

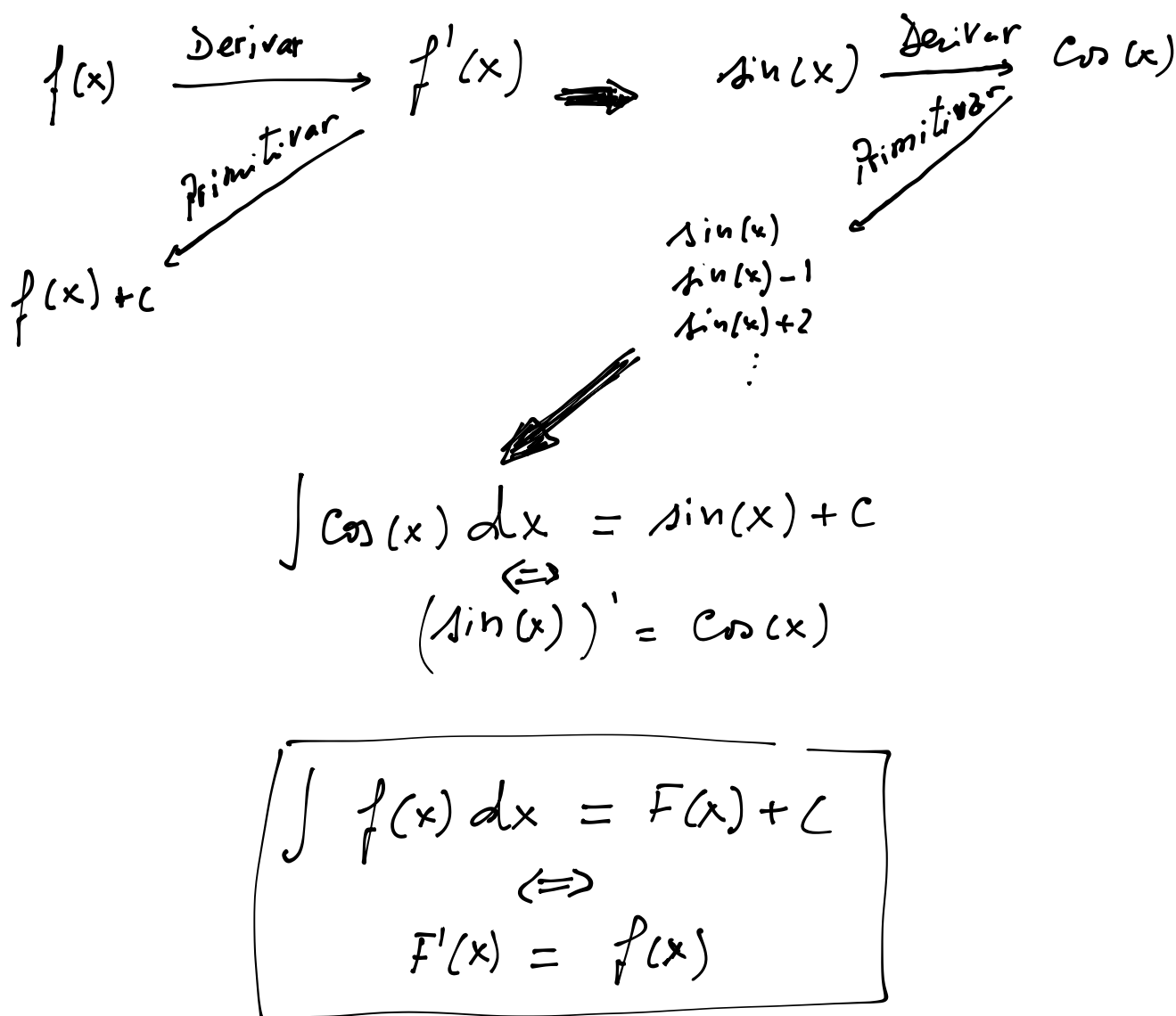
Sumário

- Cap3. Integrais de Funções Reais de Uma Variável Real.
 - Primitivação: operação de anti-derivação.
 - Primitivas de algumas funções elementares.
 - Cálculo de áreas (revisão): retângulo, triângulo, círculo.
 - Função área, $A(x)$, da região definida pelo gráfico e uma função e o eixo das abcissas, num intervalo $[a, b]$ do seu domínio.
 - Esboço de demonstração da relação fundamental $A'(x) = f(x)$ Exercícios.

Leitura e Vídeos:

- Sebenta teórica, Capítulo 3: páginas 2-10.
- Vídeos Cap3. 3.1 a 3.9.

O essencial



Primitivação de Algumas Funções Elementares

$$1. \int e^x dx = e^x + C \quad \overset{\text{porque}}{\iff} (e^x)' = e^x$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C \iff (\ln(|x|))' = \frac{1}{x}$$

$$3. \int ? dx = -\cos(x) + C$$

$$\begin{aligned} ? &= (-\cos(x))' = -(\cos(x))' \\ &= -(-\sin(x)) = \sin(x) \end{aligned}$$

$$4. \int ? dx = (\ln(2x))^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\begin{aligned} ? &= \left((\ln(2x))^{\frac{3}{2}} \right)' \\ &= \frac{3}{2} (\ln(2x))^{\frac{3}{2}-1} (\ln(2x))' \\ &= \frac{3}{2} (\ln(2x))^{\frac{1}{2}} \underbrace{(\ln(2x))'}_{= \frac{(2x)'}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2x}$$

$$7. \int \frac{2}{x} dx = ? + C$$

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx = \underbrace{2 \ln(|x|) + C}_{=?}$$

$$8. \int x^{1/3} dx = ? + C$$

$$\int x^{1/3} dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C$$

$$= \underbrace{\frac{3}{4} x^{4/3}}_{=?} + C$$

$$9. \int (-3 + 4x^2 - \sin(2x) + \frac{e^x}{4}) dx$$

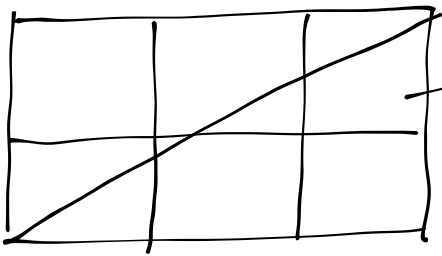
$$= \int -3 dx + \int 4x^2 dx - \int \sin(2x) dx + \int \frac{e^x}{4} dx$$

$$= -3 \underbrace{\int dx}_x + 4 \underbrace{\int x^2 dx}_{x^3/3} - \underbrace{\int \sin(2x) dx}_{-\frac{\cos(2x)}{2}} + \frac{1}{4} \underbrace{\int e^x dx}_{e^x}$$

$$= -3x + \frac{4}{3} x^3 + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4} e^x + C$$

Os integrais servem para calcular áreas

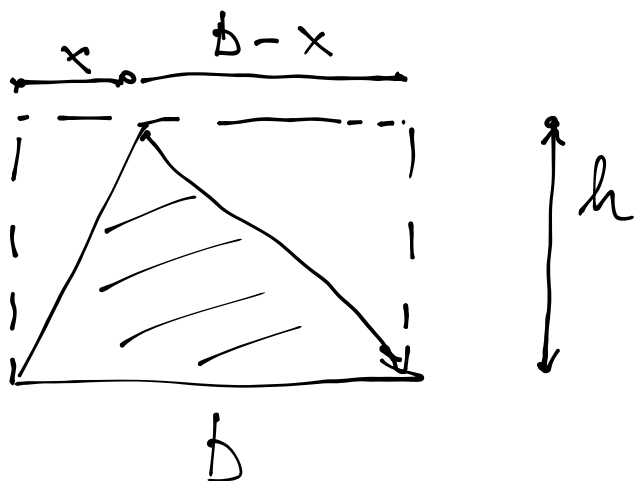
$a = 2$



$b = 3$

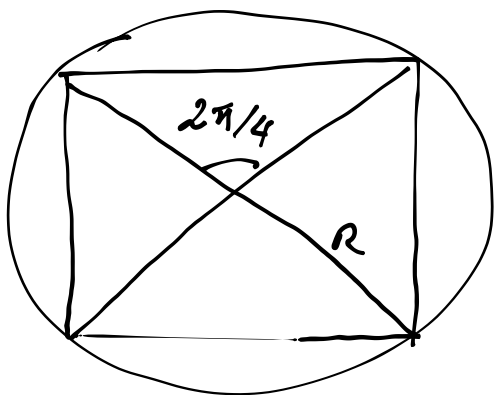
Área $\square = a b = 2 \cdot 3 = 6$

Área $\triangle = \frac{ab}{2} = 3$

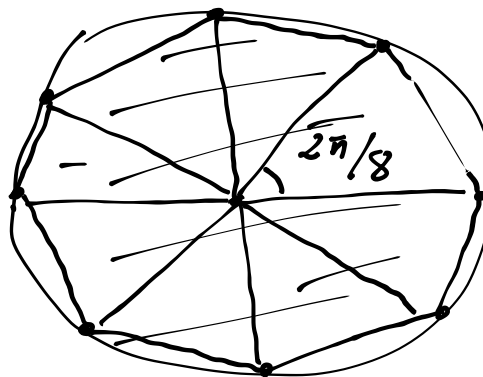


$$\begin{aligned}
 \text{Área}_{\triangle} &= \text{Área}_{\square} - (\text{Área}_{\nabla} + \text{Área}_{\nabla}) \\
 &= b h - \left(\frac{h x}{2} + \frac{(b-x) h}{2} \right) \\
 &= b h - \frac{b h}{2} \\
 &= \frac{b h}{2}
 \end{aligned}$$

Área do Círculo de Raio R



4 triângulos



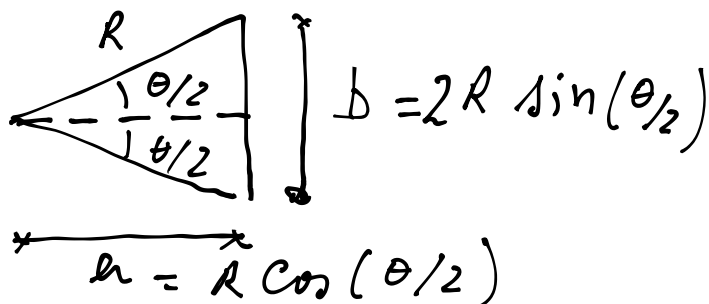
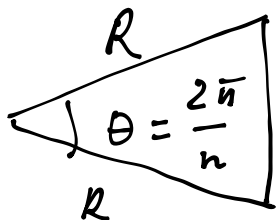
8 triângulos

Inscriver n triângulos equiláteros no círculo,
Com um vértice no centro e os outros dois
apoiados na circunferência

Aproximar a área do círculo pelas
somadas das áreas dos triângulos

↓ caso de n triângulos

Área de um triângulo:



$$\text{Área}_{\triangle} = \frac{bh}{2}$$

$$= \frac{2R^2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{2} = R^2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})$$

Por ser $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

temos

$$\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

2

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2}$$

$$\text{Então } \text{Área}_{\triangle} = \frac{R^2}{2} \sin(\theta)$$

Como temos n triângulos inscritos no círculo,
fica $\theta = \frac{2\pi}{n}$

$$\text{e } \underbrace{\text{Área dos } n \text{ triângulos}}_{A_n} = \frac{n R^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

A área do círculo é dada por

$$A_{\odot} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

• Por ser

$$\begin{aligned} \frac{n R^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) &= \frac{\pi R^2}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \pi R^2 \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \end{aligned}$$

e

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

temos

$$\begin{aligned} A_{\odot} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi R^2 \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \\ &= \pi R^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}}_{=1} \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

$$A_{\text{c}} = \pi R^2$$

que é a fórmula para a área do círculo de raio R .