Para resolveres o TPC, consulta o sumário da semana 14 e o cap. 5 da Sebenta.

Exercícios

1. Desenhar o sólido gerado pela revolução em torno do eixo das abcissas da curva $f(x) = x^2$, com $1 \leq x \leq 2$. Se as dimensões envolvidas vierem em metros, qual o volume do sólido em decímetros cúbicos?

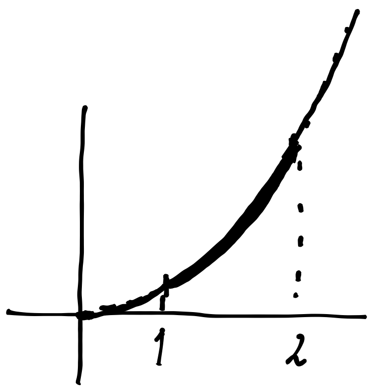
2. Considerar o plano $2x - 3y - z = 1$.
(i) Mostrar que o ponto $(0, 0, -1)$ pertence ao plano.
(ii) Mostrar que o ponto $(1, 1, 2)$ não pertence ao plano.
(iii) Escrever a equação de um plano paralelo a este, que contenha o ponto $(1, 1, 2)$.

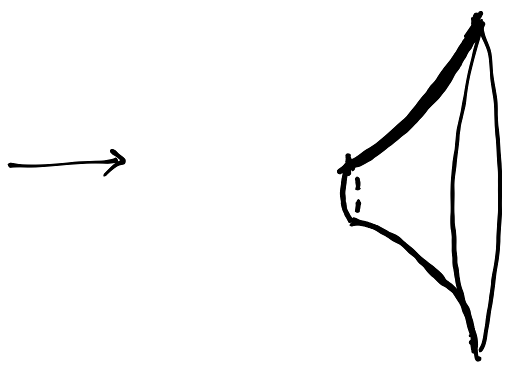
3. Ao resolvermos um sistema de duas equações lineares e três incógnitas, como por exemplo
$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$$
estamos a determinar ternos de valores x, y, z, cada um deles verificando ambas as equações. A interpretação geométrica destes ternos, considera cada um deles como as coordenadas cartesianas de um ponto da reta definida pela interseção dos dois planos. Resolver o sistema de equações e indicar três pontos pertencentes à reta definida pela sua interseção.

4. Representar graficamente o domínio da função $f(x, y) = ln(x) + \frac{1}{2x+y}$

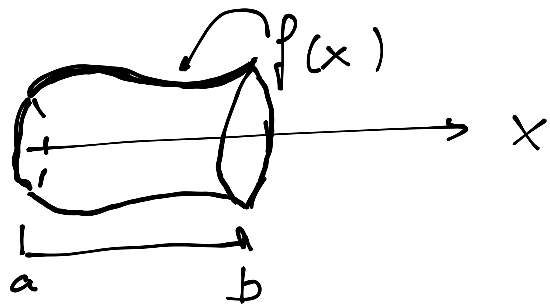
Resolução

1.





Volume : Caso geral



$$\text{Volume} = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$$

$$= \int_1^2 \pi (x^2)^2 dx = \pi \int_1^2 x^4 dx$$

$$= \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 = \pi \left(\frac{2^5 - 1^5}{5} \right)$$

$$= \frac{31\pi}{5} m^3 = \frac{31\pi}{5} \times 1000 \, dm^3$$

$$= 6200\pi \, dm^3 \simeq 18600 \, dm^3$$

[Nota: $1 m^3 = 1000 dm^3$]

---

2. $2x - 3y - z = 1$

(i) O ponto do espaço com coordenadas $(x, y, z) = (0, 0, -1)$ pertence ao plano se este terno de números é uma solução da equação.

É o caso, porque

$$2(0) - 3(0) - (-1) = 1 \iff 1 = 1$$

(ii) Substituindo na equação as coordenadas $(x, y, z) = (1, 1, 2)$, obtemos

$$2(1) - 3(1) - 2 = 1 \iff -3 = 1$$

o que mostra que o ponto não pertence ao plano.

(iii) Um plano é paralelo a outro se têm o mesmo vetor perpendicular (a, b, c), sendo $ax + by + cz = d$ a equação geral do plano.

Dois planos paralelos diferem apenas no parâmetro $\underline{d}$.

A equação do plano pretendido tem a forma

$$2x - 3y - z = d.$$

Basta escolher $\underline{d}$ de modo que o terno $(1, 1, 2)$ seja uma solução.

$$2(1) - 3(1) - 2 = d \Rightarrow d = -3$$

A equação pretendida é

$$2x - 3y - z = -3$$

3.
$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1 \\ x - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ x = 4 + 3y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(4+3y) - 3y - z = 1 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{z-7}{3} \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ x = 4 + 3y \Leftrightarrow x = 4 + 3\,\dfrac{z-7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{z-7}{3} \\ x = z - 3 \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R}$$

O conjunto de soluções tem 1 grau de liberdade, o que significa que podemos determinar os seus pontos $(x, y, z) = \left(z-3, \dfrac{z-7}{3}, z\right)$ escolhendo livremente z.

Estes são os pontos da reta definida pela interseção dos planos. Três deles podem ser

$z = 1 \to (-2, -2, 1)$

$z = 4 \to (1, -1, 4)$

$z = 7 \to (4, 0, 7)$

As coordenadas destes pontos são soluções de ambas as equações.

4. $f(x,y) = \ln(x) + \dfrac{1}{2x+y}$

O domínio de $f(x,y)$ é constituido por todos os pares de números reais (x,y), tais que:

$x > 0$, para se poder calcular $\ln(x)$

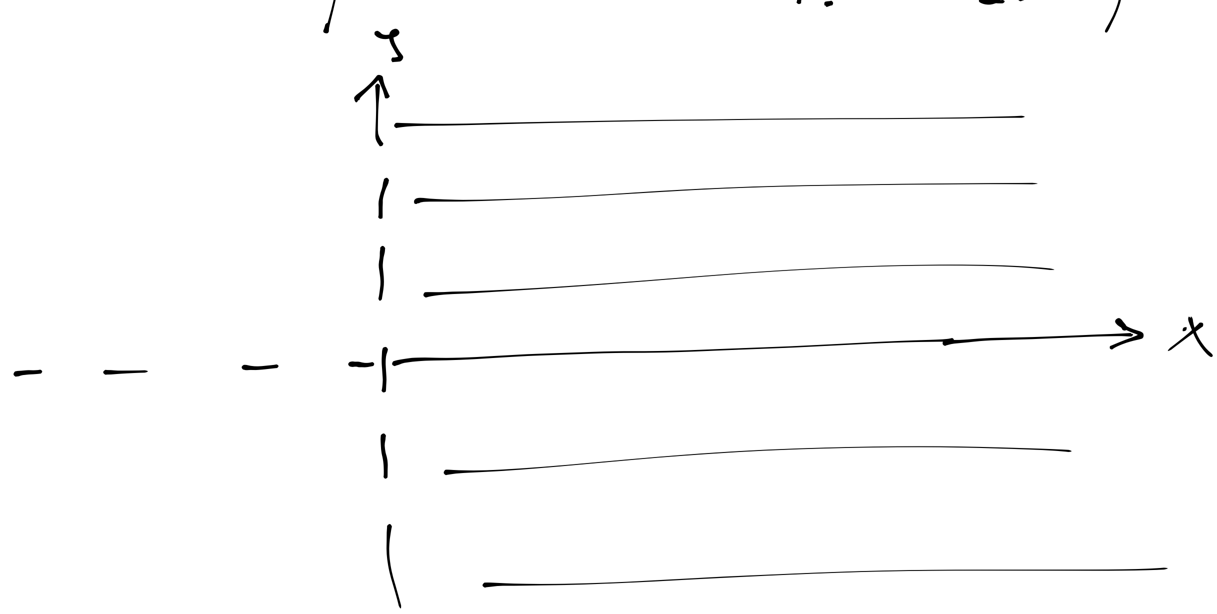
$2x+y \neq 0$, " " " " $\dfrac{1}{2x+y}$

Em resumo,

Domínio de $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x>0) \wedge (2x+y\neq 0)\}$

<u>Representação gráfica</u>:

$x>0$ exclui os pontos sobre o eixo dos yy e os pontos dos 2.º e 3.º quadrantes



$2x+y \neq 0 \iff y \neq -2x$, exclui os pontos da reta $y=-2x$

Os pontos do domínio são todos os pontos dos 1.º e 4.º quadrantes, exceto os da reta $y=-2x$ (zona a sombreado na figura, exceto as linhas tracejadas)