Preparação para o miniteste da semana 10 - Parte 1.

Exercícios

1. Um gato e meio come um rato e meio em um minuto e meio. Em quanto tempo um gato come um rato?
2. O gráfico da figura 1 representa a função $f(x)$ e a sua derivada $f'(x)$. Qual é qual, e porquê?
3. O gráfico da figura 2 é da função $f'(x)$. Fazer um esboço do gráfico de $f(x)$.
4. O estudante Albert Einstein levava nos bolsos dois papéis, um com a fórmula de $f(x)$ e outro com a fórmula de $f'(x)$. Quando chegou a casa verificou que tinha perdido o papel com a fórmula de $f(x)$, restando-lhe apenas o que tinha a fórmula de $f'(x)$, que continha a seguinte inscrição: $f'(x) = 2x$. Perante isto, vociferou "Verdammt, ich werde nie wieder erfahren, wer f(x) ist!"(Bolas, nunca mais vou saber quem é f(x)!). Tem o estudante Einstein razão para este pessimismo? Porquê?

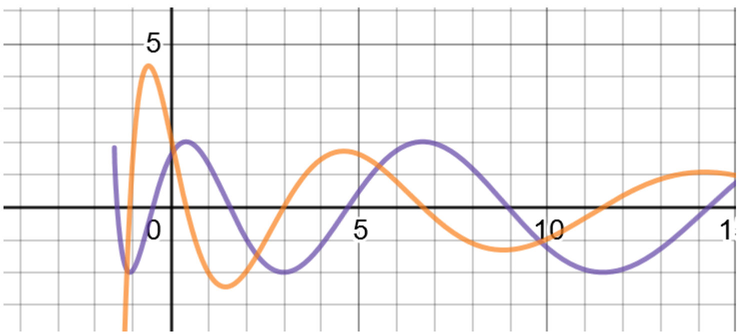
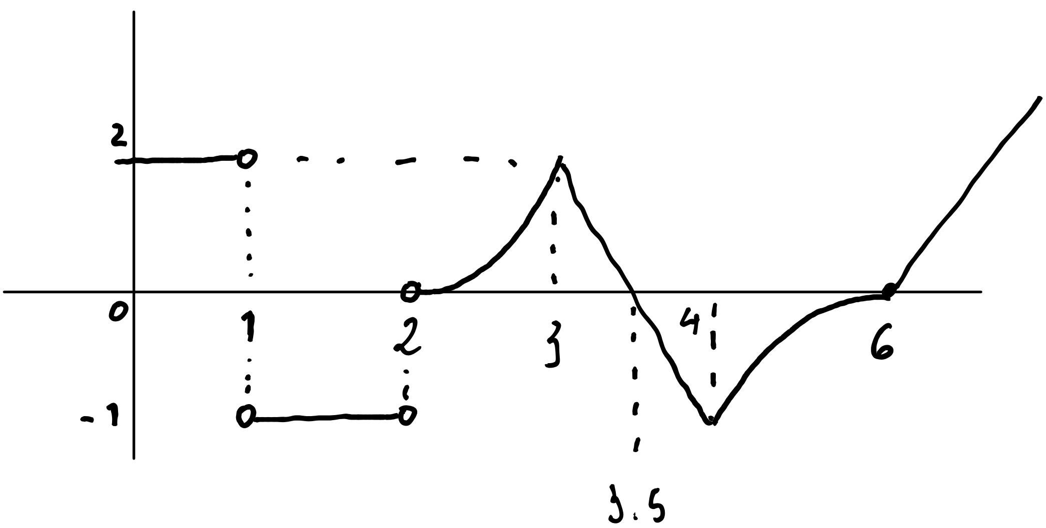
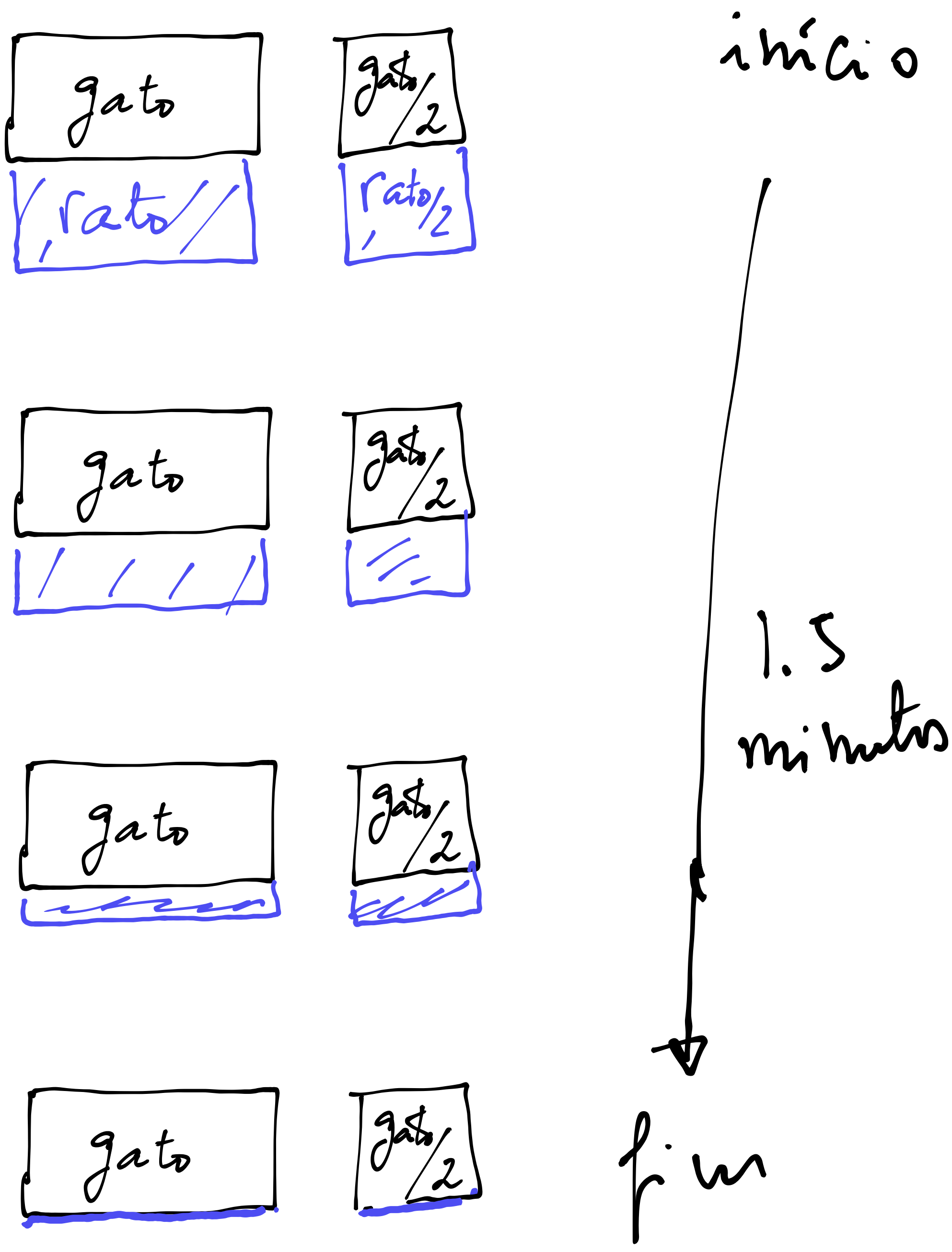


Figura 1



1.



1 gato come 1 rato em 1.5 minutos

ou

Em 1.5 minutos temos 1.5 gatos o $\dfrac{1.5 \text{ ratos}}{1 \text{ gato/rato}}$

um gato por rato.

2. f': amarela ; f: roxa

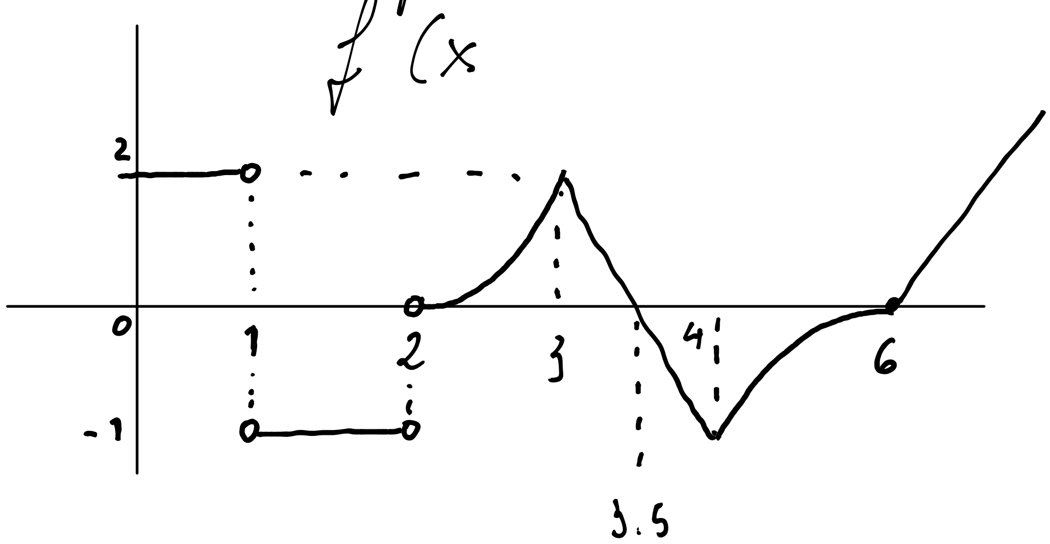
Justificação

- Em todos os intervalos onde f é crescente (decrescente) f' é positiva (negativa). Esta conclusão fica falsa se nela trocarmos os papéis de f e f'.

- f tem máximos ou mínimos relativos em pontos onde $f' = 0$

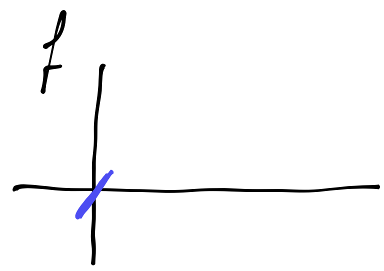
(mas esta propriedade, só por si, não nos permite distinguir os gráficos, porque o enunciado mantém-se verdadeiro trocando os papéis de f e f'.)

3.



vamos construir $f(x)$ para cada intervalo. Supomos $f(0)=0$

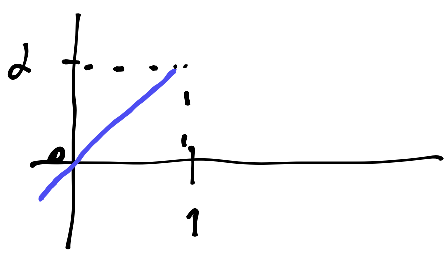
$f'(0) = 2$



$]0,1[$:

$f' > 0 \Rightarrow f$ é crescente

f' constante $\Rightarrow f$ cresce sempre ao mesmo ritmo de 2 unidades de y para cada uma de x.



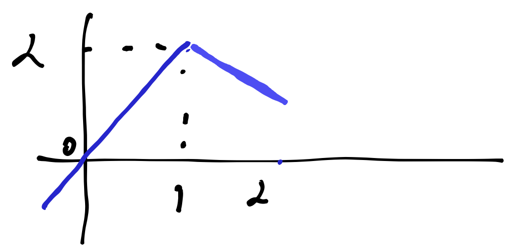
- $f'(1)$ não está definida

$f(1)$ pode estar ou não; não podemos sabê-lo conhecendo apenas $f'(x)$; vamos supôr que $f(1) = 2$

]1,2[:

$f' < 0 \Rightarrow f$ é decrescente

f' constante $\Rightarrow f$ decresce sempre ao mesmo ritmo de 1 unidade de y para cada uma de x.

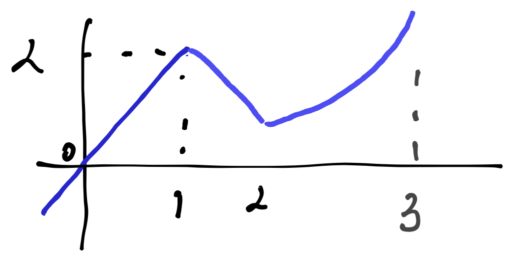


]2,3[:

$f' > 0 \Rightarrow f$ é crescente

f' crescente $\Rightarrow f$ cresce cada vez mais rapidamente.

Para sabermos quão rapidamente precisávamos de $f''(x)$. Então arbitramos o valor de $f(x)$ para $x = 3$.

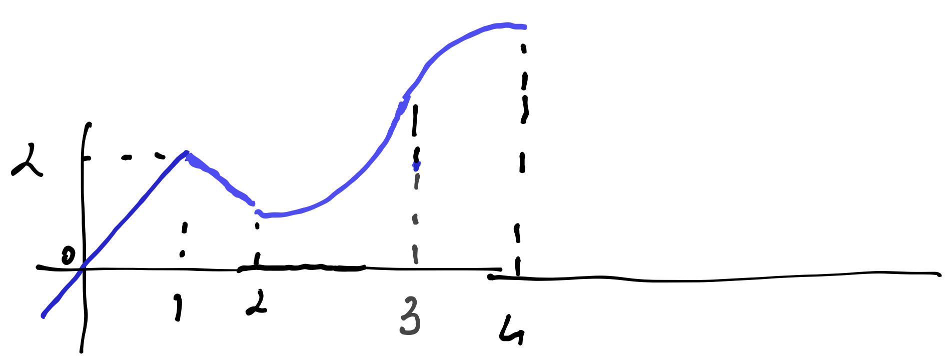


$]3,4[$:

$f' > 0 \Rightarrow f$ é crescente

f' decrescente $\Rightarrow f$ cresce cada vez mais lentamente

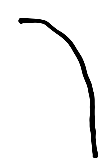
Para sabermos quão lentamente precisávamos de $f''(x)$. Então arbitramos o valor de $f(x)$ para $x = 4$



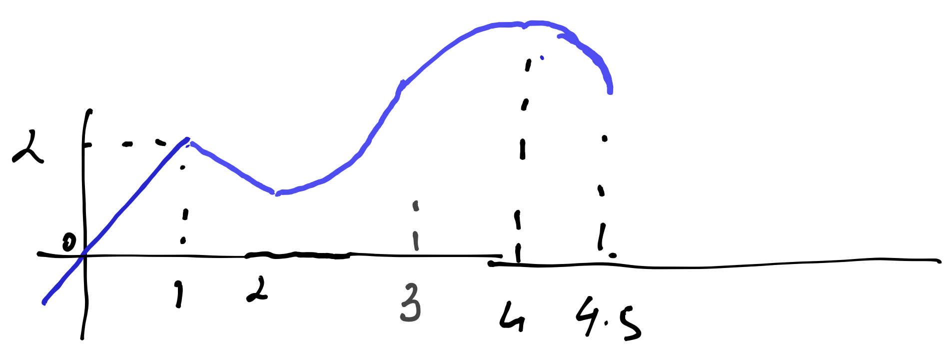
$]4, 4.5[$:

$f' < 0 \Rightarrow f$ é decrescente

f' decrescente $\Rightarrow f$ decresce cada vez mais rapidamente



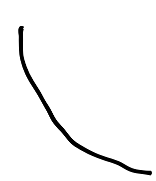
$f(4.5) = f(3.5)$



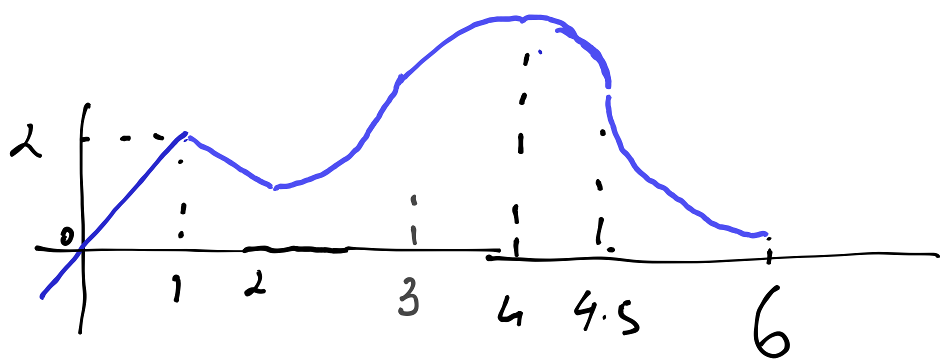
$]4.5, 6[$

$f' < 0 \Rightarrow f$ é decrescente

f' crescente $\Rightarrow f$ decresce cada vez mais lentamente



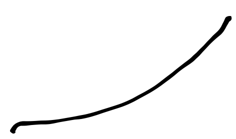
Arbitramos $f(6)$.

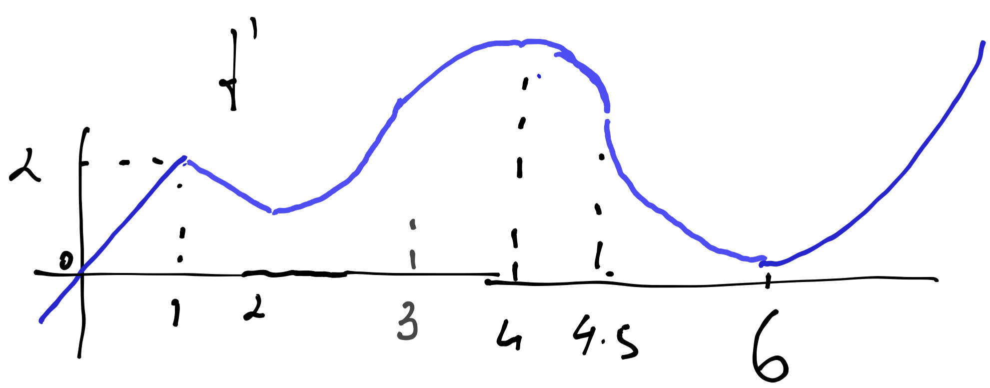


$]6, +\infty[$

$f' > 0 \Rightarrow f$ é crescente

f' crescente $\Rightarrow f$ cresce cada vez mais rápidamente





---

4. Sim, o desconforto do estudante mostra que ele conhece bem a relação simbólica entre f e f'. De facto, se $f'(x) = 2x$ há infinitas propostas para $f(x)$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^2 - 1$

$f(x) = x^2 + 4$

$\vdots$

$f(x) = x^2 + c$

sendo c uma constante qualquer