Sumário

- **Cap5. Funções de Várias Variáveis.**
  - Intersecção de superfícies; equação cartesiana de uma reta em 3D.
  - Distância entre dois pontos em 3D. Equação da esfera.
  - Equação cartesiana de uma circunferência contida num plano paralelo a um dos planos coordenados.
  - Equação de um cilindro circular reto cujo eixo de simetria é um dos eixos coordenados.
  - Equação de um parabolóide circular reto cujo eixo de simetria é um dos eixos coordenados.
  - Cálculo aproximado da derivada parcial de uma função $z = f(x, y)$ num ponto do seu domínio, e significado geométrico.
  - Equações das retas tangentes ao gráfico de uma função $z = f(x, y)$ num ponto (a, b) contidas nos planos $x = a$ e $y = b$.

Leitura e Vídeos:

- Sebenta teórica, Capítulo 5: páginas 7-17.
- Apontamentos complementares, colocados na semana 15: páginas 1-7.
- Vídeos do cap 5, colocados na página da disciplina, Semana 14.

O essencial

Função de Duas Variáveis

$$z = f(x,y) = 2xy - \sqrt{x+y}$$

Domínio : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0\}$

Gráfico : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$

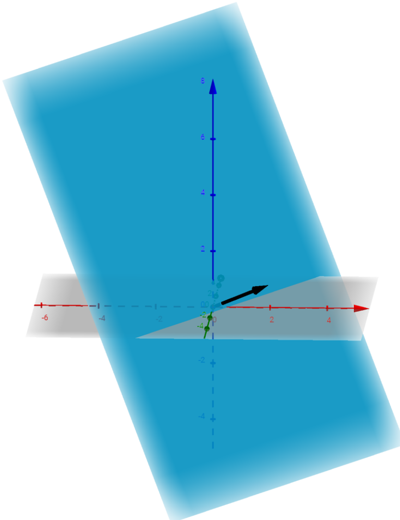
Equação do Plano : $ax + by + cz = d$

vetor $(a,b,c) \perp$ plano

- Exemplo

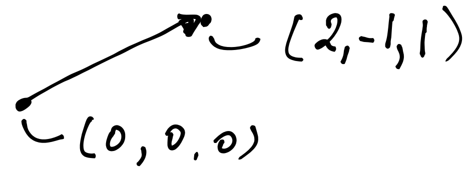
$2x - y + z = 1$: plano

$(2,-1,1)$: vetor perpendicular ao plano

- 

Notar que $(2,-1,1)$ são as coordenadas da extremidade do vetor.

A origem do vetor tem coordenadas $(0,0,0)$.



- $$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Representação cartesiana da reta definida pela intersecção dos dois planos, $2x - y + z = 1$ e $z = 2$.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y + 2 = 1 \\ \text{———} \end{cases}$$

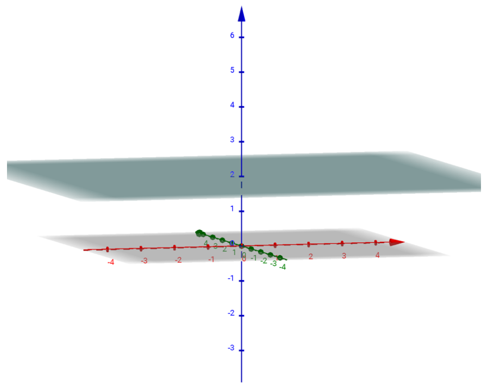
$$\iff \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$y = 2x + 1 \rightarrow$ projeção da reta no plano xy

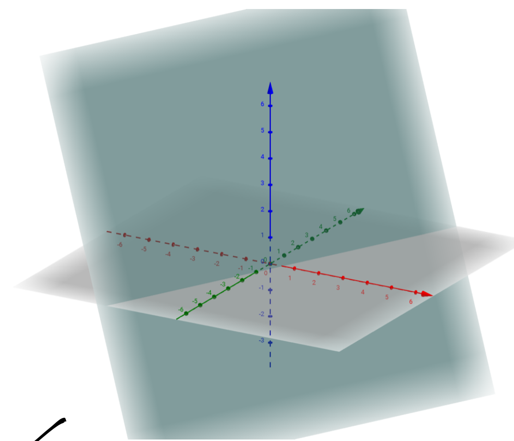
Pontos da reta: $(x, 2x+1, 2)$, $x \in \mathbb{R}$

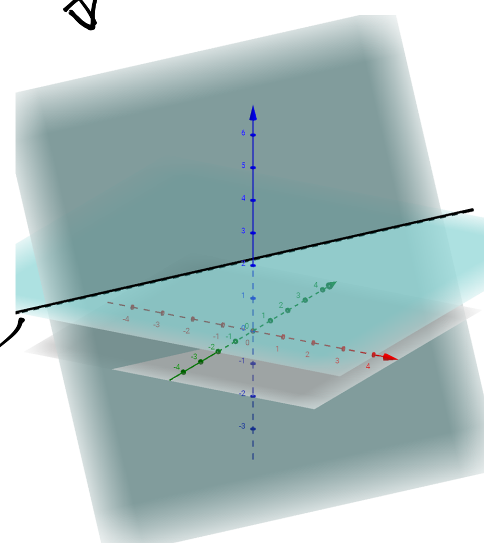
Nas figuras seguintes temos um esboço dos gráficos das entidades geométricas envolvidas neste sistema linear de equações.

plano $z = 2$

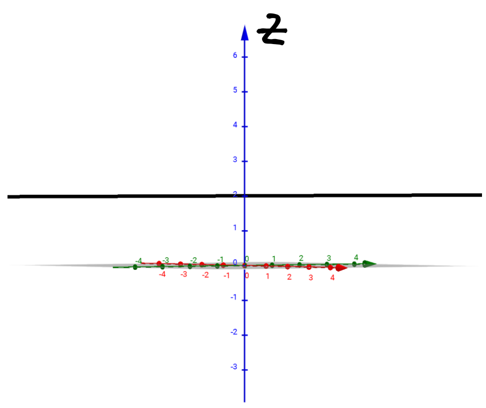


Plano $2x - y + z = 1$

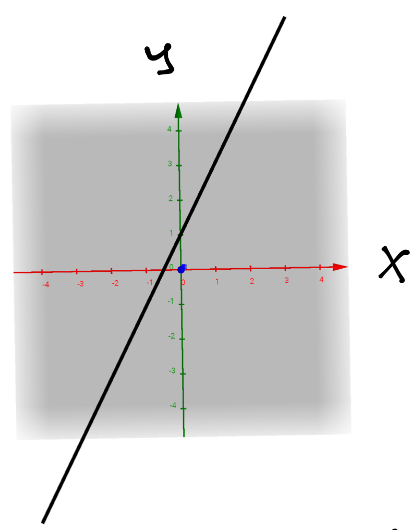




interseção dos planos, é o conjunto dos pontos do espaço que pertencem aos dois planos em simultâneo $\rightarrow$ a reta $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 2 \end{cases}$



Vista frontal da reta
Todos os seus pontos têm coordenada $z = 2$



Projeção da reta no plano xy:

$y = 2x + 1$

Equação da Reta

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ z = 2 \end{cases}$$

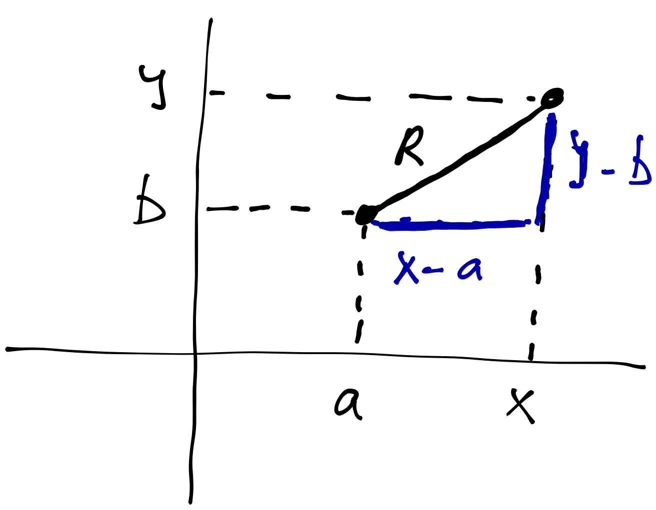
$y = 2x+1 \rightarrow$ informa-nos sobre as coordenadas x, y dos pontos da reta

$z = 2 \rightarrow$ informa-nos sobre as coordenadas z dos pontos da reta

(x, y, z) : os pontos do espaço 3D que pertencem à reta, são todos aqueles cujas coordenadas x, y, z satisfazem ambas as equações.

$$(x, y, z) = (x, 2x+1, 2)$$

Distância entre 2 pontos (a,b), (x,y) em 2D



Seja R essa distância

Pitágoras:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Distância

Tanto vale

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

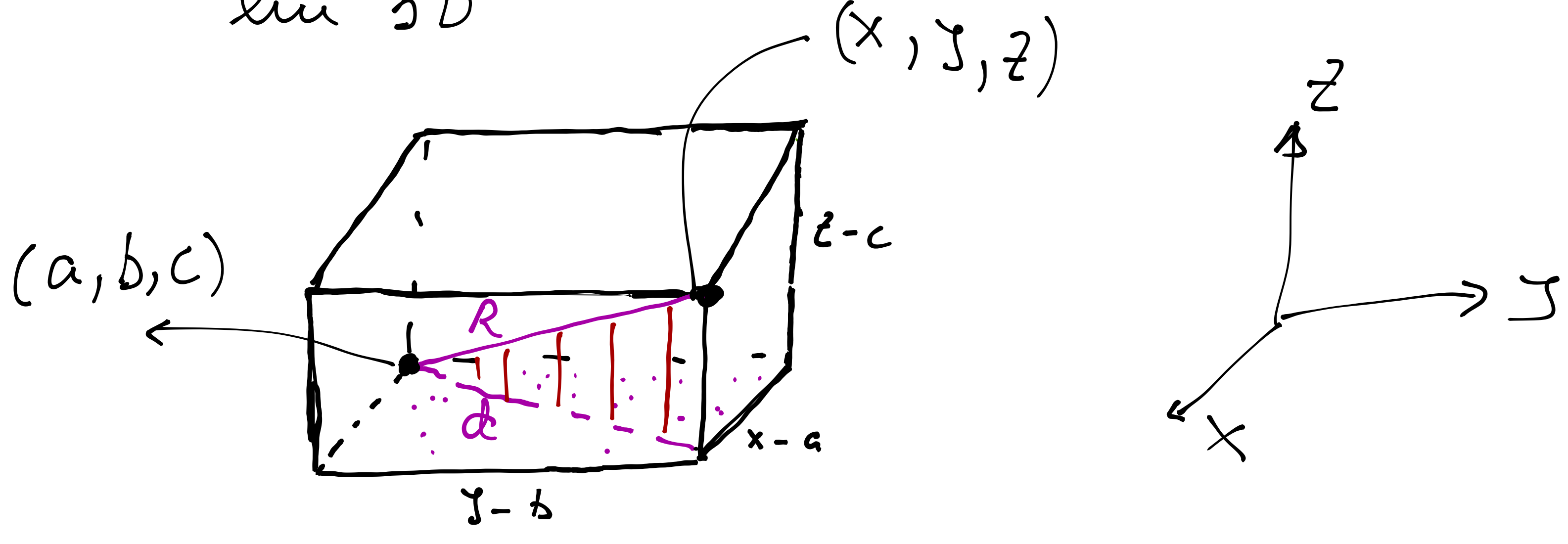
Como

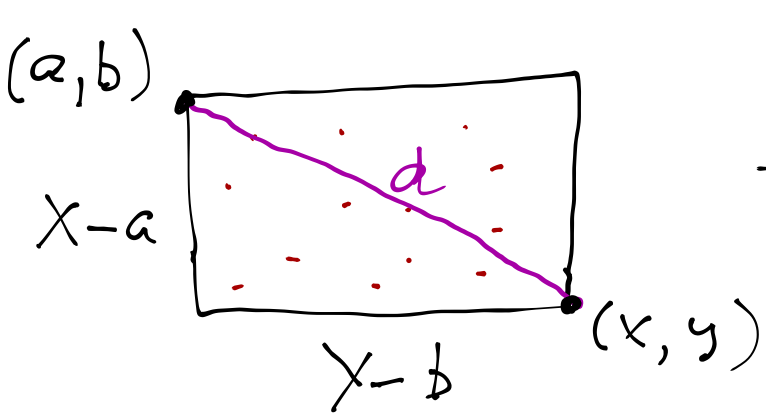
$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = R^2$$

Esta é a equação da circunferência
de centro (a,b)
e de raio R.

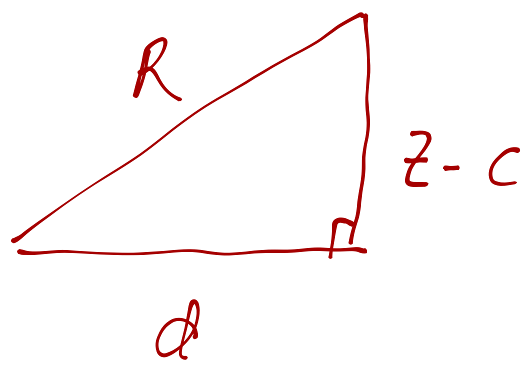
- Só as coordenadas dos pontos (x,y) à distancia R de (a,b) é que a verificam.
- A distância R entre os pontos (a,b), (x,y) é $R = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

Distância entre dois pontos (a,b,c), (x,y,z) em 3D





$$\longrightarrow \quad d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$



$$d^2 + (z-c)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Equação da esfera de
Centro : (a, b, c)
raio : R
distância entre os pontos (a,b,c), (x,y,z)

Exercícios

1) Qual a distância entre os pontos $(1,-1,1)$ e $(2,1,-1)$?

Resposta : D: distância

$$D = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-1)^2 + (1-(-1))^2}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

2) Escrever a equação cartesiana da esfera de centro $(-2,1,1)$ e raio $\sqrt{3}$.

Resposta:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow (x-(-2))^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3 \ \#$$

3. Qual a entidade geométrica representada pelo sistema de equações não linear

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ y=1 \end{cases} \quad ?$$

Resposta

- Os pontos pertencentes à entidade geométrica são todos aqueles cujas coordenadas satisfazem ambas as equações.

$x^2+y^2+z^2=4$

Esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 2

$y=1$

Plano perpendicular ao eixo dos yy no ponto $(x,y,z)=(0,1,0)$

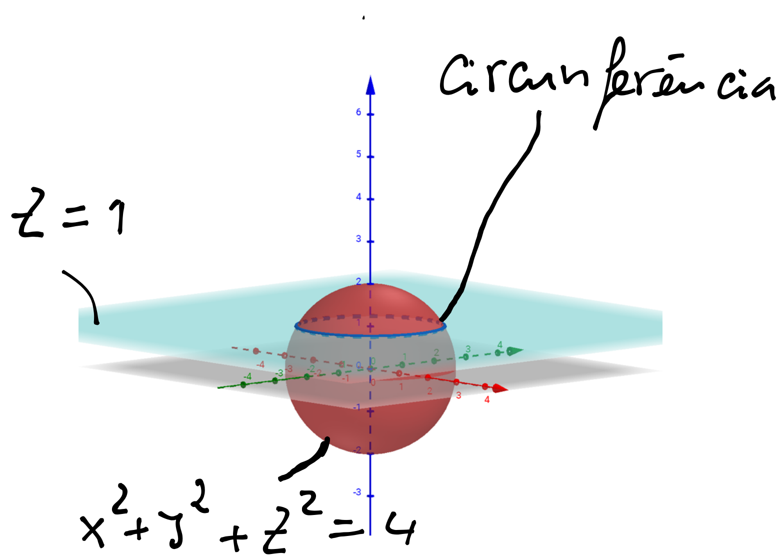
Os pontos comuns às duas superfícies representam uma circunferência.

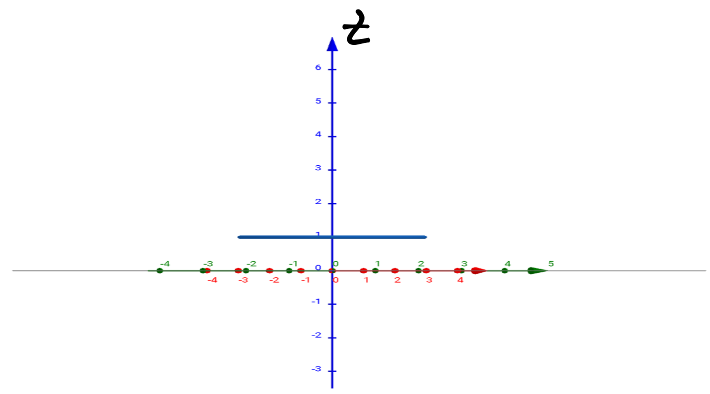
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1+z^2=4 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Pontos da Circunferência

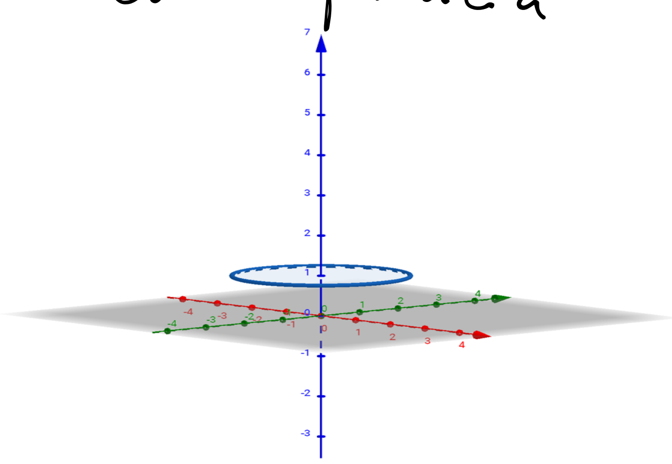
$$\left(x,\ 1,\ \pm\sqrt{3-x^2}\right),\quad -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$$

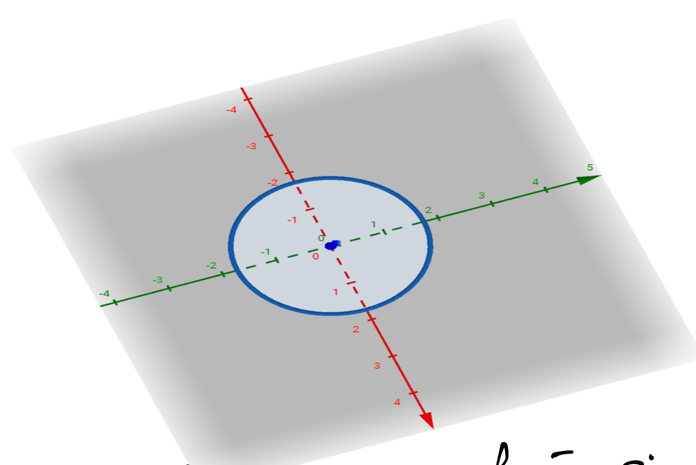




Vista lateral da circunferência; contida no plano $z=1$

Circunferência



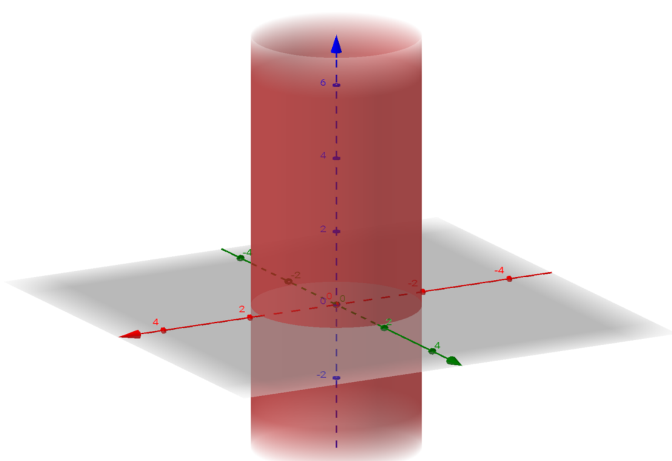


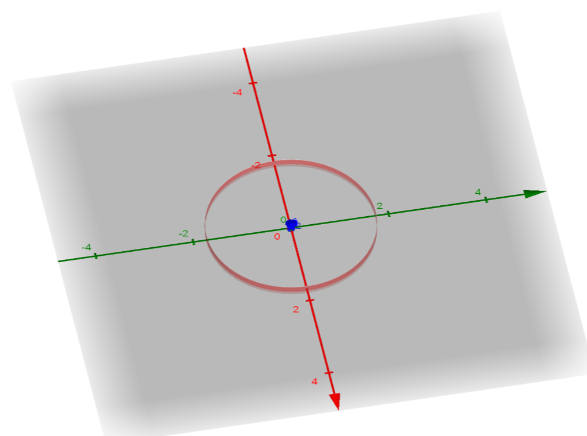
projeção da circunferência no plano xy $\rightarrow x^2+y^2=3$

5. Qual a superfície representada pela equação $x^2+y^2=3$?

Resposta

Cilindro circular reto que tem o eixo dos ZZ como eixo de simetria, e tem secção circular com raio $\sqrt{3}$



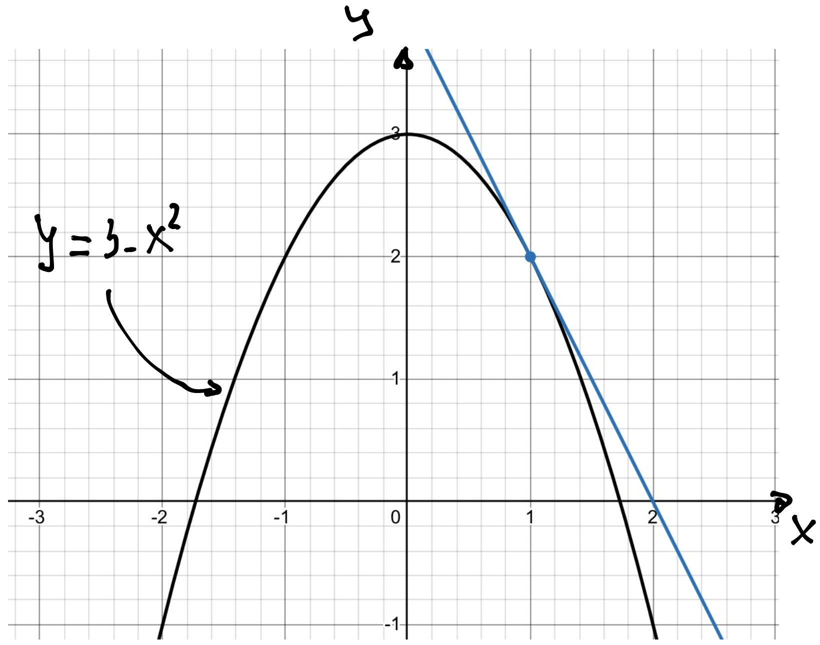


Projeção do cilindro no plano xy

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=0 \end{cases}$$

6. Qual o declive da reta tangente à curva $f(x)=3-x^2$ no ponto $(x,y)=(1,2)$, e qual o seu significado?

Resposta



Reta tangente ao gráfico da curva $y = 3 - x^2$ no ponto $(x, y) = (1, 2)$

$$y = mx + b$$

$$m = f'(1) \qquad f'(x) = (3 - x^2)' = -2x$$

$$f'(1) = -2(1) = -2$$

$$\therefore \quad y = -2x + b$$

$\underline{b}$: ponto $(1, 2)$ da reta

$$2 = -2(1) + b \Rightarrow b = 4$$

$$\therefore \quad y = -2x + 4$$

O declive da reta tangente é -2.

- O seu significado analítico é o seguinte: se variarmos x de um valor pequeno com relação a $x = 1$, a variação de y

correspondente é aproximadamente

$$\Delta y \approx f'(1) \cdot \Delta x$$

Suponhamos que variamos x de 1 para 1.1

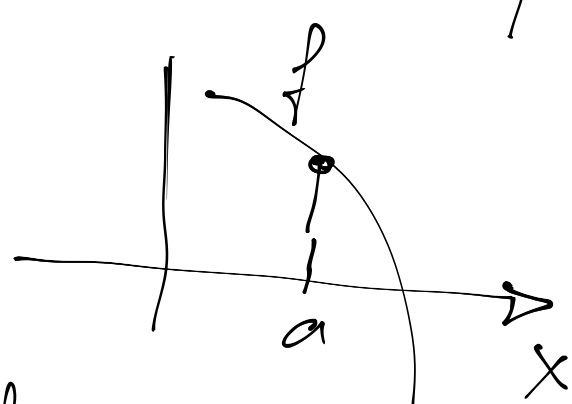
Então $\Delta y \approx -2(0.1) = -0.2$

↓

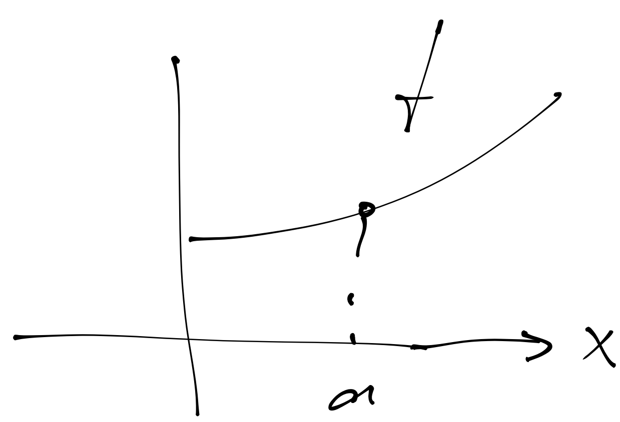
A função decresce numa vizinhança suficientemente pequena de $x = 1$ à taxa de 2 unidades de y por cada unidade de x

↓

O crescimento ou decrescimento de uma função num ponto avalia-se sempre no sentido em que aumenta x.



f decresce em $x = a$



f cresce em $x = a$

- Podemos calcular $f'(1)$ de forma aproximada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$ valor exato

$$f'(1) \approx \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \quad \text{para } \Delta x \approx 0$$

Valor aproximado

$$\xrightarrow{\;x\;} \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

$x = 1$ $\qquad f(1) = 3 - 1^2 = 2$

$x = 1.1$ $\qquad f(1.1) = 3 - 1.1^2 = 1.79$

$$f'(1) \approx \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1} = \frac{1.79 - 2}{0.1}$$

$$= \frac{-0.21}{0.1} = -2.1$$

---

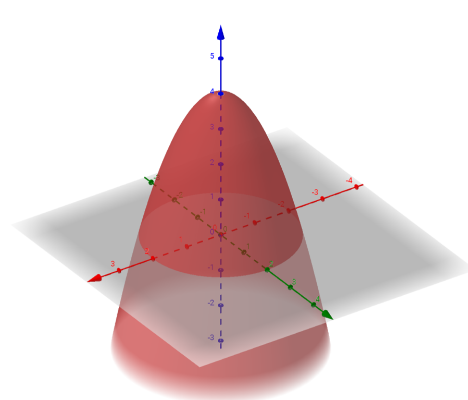
7. Dada a superfície $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ calcular

(a) A taxa de variação de $f(x,y)$ no ponto $(1,1)$, na direção do eixo dos yy

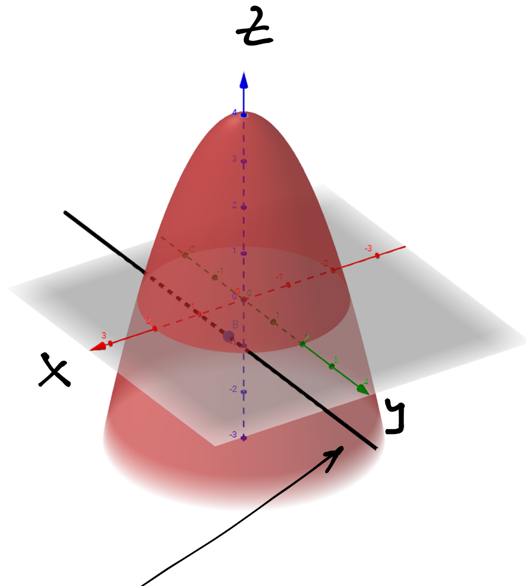
(b) O mesmo de (a), mas na direção do eixo dos xx.

Resolução (detalhada)

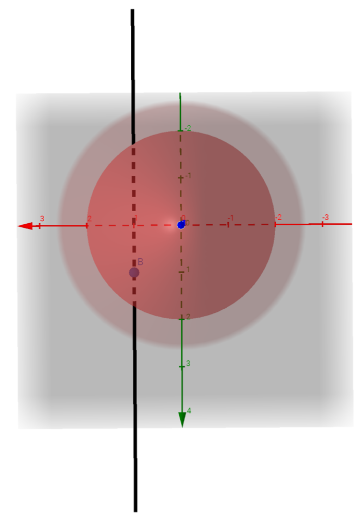
Gráfico da superfície



(a)



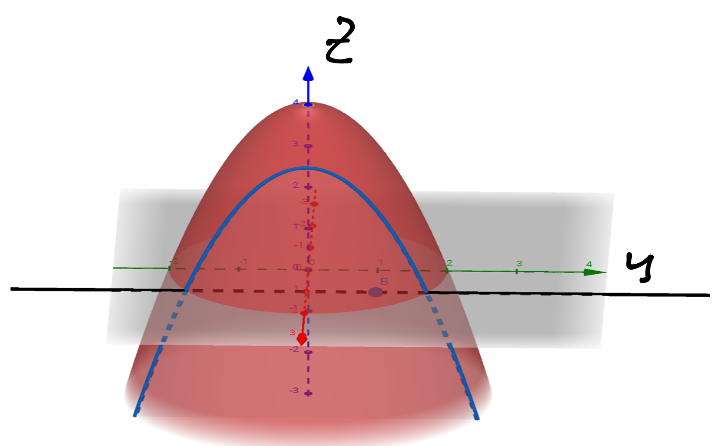
Vista de cima



Reta no plano $z=0$, perpendicular ao eixo dos x x no ponto $x=1$ $\longrightarrow$ Coordenadas da reta

$(1, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$

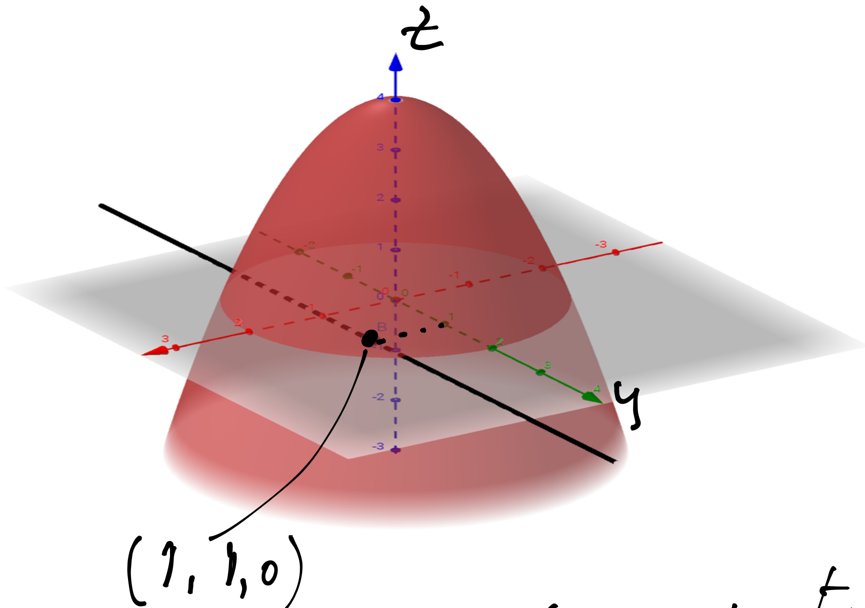
Qual a linha que alguém que se desloque sobre esta reta observa na superfície a vermelho? Observa a parábola a azul.



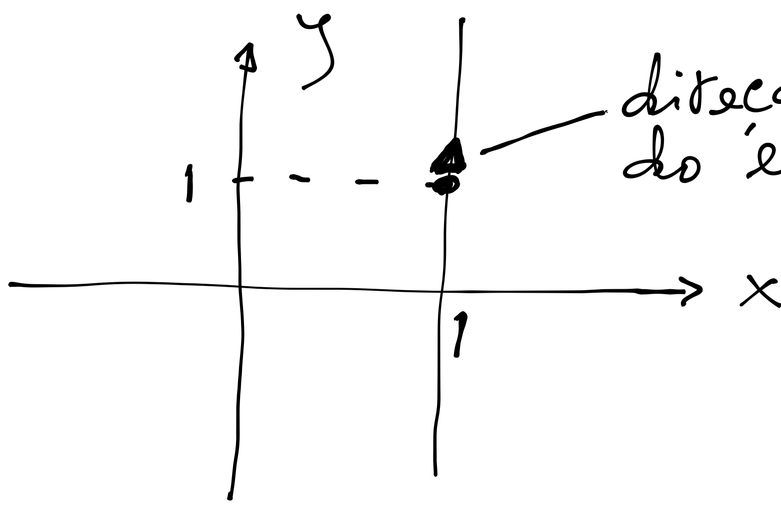
Qual o sistema de equações que define esta parábola?

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 1^2 - y^2 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - y^2 \\ x = 1 \end{cases}$$

• Se alguém se colocar no ponto $(x, y, z) = (1, 1, 0)$



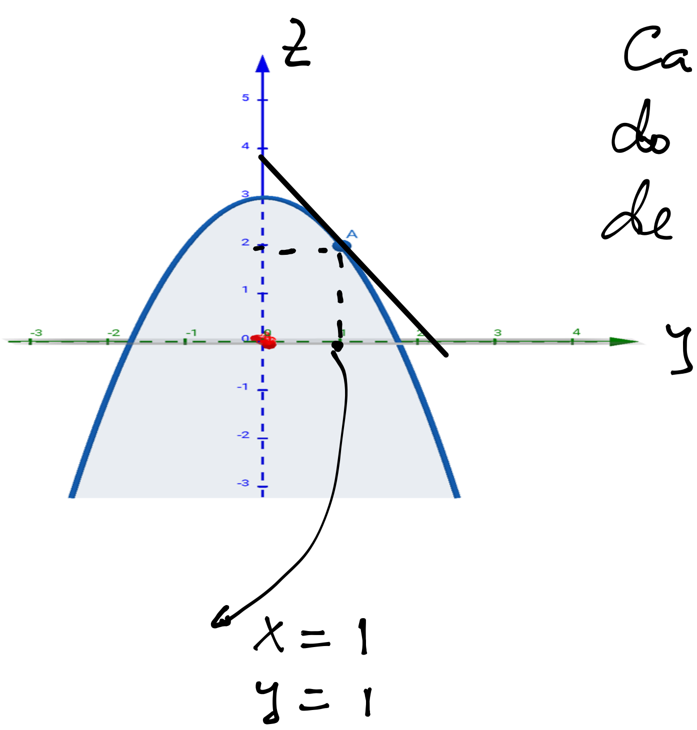
e se deslocar na direção e sentido do eixo dos yy,



Como vê a altura z da curva variar?

Caminhando no sentido do eixo dos yy o valor de z diminui

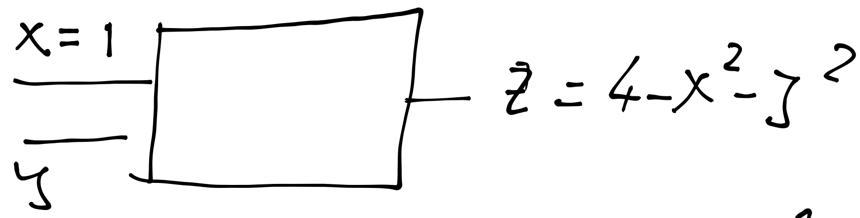
Vista frontal



- Calculo do declive da reta tangente à parábola contida no plano $z = 1$

- Cálculo Exato

Mantendo x fixo



Calculamos a derivada parcial de z em ordem a y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

(x fixo; y varia)

$$= (4 - x^2 - y^2)'_y = (4)'_y - (x^2)'_y - (y^2)'_y$$

$$(4)'_y = 0$$

$(x^2)'_y = 0$, porque supomos x constante

$$(y^2)'_y = 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

O valor da derivada parcial no ponto $(x, y) = (1,1)$ é

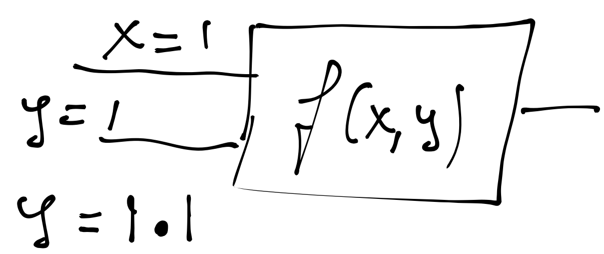
$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -2(1) = -2$$

Este é o declive da reta tangente na figura da página anterior.

$\frac{\partial z}{\partial y}$ também se escreve z'_y.

<u>Conclusão:</u> $z'_y(1,1) = -2 < 0$ significa que a função $z = 4 - x^2 - y^2$ decresce no ponto $(x,y) = (1,1)$ do seu domínio, na direcção do eixo dos yy (x fixo em $x = 1$ e y crescendo).

· <u>Cálculo aproximado</u>



$z(1,1) = 4 - 1^2 - 1^2 = 2$

$z(1,1.1) = 4 - 1^2 - 1.1^2 = 1.79$

Como

$$z'_y(1,1) = \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(1, 1+\Delta y) - f(1,1)}{\Delta y}$$

$$\approx \frac{f(1, 1+\Delta y) - f(1,1)}{\Delta y}$$

para Δy pequeno

escolhendo $\Delta y = 0.1$, temos

$$z'_y(1,1) \approx \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(1,1.1) - f(1,1)}{0.1} = \frac{1.79 - 2}{0.1}$$

$$= -2.1$$

-2.1 é próximo do valor exacto -2 calculado antes.

$z'_y(1,1) = -2$ permite-nos fazer cálculos do seguinte tipo

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} \simeq -2 \Rightarrow \Delta z \simeq -2\Delta y$$

Se Δy for pequeno, a correspondente variação de z é $\Delta z \simeq -2\Delta y$, o que corresponde a um decréscimo de z no ponto $(1,1)$ à taxa de -2 unidades por unidade de variação de y.

(b)

A taxa de variação de f no ponto $(1,1)$, na direcção do eixo dos XX.

$$z'_x = (4-x^2-y^2)'_x = \underbrace{(4)'_x}_{=0} - \underbrace{(x^2)'_x}_{=2x} - \underbrace{(y^2)'_x}_{=}$$

(y fixo)

$$z'_x = -2x$$

$$z'_x(1,1) = -2 < 0$$

No ponto $(x,y) = (1,1)$ a função z decresce à taxa de -2, na direcção do eixo dos XX.

Exercício

$$z = y\,(2x-6y)^{1/2}$$

(a) Calcular as derivadas parciais de primeira ordem, $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$

(b) Como varia a função no ponto $(x,y) = (5,1)$ do seu domínio

(i) Na direção do eixo dos yy?

(ii) Na direção do eixo dos xx?

Resolução

(a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(y\cdot(2x-6y)^{1/2}\right)'_x$$

$$= (y)'_x\cdot(2x-6y)^{1/2} + y\left((2x-6y)^{1/2}\right)'_x$$

C.A. $(y)'_x = 0$

$$\left((2x-6y)^{1/2}\right)'_x = \frac{1}{2}(2x-6y)^{-\frac{1}{2}}\underbrace{(2x-6y)'_x}_{=2}$$

$$= (2x-6y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\,(2x-6y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{2x-6y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(y \cdot (2x - 6y)^{1/2} \right)'_y$$

$$= (y)'_y \cdot (2x-6y)^{1/2} + y\left((2x-6y)^{1/2}\right)'_y$$

C.A. $(y)'_y = 1$

$$\left((2x-6y)^{1/2}\right)'_y = \frac{1}{2}(2x-6y)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{(2x-6y)'_y}_{=-6}$$

$$= -3(2x-6y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2x-6y)^{1/2} - 3(2x-6y)^{-\frac{1}{2}}$$

(b) (i) variação de z na direção do eixo dos yy, no ponto $(5,1)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(5,1) = (2(5)-6(1))^{1/2} - 3(2(5)-6(1))^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 4^{1/2} - \frac{3}{4^{1/2}} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

No ponto $(x,y) = (5,1)$ a função z cresce à taxa de $1/2$ na direção do eixo dos yy.

(ii) variação de z na direção do eixo dos xx, no ponto $(5,1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(5,1) = \frac{1}{\sqrt{2(5)-6(1)}} = \frac{1}{2}$$

No ponto $(x,y) = (5,1)$ a função z cresce à taxa de $1/2$ na direção do eixo dos yy.