Sumário da Semana 6

Cálculo/Cálculo I/Matemática Aplicada I – 2024/25 ESTG/IPBragança

Funções trigonométricas inversas Sequências numéricas: termos, termo geral, convergência. Primeiro miniteste de avaliação.

Limite de uma função num ponto. Continuidade de uma função num ponto e num intervalo. Derivadas: Taxa de variação média de uma função relativa a dois pontos do seu domínio. Velocidade média.

Sumário

- **Cap2. Funções Reais de Variável Real.**
  - Funções trigonométricas inversas
  - Sequências numéricas: termos, termo geral, convergência.
  - Limite de uma função num ponto.
  - Continuidade de uma função num ponto e num intervalo.
  - Derivadas: Taxa de variação média de uma função entre dois pontos do seu domínio.
  - Velocidade média.
  - Exercícios.
  - Primeiro miniteste de avaliação.

Leitura e Vídeos:

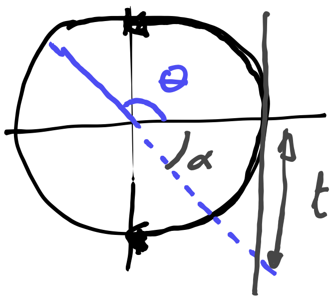
- Sebenta teórica, Capítulo 2: páginas 14-26.
- Vídeos Cap2. 2.18 - 2.27

No final desta semana, deves ser capaz de:

- Usar uma função trigonométrica inversa.
- Perceber os conceitos de limite de uma sequência e de limite de uma função num ponto.
- Determinar e interpretar a taxa de variação média de uma função entre dois pontos do seu domínio.

O essencial

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$$



$\tan(\theta) = x$

$$\arctan(x) = \alpha$$

$$\theta = \arctan(\theta) + \pi$$

Sequências Numéricas

Posição n: $1, 2, 3, 4, \ldots, n$

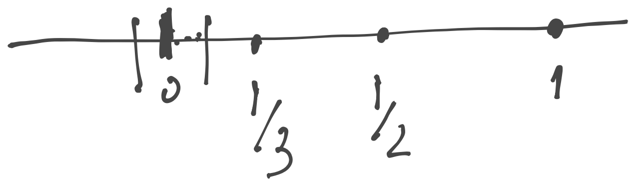
(u_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

termos

termo geral

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0}$$

A sequência tem limite zero. É convergente



Para qualquer intervalo contendo 0 existe:

- uma quantidade finita de elementos fora do intervalo;
- uma infinidade de elementos dentro do intervalo;

0 é ponto de acumulação do conjunto $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$

Exemplos

1) $(u_n): 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$

$$u_n = n$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (n) = +\infty}$$

A sequência numérica não tem limite.

É divergente

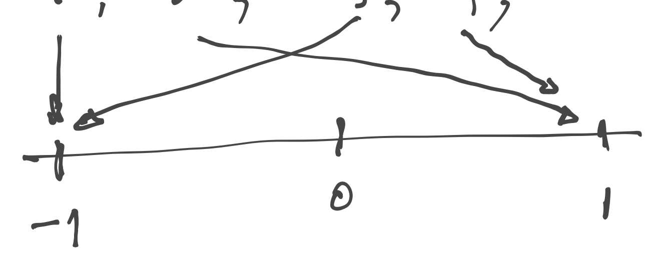
---

2) $(u_n) = -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n$ não exist

A sequência é oscilante

$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$



3) (u_n): $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots$

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

A sequência numérica é convergente para zero.

<u>Exercício 2.14</u>

(b) $$u_n = \frac{n^2-1}{2n}$$

$$(u_n) = 0, \frac{3}{4}, \frac{8}{16}, \frac{15}{8}, \frac{24}{10}, \dots$$

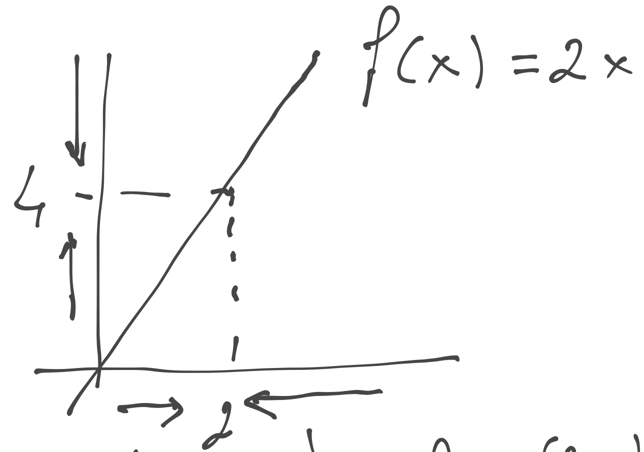
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2-1}{2n} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{2n} - \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{2} \right)}_{+\infty} - \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2n} \right)}_{0} = +\infty$$

A sequência numérica é divergente

Limites de Funções



$$\lim_{x \to 2^+} (2x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} (2x) = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to 2} (2x) = 4$$

Função Contínua no ponto $x = a$

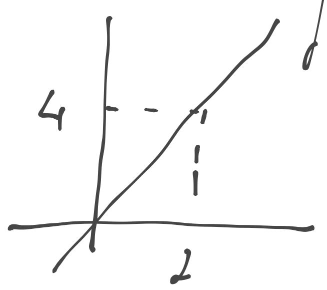
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ou

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemplos

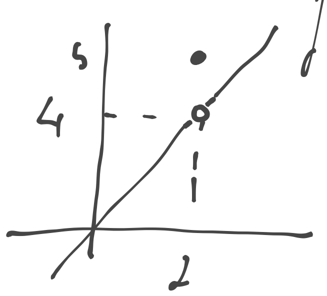
1) $f(x) = 2x$



$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$$

$\therefore$ $f(x)$ é contínua no ponto $x = 2$

2)

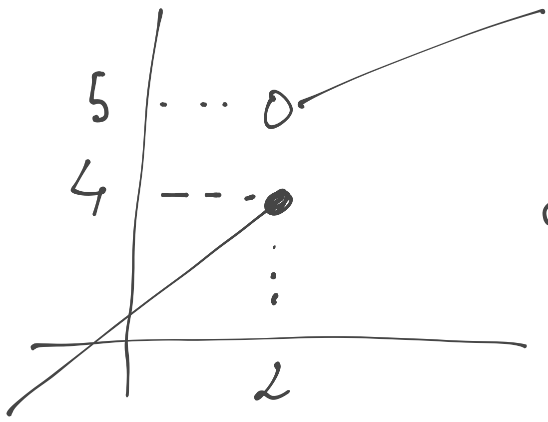


$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 2 \\ 5, & x = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 5$$

$\therefore$ $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 2$

3)



$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases}$$

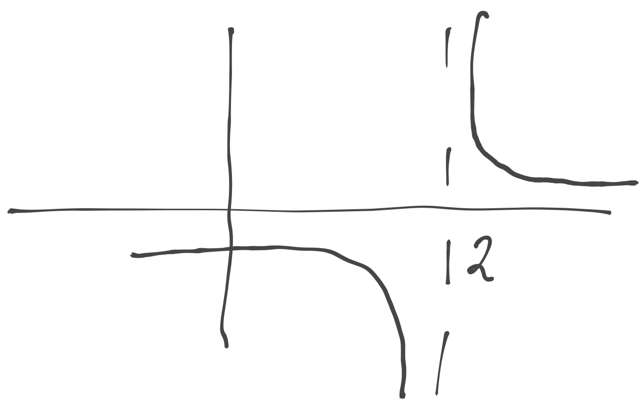
$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 5 \neq \lim_{x \to 2^-} g(x) = 4$$

$g(x)$ é descontínua no ponto $x = 2$

$\downarrow$ Descontinuidade de salto.

---

4)



$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

Descontinuidade essencial

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

A função é descontínua no ponto de acumulação do domínio, $x = 2$.

Importância da continuidade na engenharia:

$$\xrightarrow[x = a]{} \boxed{f(x)} \xrightarrow[y = f(a)]{}$$

x controla suavemente $f(x)$ numa vizinhança do ponto $x = a$