), f(2)] = [-1, 15]$, seja $d = 8$, existe um valor $c \in [0,4]$ tal que $f(c) = d = 8$. Pode verificar-se que $c = 3$.

Corolário 2. Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$. ■

A razoabilidade do corolário reside em que, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos. Pelo teorema de Cauchy-Bolzano, $f(x)$ anula-se em algum ponto $c \in [a,b]$, já que o valor zero pertence ao intervalo de valores definido por $f(a)$ e $f(b)$.

O algoritmo do método da bisseção procede do seguinte modo:

- parte de um intervalo $[a,b]$ determinado previamente, que sabemos conter um zero da função, por ser $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- determina o ponto médio deste intervalo

  $$m = \frac{a+b}{2},$$

  que é a primeira aproximação do zero da função;
- se o erro absoluto máximo desta aproximação, $(b-a)/2$, for menor que o majorante do erro ϵ, que é um dado do problema. então o processo termina;
- senão, escolhe um qualquer dos intervalos $[a,m]$ ou $[m,b]$, desde que $f(x)$ tenha sinal oposto nos respetivos extremos; este novo intervalo passa a ser representado por $[a_1, b_1]$ e o processo é repetido. Cada execução deste bloco de cálculos corresponde a uma **iteração** do método;
- por meio de sucessivas iterações, são gerados sucessivos intervalos e respetivos pontos médios, estando cada novo intervalo contido no anterior e tendo metade do seu comprimento; cada intervalo contém o zero procurado;

  $$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n]$$

- o processo termina ao fim de n iterações, quando obtemos um intervalo $[a_n, b_n]$ cujo ponto médio aproxima um zero de $f(x)$ com um erro absoluto inferior ao valor ϵ previamente estabelecido,

  $$\frac{|b_n - a_n|}{2} < \epsilon.$$

Na figura 3 é sugerida a relação entre a diminuição do comprimento de um intervalo e o ganho do número de dígitos exatos conhecidos de cada um dos números que lhe pertencem.

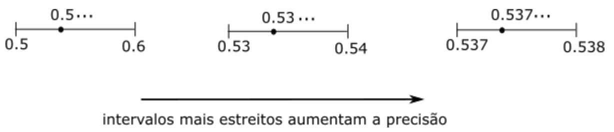

Figura 3: Todos os números do **interior** de cada intervalo começam pelos dígitos indicados acima.

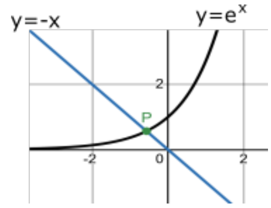

Figura 4:

Exemplo 1. *Resolver a equação $e^x + x = 0$. A solução deve ter um erro inferior a $\epsilon = 0.001$.*

Resolução. Esta equação não se pode resolver simbolicamente em ordem a x. Mas podemos verificar que tem exatamente uma solução real, escrevendo a equação na forma equivalente $e^x = -x$, esboçando os gráficos das funções em ambos os membros e verificando que se intersetam em um ponto (figura 4, ponto P). Mesmo sem o auxílio de um gráfico rigoroso da função $f(x) = e^x + x$, verificamos, após algumas tentativas, que a equação tem uma raíz no intervalo $[-1, 0]$ dado que $f(-1)$ e $f(0)$ têm sinais opostos,

$$f(-1) = e^{-1} - 1 < 0 \qquad f(0) = e^0 - 0 > 0.$$

Como a função é contínua neste intervalo, são cumpridas as condições para calcular uma aproximação do valor da raíz pelo o método da bisseção. Seguem-se as primeiras 5 iterações do método.

Iteração 1 Ponto médio do intervalo $[-1, 0]$:

$z_1 = -0.5$ (primeira aproximação do zero);

- Determinar o erro máximo da aproximação:

  $erro = \frac{0-(-1)}{2} = 0.5 > \epsilon$;

- Determinar o sinal de $f(z_1)$:

  $f(z_1) = f(-0.5) = e^{-0.5} - 0.5 \approx 0.11 > 0$;

- Determinar o novo intervalo de pesquisa:

  como $f(-0.5) \cdot f(-1) < 0$, o novo intervalo é $[a_1, b_1] = [-1, -0.5]$;

Iteração 2 Ponto médio do intervalo $[-1, -0.5]$:

$z_2 = -0.75$ (segunda aproximação do zero);

- Determinar o erro máximo da aproximação:

  $erro = \frac{-0.5-(-1)}{2} = 0.25 > \epsilon$;

- Determinar o sinal de $f(z_2)$:

  $f(z_2) = f(-0.75) = e^{-0.75} - 0.75 \approx -0.28 < 0$;

- Determinar o novo intervalo de pesquisa:

  como $f(-0.75) \cdot f(-0.5) < 0$, o novo intervalo é $[a_2, b_2] = [-0.75, -0.5]$;

<u>Iteração 3</u> Ponto médio do intervalo $[-0.75, -0.5]$:

  $z_3 = -0.625$ (terceira aproximação do zero);

- Determinar o erro máximo da aproximação:

  $erro = \frac{-0.50-(-0.75)}{2} = 0.125 > \epsilon$;

- Determinar o sinal de $f(z_3)$:

  $f(z_3) = f(-0.625) = e^{-0.625} - 0.625 \approx -0.009 < 0$;

- Determinar o novo intervalo de pesquisa:

  como $f(-0.6.25) \cdot f(-0.5) < 0$, o novo intervalo é $[a_3, b_3] = [-0.625, -0.5]$;

<u>Iteração 4</u> Ponto médio do intervalo $[-0.625, -0.5]$:

  $z_4 = -0.5625$ (quarta aproximação do zero);

- Determinar o erro máximo da aproximação:

  $erro = \frac{-0.50-(-0.625)}{2} = 0.0625 > \epsilon$;

- Determinar o sinal de $f(z_4)$:

  $f(z_4) = f(-0.5625) = e^{-0.5625} - 0.5625 \approx 0.007 > 0$;

- Determinar o novo intervalo de pesquisa:

  como $f(-0.625) \cdot f(-0.5625) < 0$, o novo intervalo é $[a_4, b_4] = [-0.625, -0.5625]$.

<u>Iteração 5</u> Ponto médio do intervalo $[-0.625, -0.5625]$:

  $z_5 = -0.59375$ (quinta aproximação do zero);

Devemos atender ao seguinte:

- A aproximação $z_5 = -0.59375$ tem um erro absoluto inferior a

$$\frac{0.625 - 0.5625}{2} = 0.03125 > \epsilon.$$

- Para garantir um erro absoluto inferior a $\epsilon = 0.001$, temos que efetuar mais iterações. Um computador é muito conveniente para realizar cálculos repetitivos!

O código seguinte é um programa em C para resolver o problema anterior, gerado pela IA *ChatGPT* e executado no compilador online *https://onecompiler.com/c*. O programa termina quando o erro absoluto da aproximação obtida é inferior a 0.001, o que acontece ao fim de 10 iterações. No fim da execução, o programa fornece a seguinte informação:

- o intervalo final obtido $[-0.5683593750, -0.5664062500]$, que garante, pelo menos, duas casas decimais exatas para a aproximação;
- o valor intermédio deste intervalo, -0.5673828125, que é a aproximação numérica do zero;
- O erro absoluto desta aproximação $0.0009765625 < 0.001$.

■

Início do programa

```
// Determinar uma aproximação numérica do zero de e^x+x, com erro absoluto inferior a
 epsilon=0.001

#include <stdio.h>
#include <math.h>

// Define the function f(x) = e^x + x
double f(double x) {
    return exp(x) + x;
}

int main() {
    double a = -1, b = 0; // Initial interval [a, b]
    double tol = 1e-6;    // Absolute error tolerance
    double c, error;
    int iterations = 1;   // Start counting from the first middle point computation

    // Compute the first midpoint
    c = (a + b) / 2.0;
    error = fabs(f(c));

    // Check if the initial midpoint is already a good approximation
    if (error < tol) {
        printf("Solution found at x = %.10f with error %.10f after %d iteration(s).\n", c,
  error, iterations);
        printf("Final Interval: [%.10f, %.10f]\n", a, b);
        return 0;
    }

    // Perform further iterations if needed
    while ((b - a) / 2.0 > tol) {
        iterations++;

        if (f(a) * f(c) < 0) {
            b = c;
        } else {
            a = c;
        }

        c = (a + b) / 2.0;
        error = fabs(f(c));

        if (error < tol) {
            break;
        }
    }

    printf("Solution found at x = %.10f with error %.10f after %d iteration(s).\n", c, error,
  iterations);
    printf("Final Interval: [%.10f, %.10f]\n", a, b);
    return 0;
}
```

Fim do Programa

Algumas considerações finais sobre o Método da Bisseção

- O método serve para determinar aproximações numéricas de **raízes reais** de equações (não determina raízes complexas!).

- Cada **iteração** do método contém os seguintes passos:
  - Calcular o ponto médio m do último intervalo gerado pelo método.
  - O intervalo garante o erro absoluto pretendido?
  - Se sim, o processo termina e m é o valor aproximado de um zero;
  - Se não, calcular $f(m)$ e definir um novo intervalo.

- É fácil determinarmos, à partida, o número de iterações a efetuar, conhecidos o intervalo $[a, b]$ e o erro absoluto máximo ϵ da aproximação. O erro absoluto máximo cometido escolhendo o ponto médio do um intervalo inicial $[a, b]$ para aproximação do zero, é dado por

$$\frac{b-a}{2}.$$

Por cada iteração que precisemos de efetuar para além desta, o comprimento do intervalo envolvido é dividido por 2, bem como o erro absoluto máximo associado. Assim, se 3 iterações forem necessárias (a primeira, mais duas), o valor máximo do erro é $\frac{b-a}{2^3}$. Se forem efetuadas n iterações, o erro máximo é dado por

$$\frac{b-a}{2^n}.$$

O **número mínimo** n de iterações necessário para garantir que este erro é menor que ϵ, deve satisfazer a desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2^n} < \epsilon \Leftrightarrow 2^n &> \frac{b-a}{\epsilon} \\ \Leftrightarrow n &> \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right). \end{aligned}$$

- Tem a desvantagem de ser um método de convergência lenta, o que significa que necessita de mais iterações do que outros métodos para se obter a mesma precisão na aproximação. Os métodos da *Secante*, de *Newton-Raphson*, e de *Brent*, são mais complexos de aplicar, mas convergem mais rapidamente.

- O intervalo $[a, b]$ pode conter mais do que um zero de $f(x)$. Mas se a derivada $f'(x)$ mantiver o sinal neste intervalo, o que significa que a função é estritamente crescente, ou decrescente, em $[a, b]$, então existe apenas um zero de $f(x)$ no intervalo.

1.1.3 Exercícios

Exercício 1. Determinar o sinal de cada expressão sem usar calculadora.

a $2e^{-1}+1$	b $2e^{-1}-1$	c $\ln(3)-\frac{1}{2}$	d $\frac{1}{3}-\frac{1}{\pi}$
(e) $-\sqrt{25}+4$	f $sin(0.2)-0.3$	(g) $\frac{2^{\pi}-15}{-2}$	(h) $\sqrt[3]{1-sin(\pi/12)}$

Resolução.

(a) $2e^{-1} + 1 = \frac{2}{e} + 1 > 0$.

(b) $2e^{-1} - 1 < 0 = \frac{2}{e} - 1 < 0$, porque $\frac{2}{e} < 1$.

(c) $\ln(3) - \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{2} > 0$.
Notar que
$$\ln(3) = x \Leftrightarrow e^x = 3 \Rightarrow x > 1,$$
porque $e^1 = e < 3$ e e^x é uma função crescente.

(d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi} > 0$, porque $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$.

(f) $sin(0.2) - 0.3 < 0.2 - 0.3 < 0$, porque para $0 \leq x \leq \pi$, vale $sin(x) \leq x$. Pode verificar-se geometricamente a validade desta desigualdade, marcando um ângulo $x \in [0, \pi]$ no círculo unitário, e comparando a medida do segmento correspondente ao seno de x, com a medida do arco de circunferência correspondente, que representa o valor de x.

■

Exercício 2. Cada um dos intervalos seguintes contém um certo número p. Considerando os extremos dos intervalos, qual o número de dígitos corretos de p que, à partida, conhecemos? Para cada intervalo, indicar um número pertencente ao seu interior.

(a) $[0.2, 0.3]$ (b) $]0.2, 0.3[$ (c) $[1.251, 1.252]$ (d) $[1.2513, 1.2514]$

(e) $]1.25136, 1.25139[$ (f) $[-2.268, -1.268]$ (g) $[-2, -1[$

Resolução.

(a) O melhor que podemos dizer sobre a representação em notação decimal de qualquer número neste intervalo, é que tem a forma $0.(\cdots)$. Nada podemos garantir sobre a primeira casa decimal, nem sobre as seguintes, porque o número pode começar por 0.2 ou por 0.3. À partida, conhecemos um dígito correto de p. Um número que pertence ao interior do intervalo é, por exemplo, 0.256251773.

(b) Neste caso, todos os números do intervalo começam por 0.2, porque o intervalo não contém 0.3. À partida, conhecemos dois dígitos corretos de p. Um número que pertence ao interior do intervalo é, por exemplo, 0.256251773.

(c) Neste caso, todos os números do intervalo começam por 1.25. A terceira casa decimal pode ser 1 ou 2. À partida, conhecemos três dígitos corretos de p. Um número que pertence ao interior do intervalo é, por exemplo, 1.251773.

(d) Neste caso, todos os números do intervalo começam por 1.251. A quarta casa decimal pode ser 3 ou 4. À partida, conhecemos quatro dígitos corretos de p. Um número que pertence ao interior do intervalo é, por exemplo, 1.2513773. Notar que o comprimento do intervalo é $1.2514 - 1.2513 = 0.0001$, enquanto o comprimento do intervalo da alínea anterior é $1.252 - 1.251 = 0.001$. Para garantirmos mais algarismos corretos para a representação de um número pertencente a um intervalo, conhecendo apenas os limites do intervalo, temos que diminuir o comprimento do intervalo.

■

Exercício 3. Em cada caso, reescrever a equação da forma $f(x) = g(x)$, de modo que $f(x)$ e $g(x)$ tenham gráficos fáceis de esboçar. Determinar o número de raízes reais da equação (igual ao número de pontos de interseção dos gráficos). Se existirem raízes reais, indicar um intervalo que contenha uma delas.

(a) $x^2 + x + 6 = 0$	(b) $x^2 + x = 0$	(c) $x^2 + x - 5 = 0$	(d) $x^2 - \sqrt{x} = 0$
(e) $ln(x) - x = 0$	(f) $x + cos(x) = 0$	(g) $cos(x) + sin(x) = 0$	(h) $e^x - x = 0$

Resolução.

(a) As raízes da equação $x^2 + x + 6 = 0$ são as mesmas da equação $x^2 = -x - 6$. As raízes desta última equação podem ser interpretadas como a resposta ao problema seguinte: Determinar as abcissas (valores de x) dos pontos de interseção dos gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x - 6$. Ambos os gráficos estão representados na esquerda da figura 5. Verificamos que os gráficos das funções não se intersetam em nenhum ponto, o que significa que a equação **não tem raízes reais**. Tem, no entanto, raízes complexas. Quais são?

(c) As raízes da equação $x^2 + x - 5 = 0$ são as mesmas da equação $x^2 = -x + 5$. Os gráficos das funções nos doismembros da equação estão representados na direita da figura 5. Verificamos que os gráficos das funções se intersetam nos pontos P e Q, o que significa que a equação tem duas raízes reais. Quais são? A equação não tem mais nenhuma raíz para além destas duas. Porquê (pergunta a um bot de IA)? Sendo $f(x) = x^2 + x - 5$ contínua, $f(0) = -5 < 0$ e $f(2) = 1 > 0$, a função tem um zero n intervalo $[0, 2]$.

■

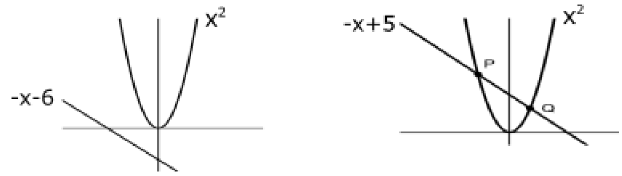

Figura 5:

Exercício 4. Cada um dos intervalos $[a, b]$ indicados contém um certo número, p, que desconhecemos. Indicar o *menor majorante*[1] para o *erro absoluto* cometido se, para cada intervalo, escolhermos o seu ponto médio $m = (a + b)/2$ como aproximante de p.

(a) $[-0.25, 2.31]$ (b) $[3/4, 4/3]$ (c) $[-0.5673, -0.5662]$ (d) $]-2, -1[$

Resolução.

(c) Seja m o valor médio do intervalo. Então o número p pertence ou ao intervalo $[-0.5673, m]$, ou então ao intervalo $[m, -0.5662]$. Em qualquer dos casos, a distância $|m - p|$ entre m e p satisfaz a condição

$$|m - p| \leq \frac{-0.5662 - (-0.5673)}{2} = 0.0011.$$

O valor obtido é menor majorante possível para o erro absoluto cometido ao tomar o ponto médio do intervalo

$$m = \frac{-0.5662 + (-0.5673)}{2} = -0.56675,$$

como aproximação numérica do número p. ■

Exercício 5. Cada um dos intervalos contém um zero de uma função contínua. Qual o número mínimo de iterações do método da bisseção necessárias para obter uma aproximação do zero com erro absoluto inferior ao valor ϵ indicado?

(a) $[0.3, 0.6]$, $\epsilon = 0.01$ (b) $[-2/3, 3/2]$, $\epsilon = 0.001$ (c) $[1, 2]$, $\epsilon = 10^{-3}$

Resolução.

(a)

$$n > \log_2\left(\frac{0.6 - 0.3}{0.01}\right) \approx 4.91 \Rightarrow n = 5.$$

■

Exercício 6. Resolver pelo método da bisseção a equação $2x + cos(x) = 0$, respondendo sucessivamente às alíneas seguintes.

(a) Verificar que a função tem um só zero, no intervalo $[-1, 0]$.

(b) Determinar o número mínimo de iterações do método da bisseção, necessárias para determinar uma aproximação do zero com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

(c) Efetuar as primeiras 3 iterações do método da bisseção.

[1] O menor majorante para o erro absoluto designa-se por *supremo* do erro absoluto. Se esse valor puder ser atingido, então designa-se por *máximo* do erro absoluto.

(d) Usar um programa em C para resolver o problema. No fim da execução, o programa deve indicar: o intervalo final, o valor aproximado do zero obtido, um majorante do erro da aproximação. Qual o número de dígitos exatos da aproximação numérica obtida? Qual o valor de $2x + cos(x)$ para a solução encontrada?

Resolução.

(a) Esta equação não se pode resolver simbolicamente em ordem a x. Mas podemos verificar, por meio de um esboço dos gráficos das funções nos dois membros da equação $cos(x) = -2x$, que existe apenas uma raíz da equação, e que ela é menor que zero. Os seguintes cálculo simples

$$f(0) = 2(0) + cos(0) = 1 > 0 \qquad f(-1) = 2(-1) + cos(-1) < 0,$$

mostram, sabendo que a função é contínua (é a soma de duas funções contínuas), que o zero está contido no intervalo $[-1, 0]$.

(b) $\epsilon < 10^{-6} \Leftrightarrow n > \log_2\left(\frac{0-(-1)}{10^{-6}}\right) \approx 19.9 \Rightarrow n = 20.$

(c) <u>Iteração 1</u> Ponto médio do intervalo $[-1, 0]$:

$z_1 = -0.5$ (primeira aproximação do zero);

- Determinar o erro máximo da aproximação:

  $erro = \frac{0-(-1)}{2} = 0.5 > \epsilon;$

- Determinar o novo intervalo de pesquisa:

  como $f(z_1) = 2(-0.5) + cos(-0.5) \approx -0.12 < 0$, o novo intervalo é $[-0.5, 0]$;

<u>Iteração 2</u> Ponto médio do intervalo $[-0.5, 0]$:

$z_2 = -0.25$ (segunda aproximação do zero);

- Determinar o erro máximo da aproximação:

  $erro = \frac{0-(-0.5)}{2} = 0.25 > \epsilon;$

- Determinar o novo intervalo de pesquisa:

  como $f(z_2) = 2(-0.25) + \cos(-0.25) \approx 0.43 > 0$, o novo intervalo é $[-0.5, -0.25]$;

<u>Iteração 3</u> Ponto médio do intervalo $[-0.5, -0.25]$:

$z_3 = -0.375$ (terceira aproximação do zero);

- Determinar o erro máximo da aproximação:

  $erro = \frac{-0.25-(-0.5)}{2} = 0.125 > \epsilon;$

- Determinar o novo intervalo de pesquisa:

  como $f(z_3) = 2(-0.375) + \cos(-0.375) \approx 0.17 > 0$, o novo intervalo é $[-0.5, -0.375]$;

(d) Adaptando o programa em C da página 6, mudando a função, obtemos o seguinte resultado

- O intervalo final é $[-0.4501838684, -0.4501819611]$, o que garante, pelo menos, seis dígitos exatos para a aproximação;
- O valor aproximado do zero é $z = -0.4501829147$, com um erro absoluto inferior a 0.00000095, após 20 iterações.
- O valor da função no ponto $z = -0.4501829147$ é

$$2(-0.4501829147) + cos(-0.4501829147) \approx 0.0000017,$$

que é muito próximo de zero, como seria de esperar (porquê?).

■

Exercício 7. Resolver o exercício 6 para as funções indicadas. Em cada caso, começar por encontrar um intervalo apropriado $[a, b]$ que contenha algum zero da função.

$(a)\ f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$ $\quad (b)\ f(x) = \ln(x) + 2x$ $\quad$ (c) $f(x) = x^5 + x^4 + 2$

1.1.4 Revisões

Ao longo do semestre deves resolver todos os exercícios que se seguem.

Exercício 8. Resolver em ordem a x, se for possível, as equações e inequações. Testar as soluções obtidas.

$(a)\ 2x^2 + x - 1 = 0$	(b) $\lvert\frac{1}{2} - 2x\rvert < 3$	$(c)\ \frac{1}{2^{xy}} = y$	$(d)\ \sqrt{x^2 + 9} = 5$
$(e)\ \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = 4$	$(f)\ \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+1}$	$(g)\ cb^x = a$	$(h)\ \log_x(5) = 2$
$(i)\ \sqrt{x^5} = \sqrt{x}) = 2$	$(j)\ cb^x = a$	$(k)\ \log_x(5) = 2$	$(l)\ \pi = arcsin(2x)$

Resolução.

(b)

$$\begin{aligned}
\lvert\frac{1}{2} - 2x\rvert < 3 &\Leftrightarrow -3 < \frac{1}{2} - 2x < 3 \\
&\Leftrightarrow -3 - \frac{1}{2} < -2x < 3 - \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow -\frac{7}{2} < -2x < \frac{5}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{7}{4} > x > -\frac{5}{4} \\
&\Leftrightarrow -\frac{5}{4} < x < \frac{7}{4} \qquad\qquad \Leftrightarrow x \in [-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Teste da solução. O valor 0 pertence ao intervalo de soluções. Substituindo x por 0 na equação, obtemos $\lvert\frac{1}{2}\rvert < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 3$, sendo a última relação **verdadeira**. O valor 2 não pertence ao intervalo de soluções. Substituindo x por 2 na equação, obtemos $|\frac{1}{2} - 4| < 3 \Leftrightarrow \frac{7}{2} < 3$, sendo a última relação **falsa**.

■

TPC – entregar na Semana 3

- Faz blocos de estudo de, pelo menos, meia hora sem usar o telemóvel.
- Imprimir em papel os apontamentos. Ler e apontar dúvidas (trabalho individual).
- Resolver os exercícios 1 h, 2 g, 3 f, 4 d, 5 b, 7 b, 8 d g. O trabalho deve ser individual. Depois de feito, é muito proveitoso trabalhar em grupo para verificar resultados e tirar dúvidas.
- O que significam os termos **teorema** e **corolário**?