Exercício **1.** Calcular a seguinte transformada de Laplace, usando transformadas já conhecidas.

$$\mathscr{L}\left(-2+3sin(2t)+5e^{t-3}+2e^{-t}\right)$$

Resolução.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(-2+3sin(2t)+5e^{t-3}+2e^{-t}\right) &= \mathscr{L}(-2)+\mathscr{L}(3sin(2t))+\mathscr{L}(5e^{t-3})+\mathscr{L}(2e^{-t})\\ &= -2\mathscr{L}(1)+3\mathscr{L}(sin(2t))+5e^{-3}\mathscr{L}(e^{t})+2\mathscr{L}(e^{-t})\\ &= -2\frac{1}{s}+3\frac{2}{s^2+4}+5e^{-3}\frac{1}{s-1}+2\frac{1}{s+1}\\ &= \frac{-2}{s}+\frac{6}{s^2+4}+\frac{5e^{-3}}{s-1}+\frac{2}{s+1}\end{aligned}$$

■

Exercício **2.** Considerar a ED

$$y''+2y'+y=cos(x)$$

(a) Qual o tipo desta equação diferencial?

(b) Resolver a ED, sabendo que admite a solução particular

$$y=\frac{1}{2}sin(x).$$

.

(c) Usar as alíneas anteriores para resolver a ED

$$y''+2y'+y=-3cos(x).$$

Resolução.

(a) É uma ED linear de 2a ordem, não homogénea, com coeficientes constantes.

(b) A solução geral y da ED é igual à soma da solução geral da ED homogénea associada, y_h, com uma solução particular qualquer, y_p. Uma vez que já temos uma solução particular, resta-nos obter a solução geral da ED homogénea associada.
Resolvemos a equação caraterística

$$r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow r=-1 \quad \text{raiz dupla}$$

A solução da ED homogénea é

$$y_h=C_1e^{-x}+C_2xe^{-1}, \quad C_1,C_2\in\mathbb{R},$$

pelo que a solução geral da ED fica

$$\begin{aligned}&y=y_h+y_p\\ &y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-1}+\frac{1}{2}sin(x), \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(c) Pelo princípio de sobreposição, se y_1 é uma solução particular da ED de coeficientes constantes

$$y'' + Ay' + By = f(x),$$

então ky_1, com k constante, é uma solução particular da ED

$$y'' + Ay' + By = kf(x).$$

Assim sendo, a solução geral da ED

$$y'' + 2y' + y = -3cos(x),$$

é

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-1} + \frac{-3}{2}sin(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Exercício **3.** Considerar a ED

$$2 + 4y = -y'.$$

(a) Qual o tipo desta equação diferencial?

(b) Resolver a ED, sabendo que a solução geral da ED homogénea associada é

$$y = Ce^{-4x}, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Resolução.

(a) É uma ED linear de 1a ordem, não homogénea, com coeficientes constantes,

$$y' + 4y = -2.$$

(b) A solução geral y da ED é igual à soma da solução geral da ED homogénea associada, y_h, com uma solução particular qualquer, y_p. Uma vez que já temos a solução da ED homogénea associada, resta-nos obter uma solução particular qualquer da ED. Usamos o método da variação do parâmetro, substituindo

$$y_p = u(x)e^{-4x}$$

na ED completa e calculando depois $u(x)$ a partir da equação obtida.

$$\begin{aligned}
& 2 + 4u(x)e^{-4x} = -(u(x)e^{-4x})' \\
\Leftrightarrow\ & 2 + 4u(x)e^{-4x} = -u'(x)e^{-4x} + 4u(x)e^{-4x} \\
\Leftrightarrow\ & 2 = -u'(x)e^{-4x} \\
\Leftrightarrow\ & u'(x) = -2e^{4x} \\
\Leftrightarrow\ & u(x) = -\int 2e^{4x}dx \\
\Leftrightarrow\ & u(x) = -\frac{1}{2}e^{4x} + C
\end{aligned}$$

Como qualquer solução $u(x)$ serve, usamos a que corresponde a $C = 0$,

$$u(x) = -\frac{1}{2}e^{4x}.$$

Substituindo esta função em

$$y_p = u(x)e^{-4x},$$

obtemos a solução particular

$$y_p = -\frac{1}{2}e^{4x}e^{-4x} = -\frac{1}{2}.$$

A solução geral da ED é

$$y = y_h + y_p = Ce^{-4x} - \frac{1}{2},\ C \in \mathbb{R}.$$

■