Exercício **1.** O pvi

$$\begin{cases} \ddot{x} + 3x = \delta(t-2) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases},$$

representa a posição $x(t)$ da massa de um sistema massa-mola não amortecido, que se move numa trajetória linear.

(a) Resolver o pvi.

(b) Esboçar o gráfico da solução $x(t)$. Qual a distância máxima da massa ao ponto $x = 0$?

(c) No instante $t = 4$ a massa está a deslocar-se para a direita ou para a esquerda?

(a) Resolver o pvi usando Transf. de Laplace

De uma só vez, resolve a ED e atribui valores aos parâmetros da solução geral.

$$\mathcal{L}(\ddot{x} + 3x) = \mathcal{L}(\delta(t-2))$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(\ddot{x}) + 3\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\delta(t-2)) \quad (*)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\ddot{x}) = s^2 X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0) \\ \qquad = s^2 X(s) \\ \mathcal{L}(x) = X(s) \\ \mathcal{L}(\delta(t-2)) = e^{-2s} \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow s^2 X(s) + 3X(s) = e^{-2s}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = e^{-2s} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2+3}}_{F(s)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}(X(s)) \\ &= u(t-2)\, f(t-2), \quad \text{com } f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \end{aligned}$$

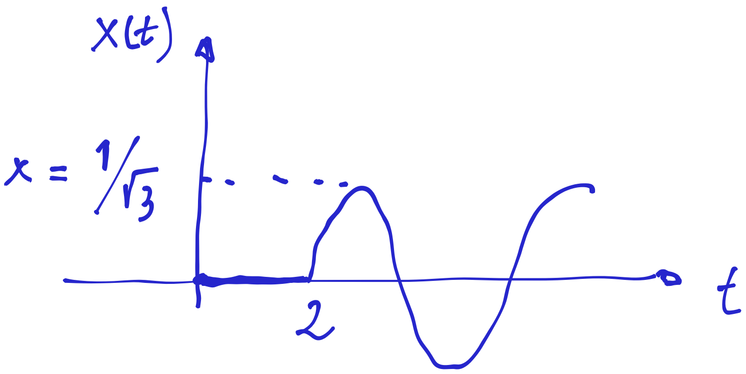
$$\left[\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+3}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}\, t) \\ f(t-2) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-2)) \end{aligned}\right.$$

$$x(t) = u(t-2) \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-2))$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-2)), & t \geq 2 \end{cases}$$

solução do pvi

(b)



A distância máxima da massa ao ponto de repouso é $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, uma vez que o valor máximo de $|\sin(\sqrt{3}(t-2))|$ é 1.

(c) O valor de $x(t)$ diz-nos a posição da massa no instante t, mas não diz para que lado dessa posição a massa se vai deslocar nos instantes $> t$.

A informação do sentido do deslocamento é dada pelo sinal de $\dot{x}(t)$.

Como para $t > 2$ temos

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-2)),$$

e

$$\dot{x}(t) = \cos(\sqrt{3}(t-2))$$

fica $\dot{x}(4) = \cos(2\sqrt{3}) \simeq \cos(3.4) < 0$,

porque $\pi < 3.4 \text{ rad} < \frac{3}{2}\pi \text{ rad}$.

$\therefore$ Em $t = 4$ a massa está a deslocar-se para a esquerda (sentido oposto ao do eixo x)

Exercício **2.** Considerar a região R_1 na figura, cujo contorno é definido pelas curvas $y=-x$, $x^2+y^2=5$ e $y=0$.

(a) Determinar as coordenadas (x_A, y_A) do ponto A.

(b) Escrever em coordenadas cartesianas o integral

$$I = \iint_{R_1} x^2 y \, dA.$$

Nota: se não resolveste a alínea (a), escreve o integral para a região com a mesma forma de R_1, mas com o contorno definido pelas curvas $y=-x$, $x^2+y^2=4$, $y=0$, $(x_A, y_A) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(c) Escrever em coordenadas polares, e calcular, o integral I.

Nota: $\int u' \, u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $\quad (cos(u))' = -u' \, sin(u)$ $\quad cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

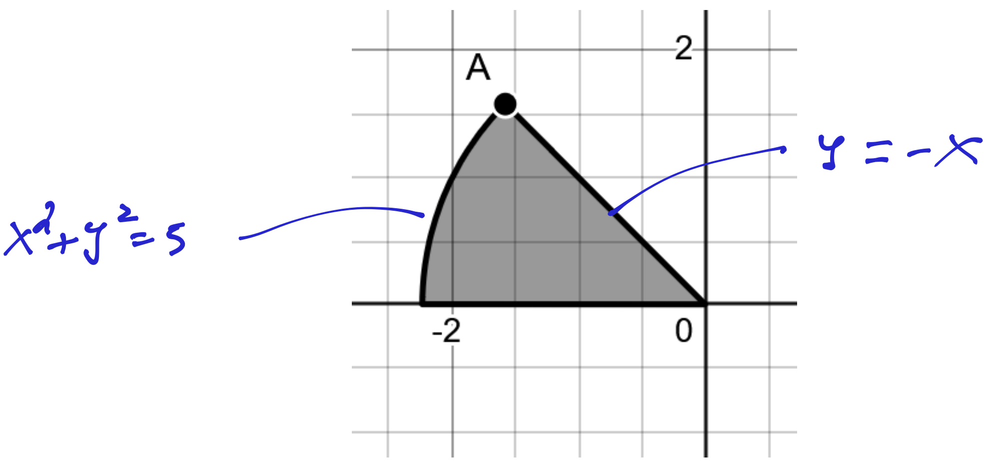


Figura 1

(a) O ponto A está sobre a reta $y=-x$ e a circunferência $x^2+y^2=5$.

- Calculamos os pontos da circunferência para os quais $y=-x$:

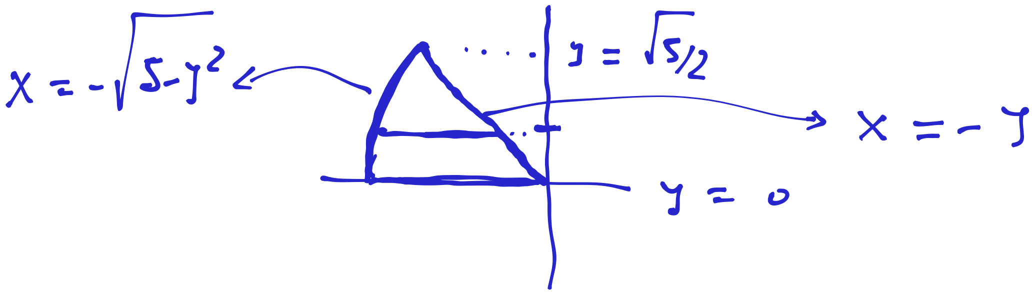
$$x^2+(-x)^2=5 \Leftrightarrow 2x^2=5$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Como $x_A < 0$, deve ser $x_A = -\sqrt{\frac{5}{2}}$. Como $y_A = -x_A$, temos

$$(x_A, y_A) = \left(-\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2}\right)$$

(b) • A figura está justamente contida no intervalo $0 \leq y \leq \sqrt{5/2}$.

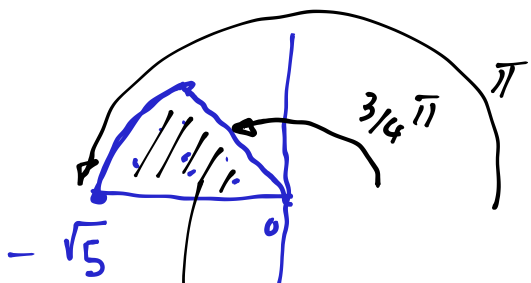
• Para cada valor de y neste intervalo temos $-\sqrt{5-y^2} \leq x \leq -y$



Então

$$I = \int_0^{\sqrt{5/2}} \int_{-\sqrt{5-y^2}}^{-y} x^2 y \, dx \, dy$$

(C)



Todos os pontos (r, θ) nesta região verificam $0 \leq r \leq \sqrt{5}$

$$\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$I = \int_0^{\sqrt{5}} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \underbrace{(r\cos\theta)^2}_{x^2} \cdot \underbrace{(r\sin\theta)}_{y}\, r \, d\theta \, dr$$

$$I = \int_0^{\sqrt{5}} \underbrace{\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} r^4 \cos^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta}_{I_1} \, dr$$

Calcular I

$$I_1 = r^4 \int_{3/4\pi}^{\pi} \cos^2(\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$\int \cos^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta$$

$$= - \int \cos^2\theta \cdot (-\sin\theta) \, d\theta$$

$$\int u^2 \cdot u' \, d\theta$$

$$= - \frac{\cos^3(\theta)}{3} + C$$

$$I_1 = \frac{r^4}{3} \Big[-\cos^3(\theta) \Big]_{3/4\pi}^{\pi} = \frac{r^4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \right)$$

$$= \frac{r^4}{3} \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right) = r^4 \, \frac{2\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}}$$

$$I = \int_0^{\sqrt{5}} r^4 \, \frac{2\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}} \, dr = \frac{2\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}} \, \frac{r^5}{5} \Big|_0^{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}} \, \frac{25\sqrt{5}}{5} = \frac{5\sqrt{5}}{6} \, \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$