Sumário

- **Cap2. Funções Reais de Variável Real.**
  - Reta tangente ao gráfico de uma função num ponto. Aproximação linear de uma função numa vizinhança de um ponto do domínio.
  - Gráfico de f' a partir do gráfico de f.
  - Otimização de funções.
  - Exercícios.

Leitura e Vídeos:

- Sebenta teórica, Capítulo 2: páginas 40-44.
- Vídeos Cap2. 2.32, 2.37, 2.38

O essencial

- Reta tangente ao gráfico da função $f(x)=\sin(x)$ no ponto $(x,y)=(60^\circ, \sin(60^\circ))$

$\downarrow$ $y = mx + b$

m: $m = f'(60^\circ)$

$f'(x) = (\sin(x))' \underset{\uparrow}{=} \cos(x)$

se x em radianos

$60^\circ = \pi/3$ rad

$f'(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2 = m$

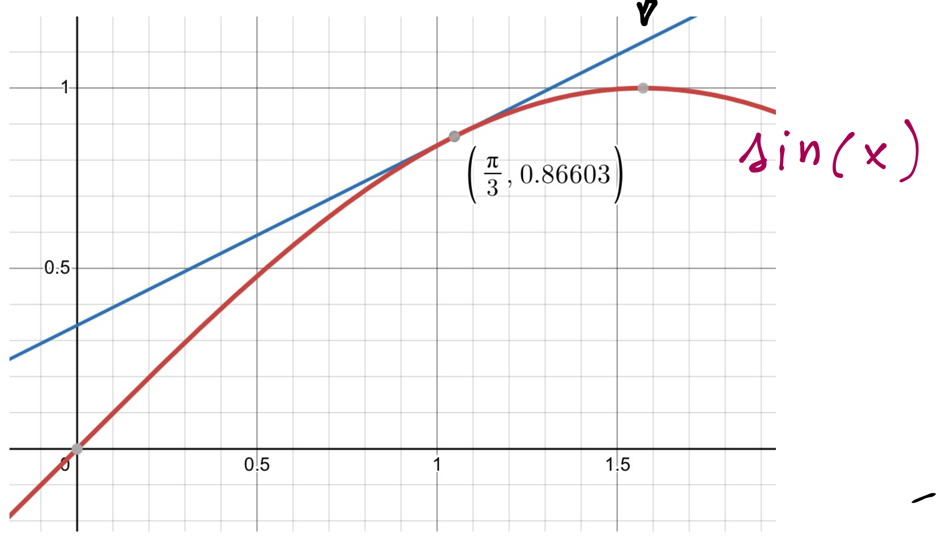
b: ponto da reta $(x,y) = (\pi/3, \sin(\pi/3))$
$= (\pi/3, \sqrt{3}/2)$

Substituir na equação

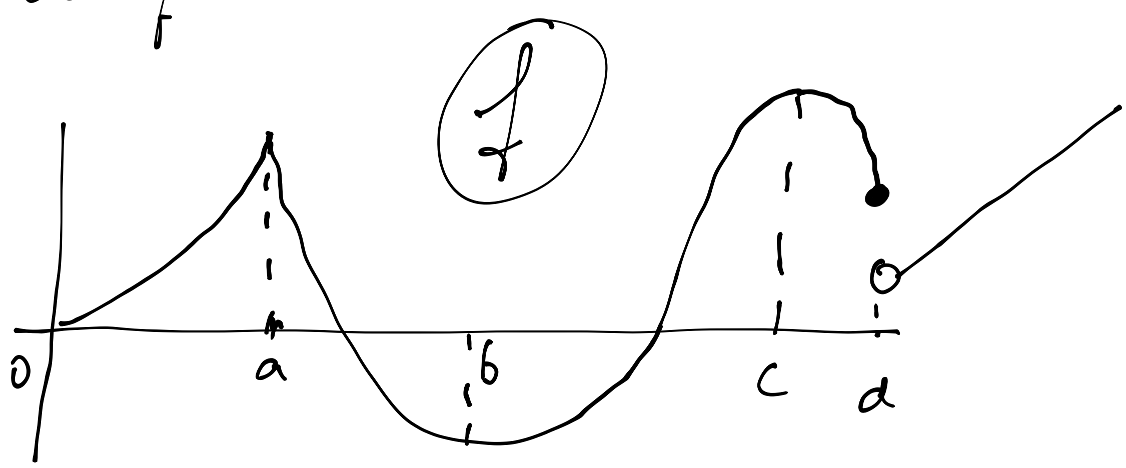
$y = \frac{1}{2}x + b$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\pi/3 + b \Rightarrow b = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{2}$

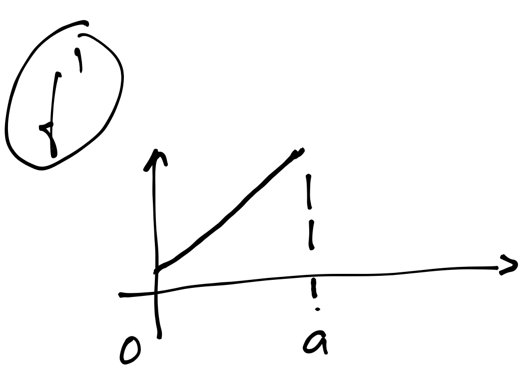


· Gráfico de f' a partir do gráfico de f



$]0, a[$: função cresce cada vez mais rapidamente

↓ Derivada positiva e crescente

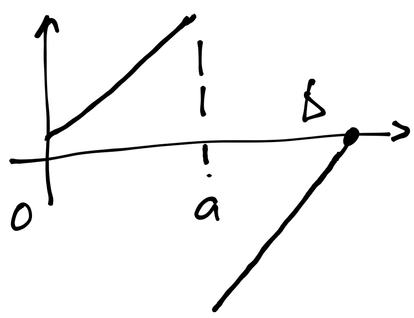


]a, b[: f decresce cada vez mais lentamente.

↓

derivada negativa e crescente, sendo nula em x = b

f'

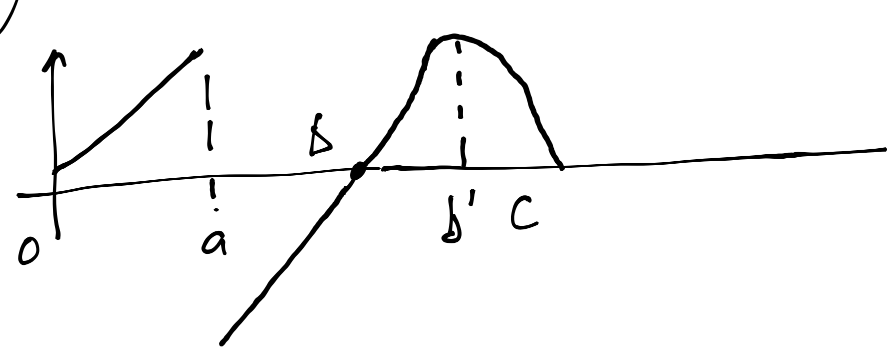


]b, c[: f cresce cada vez mais rapidamente até um ponto x = b' entre b e c ; depois cresce cada vez mais lentamente até x = c

↓ f' é positiva e crescente entre b e b' e positiva e decrescente entre b' e c, sendo nula em c

em

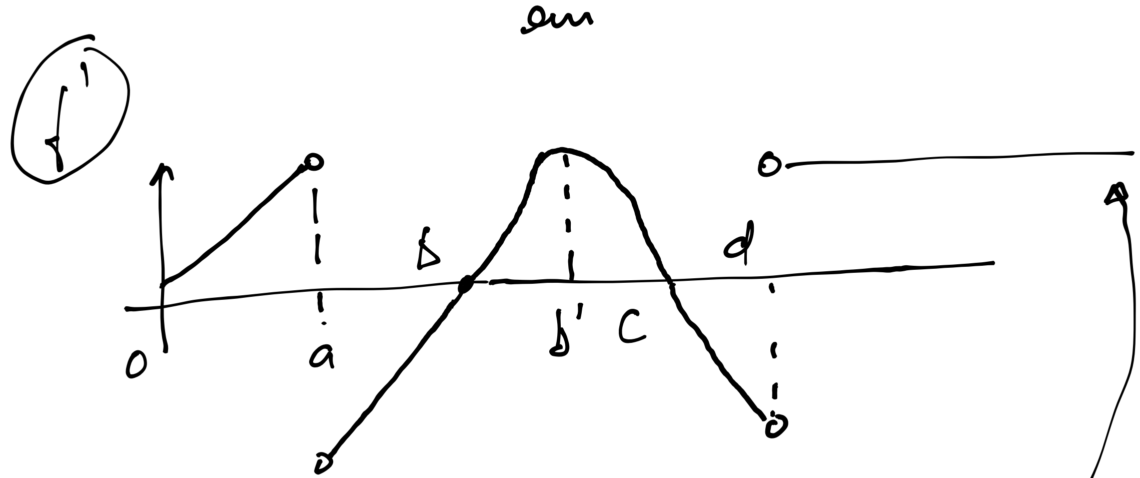
f'



$]c, d[$: f decresce cada vez mais rápido

$\downarrow$ f' é negativa decrescente

em



$]d, +\infty[$: f é linear e crescente

$\downarrow$ f' é constante e positiva

O gráfico proposto para f' é apenas um esboço.

$\downarrow$

Os valores de f' e a orientação das concavidades seu gráfico necessitam que conheçamos f''

Exercício de Otimização

- Determinar o valor mínimo da função

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 4$$

no intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

Resolução

- Se tivermos o gráfico de $f(x)$ podemos inspecioná-lo no intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ e determinar o valor mínimo de $f(x)$ nesse intervalo.
- Mas não precisamos de toda a informação que o gráfico fornece para resolver este problema.
- Basta sabermos como varia f neste intervalo.
- Esta informação é dada pelos sinais de f' no intervalo. Vamos determiná-los.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' - (2x)' + (4)'$$

C.A.

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}(3x^2) = x^2$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

$$(2x)' = 2$$

$$(4)' = 0$$

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

Determinamos agora os pontos onde $f'(x)$ é nula, ou seja, os pontos onde o gráfico de $f'(x)$ corta o eixo dos xx.

entre cada dois destes pontos consecutivos, o gráfico de f' está todo acima do eixo dos xx ou todo abaixo do eixo dos xx pelo que o sinal de f' é positivo ou negativo no intervalo correspondente

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0$$

$$\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)(1)}}{2(1)}$$

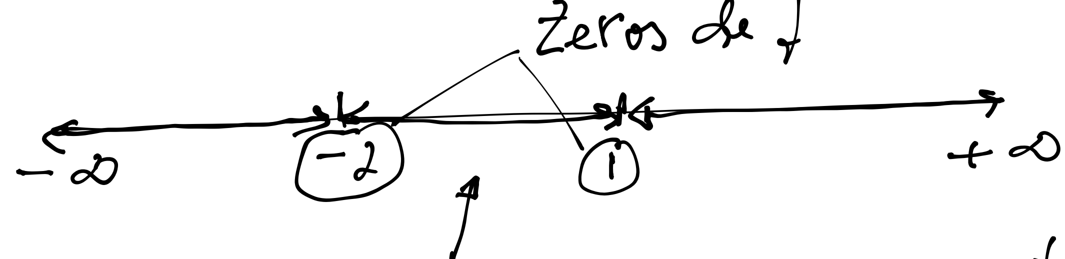
$$\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\iff (x = -2) \vee (x = 1)$$

O sinal de f' também pode mudar em pontos onde f' não esteja definida, Como, por exemplo o ponto $x = a$ do gráfico do exemplo anterior.

Mas neste problema f' é um polinómio do 2º grau, e qualquer polinómio se encontra definido para todos os valores reais de x, pelo que não existem pontos de indefinição de $f(x)$.

Os zeros de $f'(x)$ dividem a reta real em 3 partes.



- o intervalo que nos interessa, $[-1, \frac{1}{2}]$ está contido neste.
- o sinal de f' é o mesmo em todos os pontos do intervalo. Basta então determiná-lo em um deles:

$$f'(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2 < 0$$

Então f é <u>decrescente</u> no intervalo $]-2, 1[$, e por isso é <u>decrescente</u> no intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$. Logo, atinge o seu valor mínimo para $x = \frac{1}{2}$:

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/2)^2}{2} - 2(1/2) + 4$$
$$= 19/6$$

1916 é a resposta ao problema.