

Preparação para o miniteste da semana 10 - Parte 2.

Exercícios

1. Verdadeira ou falsa?

"A expressão $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ significa que o limite de $f(x)$ à direita, no ponto $x = a$, existe e é igual a $+\infty$."

2. Definir rigorosamente cada um dos conceitos.

(1) A função $f(x)$ é crescente no ponto $x = p$.

(2) A função $f(x)$ é crescente no intervalo $[a, b]$.

3. Qual o domínio da função?

$$f(x) = \frac{\ln(\sqrt{2x-1} - 2)}{\sqrt[3]{x^2+1}} \quad 2.36(j)$$

4. Calcular as derivadas das funções nas alíneas 2.37 (j) (l) e ~~2.37 (k)~~ da sebeta de exercícios.

5. A função

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$$

pode ser escrita da forma

$$f(x) = (3x)(x^2+1)^{-1}.$$

Mostrar que as derivadas das duas formas da função são iguais.

1. Falsa. Quando um limite existe o seu valor é um número.

A expressão $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ diz-nos como não existe o limite.

/

2. (1) Uma função é crescente no ponto $x=p$ do seu domínio, se, e somente se, existe um intervalo $[a, b]$ contendo p , tal que para qualquer elemento x do intervalo se tem

$$(x < p) \Rightarrow (f(x) < f(p))$$

e

$$(x > p) \Rightarrow (f(x) > f(p))$$

(2) $f(x)$ é crescente no intervalo $[a, b]$, se, e somente se, é crescente em todos os pontos do intervalo [cf. definição anterior]

$$3. \quad f(x) = \frac{\ln(\sqrt{2x-1} - 2)}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

Domínio de $f(x)$: Conjunto de todos os valores de x para os quais é possível calcular a imagem $f(x)$

• Forma da expressão: $\frac{A}{B}$,
Com $B = \sqrt[3]{x^2+1}$.

Para calcular A/B deve ser $B \neq 0$.

Como $x^2+1 \neq 0$, B não impõe restrições a $\mathbb{R}$ para o domínio de f .

• $A = \ln(\sqrt{2x-1} - 2)$

Duas condições sobre x para o cálculo de A

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0, & \text{por causa da raiz;} \\ \sqrt{2x-1} - 2 > 0, & \text{" " de } \ln(); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ \sqrt{2x-1} - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1/2 \\ \sqrt{2x-1} > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2x-1 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x > 5/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x > 5/2$$

Resposta: (Domínio de f) = $]5/2, +\infty[$

4. 2.37(j) $y' = (\sin(2x+1))'$
 $= (2x+1)' \cos(2x+1)$
 $= 2 \cos(2x+1)$

2.37(k) $y' = (\csc(x))' = \left(\frac{1}{\sin(x)}\right)'$
 $\Leftrightarrow y' = \frac{(1)'\sin(x) - 1 \cdot (\sin(x))'}{\sin^2(x)}$
 $= \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{1}{\sin(x)}$
 $= -\cot(x) \cdot \csc(x)$

↳ Nota: $\cot \rightarrow$ co-tangente
 $\csc \rightarrow$ co-secante

2.36 (j) $y' = \left(e^{(1-x)^2} \right)'$

$$= \left((1-x)^2 \right)' e^{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{2(1-x)(1-x)'}_{= -2(1-x)} \\ & = 2(x-1) \end{aligned}$$

$$= 2(x-1) e^{(1-x)^2}$$

5.

$$D_1 = \left(\frac{3x}{x^2+1} \right)' = \frac{(3x)'(x^2+1) - 3x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3(x^2+1) - 3x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

$$D_2 = \left[(3x)(x^2+1)^{-1} \right]' =$$

$$= \underbrace{(3x)'}_3 (x^2+1)^{-1} + (3x) \underbrace{\left((x^2+1)^{-1} \right)'}_{(-1)(x^2+1)^{-2}}$$

$$\begin{aligned}
 (*) &= - (x^2+1)^{-2} (x^2+1)' \\
 &= -2x (x^2+1)^{-2}
 \end{aligned}$$

$$D_2 = 3(x^2+1)^{-1} - (3x) \left(2x (x^2+1)^{-2} \right)$$

$$= \frac{3}{x^2+1} - \frac{6x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3(x^2+1) - 6x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore D_1 = D_2$$

