Exercícios

1. Escrever a soma parcial S_5 da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. Escrever em notação sigma a série numérica infinita $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$.
3. Um veículo eleva-se a 50m de altura. No primeiro metro consome 50 litros de combustível, e em cada um dos seguintes 49 metros consome 90% do combustível gasto no metro anterior.
(i) Qual a quantidade de combustível gasta nos primeiros 4 metros do trajeto?
(ii) Usando a notação sigma, escrever a série numérica finita correspondente à quantidade de combustível consumida nos 50 metros da subida. Verificar que se trata de uma série geométrica de razão inferior a 1.
(iii) Usar a fórmula da soma dos primeiros n termos de uma série geométrica para determinar a quantidade total de combustível consumido.
4. Usar a fórmula geral $\int u' tan(u)dx = ln|sec(u)| + C$ para calcular $\int -tan(1-3x)dx$.
5. Usar uma calculadora para averiguar o limite

$$\lim_{n\to+\infty} (-0.95)^n.$$

Sugestão: usar os valores $n = 10, n = 1000, n = 1000000$. Qual o valor de n mais elevado que a tua calculadora aceita sem gerar uma mensagem de erro?

6. Calcular a área do triângulo na figura usando a fórmula da área conhecida. Calcular depois a área usando integrais definidos.

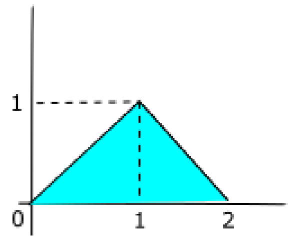


Figura 1

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$S_5 = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

2) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

$\frac{1}{1+1} \quad \frac{2}{2+1} \quad \frac{3}{3+1} \quad \cdots$

3) (i) Litros de combustível consumido

$= 50 + 0.9 \times 50 + 0.9^2 \times 50 + 0.9^3 \times 50$

1º metro, 2º metro, 3º metro, 4º metro

(ii)

Combustível consumido : C

$$C = \sum_{n=0}^{49} 50 \times 0.9^n$$

Trata-se de uma série geométrica finita de razão igual a $0.9 < 1$.

(iii) A soma S_n dos primeiros n termos de uma série geométrica com primeiro termo $\underline{a}$ e razão $\underline{r}$ é dada por

$$S_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

No caso, temos $a = 50$, $r = 0.9$

$$S_{50} = 50 \frac{1 - 0.9^{50}}{1 - 0.9} \approx 497.4 \text{ litros}$$

4) $$\int u' \cdot \tan(u)\, dx = \ln|\sec(u)| + c$$

u é uma funçaõ de x qualquer

$$I = \int - \tan(1-3x)\, dx = \frac{1}{3} \underbrace{\int \overbrace{-3}^{u'} \tan(\overbrace{1-3x}^{u})\, dx}_{\text{Multiplicar 'dentro' por 3 e 'fora' por } 1/3}$$

$$= \frac{1}{3} \ln|\sec(1-3x)| + C$$

---

5) $$(-0.95)^{10} \cong 0.599$$

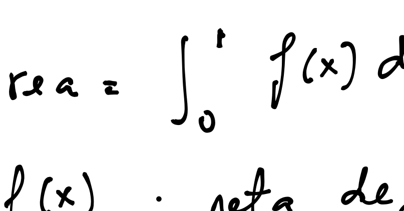
$$(-0.95)^{1000} \cong 5.29 \times 10^{-23}$$

$$(-0.95)^{1000000} = 0$$

Este valor é uma aproximaçaõ; a máquina usada naõ tem precisaõ para representar um valor taõ pequeno. Provavelmente aceita um expoente taõ grande quanto se queira, porque o ignora internamente e responde sempre com zero.

---

6)



$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Usando integrais

$$\text{Área} = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 g(x)\, dx$$

$f(x)$: reta definida pelos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$: $y = x = f(x)$

$g(x)$: reta definida pelos pontos $(1,1)$ e $(2,0)$

$$m = \frac{2-1}{0-1} = -1$$

$$\therefore \; y = -x + b$$

$\underline{b}$: Substituir coordenadas do ponto $(1,1)$

$$1 = -1 + b \Rightarrow b = 2$$

$$y = -x + 2 = g(x)$$

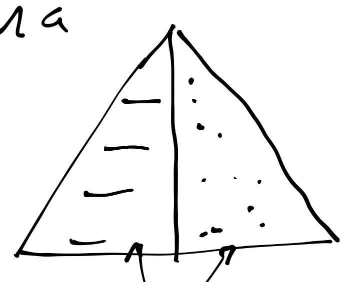
$$\text{Área} = \int_0^1 x \, dx + \int_1^2 (-x+2) \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \underbrace{\left[\underbrace{(-2+4)}_{2} - \underbrace{\left(-\frac{1}{2}+2\right)}_{\frac{3}{2}}\right]}_{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

__Alternativa__: atendendo à simetria da figura



áreas iguais

$$\text{Área} = 2\int_0^1 x \, dx$$

$$= 2 \, \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$