Exercício **1.**

(a) Calcular a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{2-x^2}$.

(b) Calcular $f'(1)$ e usar este valor para obter uma aproximação numérica de $f(1.01)$.

Resolução.

(a) A função é $f(x) = \sqrt[3]{2-x^2} = (2-x^2)^{1/3}$. Aplicando a regra da cadeia:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2-x^2)^{-2/3} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{3(2-x^2)^{2/3}}$$

(b) Calcular $f'(1)$:

$$f'(1) = \frac{-2 \cdot 1}{3(2-1^2)^{2/3}} = \frac{-2}{3(1)^{2/3}} = -\frac{2}{3}$$

Aproximação linear de $f(1.01)$:

$$\begin{aligned}
&f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x, \qquad x = 1, \quad \Delta x = 0.01 \\
\Leftrightarrow\ & f(1.01) \approx f(1) + f'(1) \cdot (1.01 - 1) \\
\Leftrightarrow\ & f(1.01) \approx 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(0.01) \\
\Leftrightarrow\ & f(1.01) \approx 1 - \frac{2}{300} \\
\Leftrightarrow\ & f(1.01) \approx 0{,}993\overline{3}
\end{aligned}$$

■

Exercício **2.**

(a) Calcular o integral $\int_0^{\pi/12} sin(3x)dx$.

(b) O valor deste integral representa a área de uma região do plano. Representar graficamente a região.

Resolução.

(a) Seja $I = \int_0^{\pi/12} \sin(3x)\,dx$. Substituindo $u = 3x \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/12} \sin(3x)\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \sin(u)\,du \\
&= \frac{1}{3}[-\cos(u)]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{3}(-\cos(\pi/4) + \cos(0)) \\
&= \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)
\end{aligned}$$

(b) A região é delimitada pelo gráfico de $y = \sin(3x)$, entre $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{12}$ (figura 1).

■

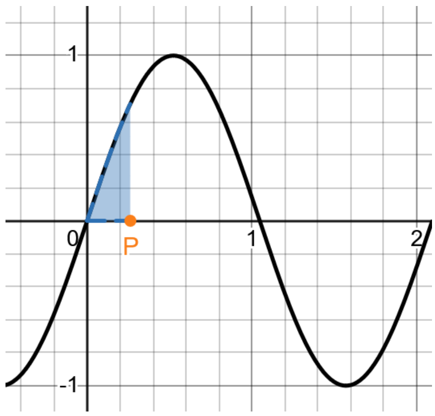

Figura 1: $P = (\pi/12, 0)$

Exercício **3.**

(a) Efetuar a divisão $p(x) \div q(x)$, com $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - x^2 + 3$ e $q(x) = x^3 - x + 2$.

(b) Usar as expressões resultantes da divisão para escrever a função racional $p(x)/q(x)$ como a soma de **um polinómio** com **uma função racional**.

Resolução.

(a)

$2x^5 - 3x^4 - x^2 + 3 \quad | \; x^3 - x + 2$

$-2x^5 + 2x^3 - 4x^2 \quad\quad 2x^2 - 3x + 2$

$-3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3$

$+3x^4 - 3x^2 + 6x$

$2x^3 - 8x^2 + 6x + 3$

$-2x^3 + 2x - 4$

$-8x^2 + 8x - 1$

(b)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{2x^2 - 3x + 2}_{\text{polinómio}} + \underbrace{\frac{-8x^2 + 8x - 1}{x^3 - x + 2}}_{\text{função racional}}$$

■

Exercício **4.**

(a) O que é um ponto crítico de uma função $f(x, y)$? Qual a utilidade dos pontos críticos?

(b) Calcular os pontos críticos da função $f(x, y) = 2x^2 - 2xy^2$.

Resolução.

(a) Um ponto crítico de uma função $f(x,y)$ é um ponto (x,y) do seu domínio para o qual as derivadas parciais se anulam,

$$f_x(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = 0,$$

ou no qual alguma das derivadas parciais não está definida. Os pontos críticos servem para identificar máximos, mínimos ou pontos de sela da função.

(b) Para $f(x,y) = 2x^2 - 2xy^2$:
Derivadas parciais:

$$f_x = 4x - 2y^2, \quad f_y = -4xy$$

Igualar ambas a zero e resolver o sistema resultante.

$$\begin{cases} 4x - 2y^2 = 0 \\ -4xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

Obter os pontos críticos, substituindo os valores da expressão em baixo na equação em cima.

- Se $x = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$
- Se $y = 0 \Rightarrow x = 0$

O único ponto crítico é $(x,y) = (0,0)$.

■